
1837
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
CIRCUMSPICE

Die

Differential- und Integralrechnung,

umfassend

und

mit steter Berücksichtigung der Anwendung dargestellt

von

Dr. J. Dienger,

Professor der Mathematik an der polytechnischen Schule zu Karlsruhe.

Mit 59 in den Text eingedruckten Figuren.

Stuttgart.

Verlag der J. B. Metzler'schen Buchhandlung.

1857.

Druck der J. B. Metzler'schen Buchdruckerei in Stuttgart.

Vorwort.

Mit Ausnahme der Integration der partiellen Differentialgleichungen und der Variationsrechnung enthält das Werk, das ich der Oeffentlichkeit hiemit übergebe, eine vollständige Darstellung der Differential- und Integralrechnung, auf streng wissenschaftlichen Grundlagen aufgebaut und nach dem heutigen Stande der Wissenschaft durchgeführt. Dabei glaube ich auch in Bezug auf Ausführlichkeit genug gethan zu haben, da wohl wenige Sätze, die irgend von wissenschaftlichem Werthe sind, ausgeschlossen wurden, wobei natürlich mein Augenmerk vorzugsweise darauf gerichtet war, Alles in ein organisches Ganze zu vereinigen, so dass nicht eine Sammlung einzelner Sätze und Methoden zum Vorschein käme. So weit dies möglich war, glaube ich auch dieser Anforderung entsprochen zu haben. Dabei bin ich immer darauf bedacht gewesen, durch Beispiele der verschiedensten Art die allgemeinen Sätze zu erläutern; die Beispiele selbst sind entweder rein analytische, oder sie sind aus der Geometrie, Mechanik, mathematischen Physik und Astronomie gewählt. Namentlich habe ich mehrfach die Wärmeprobleme aufgeführt, wie denn auch am Schlusse des ersten Buches die allgemeinen Differentialgleichungen der Wärmebewegung aufgestellt sind. Die noch fehlenden Theile, namentlich die Integration der partiellen Differentialgleichungen, hoffe ich in nicht ferner Zeit nachfolgen lassen zu können. Ich habe sie von diesem Buche ausgeschlossen, weil eine kurze Uebersicht, wie sie in den Lehrbüchern beliebt ist, kaum einen Werth hat, und eine ausführlichere Darstellung, die nothwendig die Behandlung einer Reihe der wichtigeren Probleme der mathematischen Physik verlangt, das Buch zu sehr vergrössert hätte. Es wird desshalb besser seyn, wenn diese Darstellung als besondere Schrift erscheint, die sich aber dem vorliegenden Buche unmittelbar anschliessen wird.

Die Druckeinrichtung ist so getroffen worden, dass die allgemeinen Lehren mit grösserer Schrift, Aufgaben und Erläuterungen dagegen mit kleinerer gedruckt sind. Abgesehen von der Raumersparniss hat diese Einrichtung wohl auch den Vortheil, dass beide Theile sich sofort scheiden und dem Leser eine bequeme Orientirung gestatten. Im Interesse der Raumersparniss habe ich häufige Ueberschriften nicht gegeben, obwohl sie in der eben genannten Beziehung von Nutzen sind; dagegen sind die Ueberschriften auf den einzelnen Seiten fortlaufend von diesem Gesichtspunkte aus durchgeführt worden. In Bezug auf Druck und Papier hat die Verlagshandlung alle meine Wünsche befriedigt, so dass auch in dieser Beziehung Nichts versäumt wurde.

Nachstehend will ich nun noch einige Erläuterungen und Zusätze beifügen, die mir während des Druckes als hieher gehörig erschienen sind.

Dass ich von der Gränzenmethode ausgieng, wird wohl heute keine Beanstandung finden, und so wie die Sache dargestellt ist, wird sich eine besondere Schwierigkeit auch nicht herausstellen. Die allgemeinen Sätze in §. 2, III, IV hätten vielleicht zu Anfang aufgeführt werden können; doch sind sie auch da, wo sie sind, an ihrem Platze. Der Satz III ist natürlich der wichtigste von allen, da von ihm häufig Gebrauch gemacht werden wird. — Die Bezeichnung des Differentialquotienten, wie sie in §. 3 aufgenommen ist, habe ich durchgängig beibehalten, da ein besonderes Zeichen (∂) mir dafür am passendsten schien. Vom Differential ist im ganzen Buche keine Rede, und braucht es, wie man sich leicht überzeugen wird, auch nicht. Dieser Begriff ist, meiner Ansicht nach, verwirrend, und muss ja doch immer umgangen werden, wo man zur Klarheit kommen will. — In §. 5 wurden die Funktionen arc(sin$=$x) u. s. w. aufgenommen, die ich natürlich als aus der Analysis bekannt voraussetze. Ich bemerke dabei nur, dass arc(sin$=$x) und arc(tg$=$x) immer zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ liegen, während arc(cos$=$x) und arc(cotg$=$x) zwischen 0 und π liegen. — Die Bezeichnung der totalen Differentialquotienten, wie sie in §. 7 eingeführt worden, wird wohl genügen, um jeder Unklarheit zu steuern, und also ihren Zweck erreichen. — Das Zeichen $1.2..n$, das namentlich in §. 10 vorkommt, bedeutet bekanntlich das Produkt aller ganzen Zahlen von 1 bis n. Eben so würde $2.4...2n$ das Produkt aller geraden Zahlen, von 2 bis $2n$ bedeuten; endlich $1.3.5...2n-1$ das aller ungeraden Zahlen, von 1 bis $2n-1$. — Dass in §. 10, IV (S. 32) verlangt ist, es dürfe nicht $\psi(a)=0$ seyn, rührt daher, dass man die Form $\frac{0}{0}$ vermeiden wollte, und ohnehin für $m>n$ ein unendlicher Werth zum Vorschein käme; in allen Fällen ist dadurch jedem Zweifel vorgebeugt.

In S. 40, Zeile 20 und 27 sollte das Wort „endlich" durch „stetig" ersetzt werden, da ja im Grunde dies die Voraussetzung ist, wie die Note zu derselben Seite ausdrücklich sagt. In den meisten Fällen sind allerdings beide Ausdrücke gleichbedeutend. Die Hauptanwendung dieser Sätze ist in §. 15. Dort ist aber die Sache so, dass das Ergänzungsglied einen Mittelwerth zwischen den äussersten Werthen

vorstellt und nicht mehr. — Der §. 16 enthält einen viel bestrittenen Satz, der übrigens selbst bei denen, die ihn bestreiten, thatsächlich wieder vorkommt; ich bin im „Anhang“, unter III, nochmals darauf zurückgekommen. Die sogenannten Kennzeichen der Konvergenz der Mac-Laurin'schen Reihe, wie sie namentlich Cauchy aufgestellt, habe ich nicht aufgenommen, da sie eine sichtende Kritik nicht aushalten. In §. 18 habe ich Anwendungen des Restgliedes auf die Ermittlung der Fehlergränze gemacht, wobei ich auf die Elemente der Algebra zurückgegangen bin. Man kann manche der dortigen Sätze leicht verallgemeinern. Gesetzt etwa, man solle $\sqrt[n]{a}$ mit m Ziffern genau ausziehen und wähle $a-\alpha$ für a, so müssen also $\sqrt[n]{a}$ und $\sqrt[n]{a-\alpha}$ in den m ersten Ziffern übereinstimmen; dazu genügt es nun, dass $\frac{\sqrt[n]{a}-\sqrt[n]{(a-\alpha)}}{\sqrt[n]{a}}<\frac{1}{10^m}$ sey. Nun ist $\sqrt[n]{a-\alpha}=\sqrt[n]{a}-\frac{1}{n}\frac{\alpha}{\sqrt[n]{(a-\theta\alpha)}^{n-1}}$, so dass also

$$\frac{\alpha}{n\sqrt[n]{(a-\theta\alpha)}^{n-1}\sqrt[n]{a}}<\frac{1}{10^m},\quad \frac{\alpha}{\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{(a-\theta\alpha)}^{n-1}}<\frac{n}{10^m}$$

seyn muss. Macht man $\frac{\alpha}{\sqrt[n]{(a-\alpha)}\sqrt[n]{(a-\alpha)}^{n-1}}<\frac{n}{10^m}$, so ist dieser Bedingung genügt, so dass also $\frac{\alpha}{a-\alpha}<\frac{n}{10^m}$, $\frac{\alpha}{a}<\frac{n}{10^m+n}$. Nun ist $n\overset{=}{>}2$, $n<10^m$, also $\frac{n}{10^m+n}>\frac{2}{10^m+10^m}$, d. h. $>\frac{1}{10^m}$, und also braucht bloss $\frac{\alpha}{a}<\frac{1}{10^m}$ zu seyn, woraus dann folgt $\frac{a-(a-\alpha)}{a}<\frac{1}{10^m}$, so dass a und $a-\alpha$ in den $m+1$ ersten Ziffern zusammenstimmen müssen.* Soll z. B. $\sqrt[3]{\frac{375300}{\pi}}$ auf 2 Dezimalstellen entwickelt werden, so müssen also, da $\sqrt[3]{\frac{375300}{\pi}}$ jedenfalls zwei Ziffern vor dem Einheitspunkt hat, 4 Ziffern dieser Zahl genau werden, so dass $\frac{375300}{\pi}$ auf 5 Ziffern genau seyn muss. Nimmt man nun $\pi+\alpha$ für π, so hat man $\frac{375300}{\pi+\alpha}=\frac{375300}{\pi}-\frac{375300\,\alpha}{(\pi+\theta\alpha)^2}$, so dass der Fehler $<\frac{375300\,\alpha}{\pi^2}$ ist; da nun 5 Stellen richtig seyn sollen, so muss

* Sind zwei ganze Zahlen A und B ($A>B$) so beschaffen, dass $\frac{A-B}{A}<\frac{1}{10^m}$, so müssen die m ersten Ziffern zusammenstimmen. Denn stimmen nur die $m-1$ ersten zusammen, so wird $A-B$ ihrer $m-1$ Ziffern weniger haben als A; die Division von $A-B$ durch A gibt also nach dem Einheitspunkt noch $m-2$ Nullen, aber die m^te Stelle hat nicht Null, die $m-1$^te kann Null seyn, oder auch nicht; in allen Fällen wäre also $\frac{A-B}{A}>\frac{1}{10^m}$, so dass nicht bloss die $m-1$ ersten Ziffern zusammenstimmen können. Aber eben weil die $m-1$^te Ziffer nicht Null seyn muss, wird nur dann $\frac{A-B}{A}$ sicher $<\frac{1}{10^m}$, wenn in A und B die $m+1$ ersten Ziffern zusammenstimmen.

also der Fehler <1 seyn (da $\frac{375300}{\pi}$ sechs Stellen vor dem Einheitspunkt hat); dazu genügt $\alpha<\frac{\pi^2}{375300}$, d. h. $<\frac{1}{100000}$, so dass also, wenn man $\pi=3{\cdot}14160$ setzt, die Zahl $\frac{375300}{3{\cdot}14160}$ in ihren 5 ersten Ziffern die verlangten gibt.

Man hat weiter für $x>h$:

$$l(x+h)=l(x)+\frac{h}{x}-\frac{h^2}{2x^2}+\ldots,\ l(x-h)=\frac{h}{x}-\frac{h^2}{2x^2}-\ldots,$$

$$l\left(\frac{x+h}{x-h}\right)=2\left(\frac{h}{x}+\frac{h^3}{3x^3}+\ldots\right),\text{ und für } h=1,\ x=2z+1:$$

$$l\left(\frac{z+1}{z}\right)=2\left[\frac{1}{2z+1}+\frac{1}{3}\,\frac{1}{(2z+1)^3}+\ldots\ldots\right],\ z>0.$$

Man setze nun

$$l(z+1)=l(z)+2\left[\frac{1}{2z+1}+\frac{1}{3}\,\frac{1}{(2z+1)^3}+\ldots+\frac{1}{2n-1}\,\frac{1}{(2z+1)^{2n-1}}\right],$$

so ist der begangene Fehler $=$

$$\frac{2}{2n+1}\cdot\frac{1}{(2z+1)^{2n+1}}+\ldots<\frac{2}{2n+1}\cdot\frac{1}{(2z+1)^{2n+1}}\left[1+\frac{1}{(2z+1)^2}+\ldots\right]$$

$$\text{d. h.} <\frac{2}{2n+1}\cdot\frac{1}{(2z+1)^{2n+1}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{(2z+1)^2}},$$

d. h. $<\frac{1}{(2n+1)(2z+1)^{2n-1}2z(z+1)}$, wodurch nun die natürlichen Logarithmen berechnet werden können. So für $z=1$ müsste $\frac{1}{(2n+1).3^{2n-1}.2.2}<\frac{1}{10^8}$ seyn, wenn man $l(2)$ auf 7 Dezimalen haben will; dies ist der Fall für $n=8$, und mithin

$$l(2)=2\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\,\frac{1}{3^3}+\ldots+\frac{1}{15}\,\frac{1}{3^{15}}\right].$$

In dieser Beziehung mag hier auf die Schrift: Théorie générale des Approximation numériques von Vieille (Paris, 1854) verwiesen werden.

Das Lagrange'sche Theorem ist unmittelbar aus dem von Bürmann herrührenden Satze gefolgert worden, wodurch es als eine Folgerung aus dem Mac-Laurin'schen Satze erscheint. — In §. 27, II wurde von einem Ausdrucke für sin x Gebrauch gemacht, der hier nicht bewiesen ist; doch findet er sich in jeder guten Analysis.

In §. 40, S. 148 ist allerdings $z=\frac{\sqrt{a+bx-cx^2}}{(x+\alpha)\sqrt{c}}$, aber nicht kurzweg $z=\sqrt{\frac{-(x+\beta)}{x+\alpha}}$, da diese Gleichung aus $z^2=\frac{-(x+\beta)}{x+\alpha}$ geschlossen ist, aus der auch $z=-\sqrt{\frac{-(x+\beta)}{x+\alpha}}$ folgen könnte. Aber da $\sqrt{a+bx-cx^2}>0$, so kann Letzteres nur Statt finden, wenn $x+\alpha<0$; allein es ist $\alpha-\beta>0$, also $\alpha>\beta$, und da $(x+\alpha)(x+\beta)<0$, also $x+\alpha$ und $x+\beta$ von verschiedenem Zeichen, so muss nothwendig $x+\alpha>0$ seyn, so dass unsere Formeln unbedingt gelten.

In §. 44, S. 161, III wäre zuzufügen, dass die Formeln für $\int \frac{\partial x}{a + b \cos x}$ genügen; denn ist auch $a < 0$ und $a^2 > b^2$, so ist $\int \frac{\partial x}{a + b\cos x} = -\int \frac{\partial x}{-a - b\cos x}$ und $-a > 0$, $(-a)^2 > (-b)^2$; ist weiter $a^2 < b^2$, $b < 0$, so hat man dieselbe Umschreibweise und es ist $(-a)^2 < (-b)^2$, $-b > 0$.

In der Formel (44) des §. 48, S. 175 ist allerdings zu verlangen, es solle f (x) stetig seyn von $x = a$ bis $x = b$; doch ist dies nicht nöthig, da es genügt, dass f(x) endlich sey, und man durch $f[a + \Theta(b-a)]$ einen Mittelwerth zwischen den äussersten (grössten und kleinsten) Werthen bezeichnet, die f(x) erlangt, wenn x von a bis b geht. Dass die Grösse unter dem (bestimmten) Integralzeichen immer endlich seyn müsse, ist Grundbedingung, und es sind daher auch manche Untersuchungen von Cauchy weggeblieben, die gegen diese fundamentale Anforderung fehlen, eben weil sie nicht zulässig sind.

In §. 50, IV, S. 186 ist der Fall weggeblieben, da zwar a und b von verschiedenem Zeichen, aber $-\frac{a}{b} > 1$, in welchem das Integral zulässig ist. Man fände:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial x}{a - b\cos x} = \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \operatorname{arc}\left(tg = \sqrt{\frac{a+b}{a-b}}\right), \quad a > b > 0.$$

Zu §. 69 kann man folgende, von Liouville herrührende Betrachtung zufügen. Gesetzt in $\frac{\partial y}{\partial x} = f(x, y)$ enthalte f(x, y) eine Konstante a, die in der Grösse $f_1 = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} f$, oder in $\varphi(f) . f_1$, wo φ eine willkürliche Funktion, nicht mehr vorkommt, so ist $\varphi(f) \frac{\partial f}{\partial a}$ ein integrirender Faktor von $\frac{\partial y}{\partial x} - f = 0$. Denn es ist $\frac{\partial}{\partial a}[\varphi(f) f_1] = 0$, d. h. $\frac{\partial}{\partial a}\left[\varphi(f)\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{6 y} f\right)\right] = 0$, $\varphi'(f) \frac{\partial f}{\partial a}\left[\frac{\partial f}{\partial x} + f \frac{\partial f}{\partial y}\right] + \varphi(f)\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial a} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial a} f + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial a}\right] = 0$, d. h. $\frac{\partial\left[\varphi(f)\frac{\partial f}{\partial a}\right]}{\partial x} + \frac{\partial\left[f\varphi(f)\frac{\partial f}{\partial a}\right]}{\partial y} = 0$, was die Behauptung beweist. Ist $\frac{\partial[\varphi(f) f_1]}{\partial a}$ nur Null für einen bestimmten Werth von a, so ist $\varphi(f) \frac{\partial f}{\partial a}$ ein integrirender Faktor für diesen Werth von a, wenn dieser Faktor nur nicht 0 oder ∞.

In S. 289, Zeile 13—19 ist ein nicht ganz richtiger Satz stehen geblieben, da die Gleichung (a) in §. 66 nicht eigentlich hieher gehört, indem wenn $\varphi(y) = y$ ja auch $\varphi(x) = x$ seyn sollte. Man kann also diese wenigen Zeilen füglich weglassen.

Das allgemeine Schema, das zu §. 71 gehört, ist das folgende: Man bilde aus f(x, y), das zur Abkürzung f heissen möge, die Funktionen $f_1 = \frac{\partial f}{\partial x} + f\frac{\partial f}{\partial y}$, $f_2 = \frac{\partial f_1}{\partial x} + f\frac{\partial f_1}{\partial y}$, $f_3 = \frac{\partial f_2}{\partial x} + f\frac{\partial f_2}{\partial y}$, ..., so ist $y = b + \frac{x-a}{1} f(a, b) + \frac{(x-a)^2}{1.2} f_1(a, b) + \frac{(x-a)^3}{1.2.3} f_2(a, b) \ldots$, wo b eine willkürliche Konstante.

Wenn man in §. 76 setzt $l(a + bx) = u$ und formt die Gleichung (k) um, so

kommt man auf den ersten Hauptfall zurück, so dass also dieser letztere der wesentlichere ist.

In §. 92, Nr. 5 könnte ein Anstand gefunden werden, da thatsächlich die Geschwindigkeit zunehmen wird mit wachsendem x, während der Druck abnehmen wird. Man kann also so sagen: die gewonnene lebendige Kraft beim Durchströmen von Δx ist $= \frac{p \omega \Delta x}{2 k g} [(v + \Delta v)^2 - v^2] = \frac{p \omega \Delta x}{g k} [v \Delta v + \frac{1}{2} (\Delta v)^2]$; die Arbeit des Druckes $= - \omega \Delta p \Delta x$, da hier Δp negativ ist; da nun die lebendige Kraft durch diese Arbeit des Drucks entstanden ist, so hat man $- \omega \Delta p \Delta x = \frac{p \omega \Delta x}{g k} [v \Delta v + \frac{1}{2} (\Delta v)^2]$, was die Gleichung (n) wieder gibt. Dass die Resultate zusammenstimmen mussten, ist leicht einzusehen, so dass man die Darstellung im Buche stehen lassen kann. Die eben angedeutete mag jedoch vorzuziehen seyn, wenn gleich Fälle vorkommen können, wo auf kurze Strecken hin v abnimmt mit wachsendem x.

Zu §. 94 mögen noch folgende Betrachtungen beigefügt werden, die wieder theilweise von Liouville herrühren. Gesetzt man habe die gleichzeitigen Differentialgleichungen: $\frac{\partial y}{\partial x} = Y$, $\frac{\partial z}{\partial x} = Z$, $\frac{\partial u}{\partial x} = U$, ..., so bilde man die Grössen Y_1, Y_2, ...; Z_1, Z_2, ... nach folgendem Schema:

$$Y_1 = \frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} Y + \frac{\partial Y}{\partial z} Z + \ldots, \quad Y_2 = \frac{\partial Y_1}{\partial x} + \frac{\partial Y_1}{\partial y} Y + \frac{\partial Y_1}{\partial z} Z + \ldots, \ldots,$$

$$Z_1 = \frac{\partial Z}{\partial x} + \frac{\partial Z}{\partial y} Y + \frac{\partial Z}{\partial z} Z + \ldots, \quad Z_2 = \frac{\partial Z_1}{\partial x} + \frac{\partial Z_1}{\partial y} Y + \frac{\partial Z_1}{\partial z} Z + \ldots, \ldots, \text{ u. s. w.},$$

setze nun in $Y, Z, \ldots, Y_1, Z_1, \ldots, Y_2, Z_2, \ldots, \ldots$ $x = a$, $y = b$, $z = c$, ..., wo b, c, ... willkürliche Konstanten sind und bezeichne die so hieraus entstehenden Werthe durch Anhängen des Zeigers a, so ist

$$y = b + \frac{x-a}{1} (Y)_a + \frac{(x-a)^2}{1.2} (Y_1)_a + \frac{(x-a)^3}{1.2.3} (Y_2)_a + \ldots,$$

$$z = c + \frac{x-a}{1} (Z)_a + \frac{(x-a)^2}{1.2} (Z_1)_a + \frac{(x-a)^3}{1.2.3} (Z_2)_a + \ldots,$$

u. s. w. Der Beweis dieser Sätze ist sehr leicht. Offenbar ist nämlich $Y_1 = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, $Y_2 = \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$, ... u. s. w., woraus nach §. 71 sofort die Behauptung folgt.

Gesetzt nun, es sey $Y = \frac{\partial S}{\partial y}$, $Z = \frac{\partial S}{\partial z}$, ..., wo S eine Funktion von x, y, z, ... ist; gesetzt ferner, man bilde Y_1, Z_1, ... wie so eben, und es sey eine Konstante α in einer der Funktionen Y, Z, ... wenigstens (also in S) enthalten, die bei der Bildung von Y_1, Z_1, ... wegfalle, so ist also $\frac{\partial Y_1}{\partial \alpha} = 0$, $\frac{\partial Z_1}{\partial \alpha} = 0$, ... Aber es ist

$$Y_1 = \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} \frac{\partial S}{\partial y} + \frac{\partial^2 S}{\partial y \partial z} \frac{\partial S}{\partial z} + \ldots,$$

$$Z_1 = \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 S}{\partial y \partial z} \frac{\partial S}{\partial y} + \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} \frac{\partial S}{\partial z} + \ldots, \text{ u. s. w.},$$

also, wenn $\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha \partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha \partial y} + \frac{\partial S}{\partial z} \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha \partial z} + \ldots = R$, so ist

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Y_1}{\partial \alpha}, \quad \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{\partial Z_1}{\partial \alpha}, \ldots, \text{ also } \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial R}{\partial z} = \ldots = 0,$$

so dass also R kein y, z, . . . enthält, mithin bloss von x abhängt. Nun ist

$$\frac{\partial Y}{\partial \alpha}\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial Z}{\partial \alpha}\frac{\partial z}{\partial x}+\ldots=\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha\, \partial y}\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha\, \partial z}\frac{\partial z}{\partial x}+\ldots=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial S}{\partial \alpha}\right)-\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha\, \partial x},$$

$$\frac{\partial Y}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial y}{\partial x}-Y\right)+\frac{\partial Z}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial z}{\partial x}-Z\right)+\ldots=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial S}{\partial \alpha}\right)-\left[\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha\, \partial x}+\frac{\partial S}{\partial y}\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha\, \partial y}+\frac{\partial S}{\partial z}\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha\, \partial z}+\ldots\right]=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial S}{\partial \alpha}\right)-R,$$

das heisst, weil $\frac{\partial y}{\partial x}-Y=0$, $\frac{\partial z}{\partial x}-Z=0, \ldots$, es ist auch

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial S}{\partial \alpha}\right)=R, \quad \text{also} \quad \frac{\partial S}{\partial \alpha}=\int R\,\partial x+C$$

eine Integralgleichung des Systems. Sind mehrere solcher Konstanten α in S, so erhält man mehrere Integralgleichungen. Ueberdies ist auch

$$R=\frac{\partial}{\partial \alpha}\left[\frac{\partial S}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2+\ldots\right],$$

so dass man also bloss zu sehen braucht, ob $\frac{\partial S}{\partial x}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2+\ldots\ldots\right]$ nur x und α enthält, in welchem Falle sofort $\frac{\partial S}{\partial \alpha}=\int R\,\partial x+C$ ist.

Die Berechnung von $l\Gamma(1+a)$ auf S. 489 (§. 106) kann noch etwas anders geführt werden. Beachtet man nämlich, dass $\Gamma(b)\,\Gamma(1-b)=\frac{\pi}{\sin b\pi}$, wo b zwischen 0 und 1, so ist $b\,\Gamma(b)\,\Gamma(1-b)=\frac{b\pi}{\sin b\pi}$ d. h. $\Gamma(1+b)\,\Gamma(1-b)=\frac{b\pi}{\sin b\pi}$, und also $l\Gamma(1+a)+l\Gamma(1-a)=l\left(\frac{a\pi}{\sin a\pi}\right)$, d. h. $-l(1+a)-l(1-a)+S_2 a^2+\frac{1}{2}S_4 a^4+\ldots$

$$=l\left(\frac{a\pi}{\sin a\pi}\right), \quad \frac{1}{2}S_2 a^2+\frac{1}{4}S_4 a^4+\frac{1}{6}S_6 a^6+\ldots=\frac{1}{2}l\left(\frac{a\pi}{\sin a\pi}\right)+\frac{1}{2}l(1-a^2),$$

und also

$$l\Gamma(1+a)=\frac{1}{2}l\left(\frac{a\pi}{\sin a\pi}\right)+\frac{1}{2}l(1-a^2)-ka+a-l(1+a)-\frac{1}{3}S_3 a^3-\frac{1}{5}S_5 a^5-\ldots$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{a\pi}{\sin a\pi}\right)+\frac{1}{2}l\left(\frac{1-a}{1+a}\right)-(k-1)a-\frac{1}{3}S_3 a^3-\frac{1}{5}S_5 a^5-\ldots$$

Will man endlich die allgemeine Betrachtung des §. 113 nicht anwenden, so kann man in folgender Weise verfahren:

$$\Delta f(x)=h f'(x)+\frac{h^2}{2}f''(x)+\int_0^h \frac{(h-z)^2}{2}f^3(x+z)\,\partial z,$$

$$\Delta f'(x)= \qquad h f''(x)+\int_0^h (h-z)f^3(x+z)\,\partial z,$$

woraus

$$\Delta f(x)-\frac{h}{2}\Delta f'(x)=h f'(x)+\int_0^h f^3(x+z)\left[\frac{(h-z)^2}{2}-\frac{h(h-z)}{2}\right]\partial z$$

$$=h f'(x)-\frac{1}{2}\int_0^h z(h-z)f^3(x+z)\,\partial z=h f'(x)-\frac{h^3}{12}f^3(x+\Theta h) \quad (\text{§. } 48),$$

Ist also $f(x)=\int F(x)\,\partial x$, so ist:

$$\int_a^{a+h} F(x)\,\partial x = hF(a)+\frac{h}{2}[F(a+h)-F(a)]-\frac{h^3}{12}F^2(a+\Theta_1 h),$$

$$\int_{a+h}^{a+2h} F(x)\,\partial x = hF(a+h)+\frac{h}{2}[F(a+2h)-F(a+h)]-\frac{h^3}{12}F^2(a+h+\Theta_2 h),$$

$$\vdots$$

$$\int_{a+\overline{n-1}h}^{a+nh} F(x)\,\partial x = hF(a+\overline{n-1}h)+\frac{h}{2}[F(a+nh)-F(a+\overline{n-1}h)]-\frac{h^3}{12}F^2(a+\overline{n-1}h+\Theta_n h);$$

woraus wie in §. 114:

$$\int_a^{a+nh} F(x)\,\partial x = h[F(a)+F(a+h)+\ldots+F(a+\overline{n-1}h)]+\frac{h}{2}[F(a+nh)-F(a)],$$

mit einem Fehler kleiner als $\frac{nh^3}{12}M$, wo M der grösste Werth ist, den $F^2(z)$ annimmt, wenn z von a bis $a+nh$ geht.

Ueberhaupt kann man die allgemeinen Betrachtungen vermeiden, wenn man in §. 113 nur m spezialisirt, also (wie so eben) $=1, 2, 3, \ldots$ setzt, wodurch eben allgemeinere Untersuchungen unnöthig werden. So erhält man:

$$\int_a^{a+nh} F(x)\,\partial x = h[F(a)+F(a+h)+\ldots+F(a+\overline{n-1}h)]+\frac{h}{2}[F(a+nh)-F(a)]$$
$$-\frac{h^2}{12}F'(a+nh)-F'(a)],$$

mit einem Fehler, kleiner als $\frac{nh^5}{720}M$, wo M der grösste Werth ist, den $F^4(z)$ erlangt, wenn z von a bis $a+nh$ geht.

Schliesslich mag noch die folgende Zusammenstellung von Erinnerungen aus der Analysis gestattet seyn.

I. Die Grösse x^m heisst, wenn m eine positive ganze Zahl, die m^te Potenz von x, und ist das Produkt von m Faktoren, von denen jeder gleich x ist. m heisst der Exponent. $\sqrt[m]{y}$ ist eine Grösse, die m mal als Faktor gesetzt (m mal mit sich selbst multiplizirt) die Grösse y gibt; sie heisst die m^te Wurzel aus y. Sind m, n, r ganze positive Zahlen, so ist $x^{-m}=\frac{1}{x^m}$, $x^{+\frac{n}{r}}=\sqrt[r]{x^n}$, $x^{-\frac{n}{r}}=\frac{1}{\sqrt[r]{x^n}}$. Als Fundamentalgleichungen für die Potenzen hat man:

$$x^m \cdot x^n = x^{m+n},\ \frac{x^m}{x^n}=x^{m-n},\ (x^m)^n = x^{mn},\ x^0=1,$$

was auch immer m und n für Zahlen seyn mögen.

II. Ist $a^z=x$, so heisst z der Logarithmus von x für die Grundzahl a; ist letztere $=2{\cdot}7182818=e$ (§. II, 2), so heisst z der natürliche Logarithmus von x und wird mit $l(x)$ bezeichnet, so dass die Gleichungen $z=l(x)$ und $e^z=x$ dasselbe be-

deuten. Ist $a=10$, so hat man die gewöhnlichen Logarithmen. Für alle Logarithmen gelten die Formeln:

$$\log(yz)=\log y+\log z,\ \log\left(\frac{y}{z}\right)=\log y-\log z,\ \log x^m=m\log x,\ \log x=\frac{l(x)}{l(a)}.$$

III. Ist von $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$ die Rede, so ist x immer gemessen durch einen Kreisbogen, dessen Halbmesser 1 ist, so dass x als reine Zahl erscheint, welche die Länge des zwischen den Seiten des Winkels mit einem Halbmesser $=1$ beschriebenen Kreisbogens ausdrückt, wobei der Scheitel des Winkels Mittelpunkt ist. Die Fundamentalbeziehungen sind:

$$\sin(y+z)=\sin y\cos z+\cos y\sin z,\ \cos(y+z)=\cos y\cos z-\sin y\sin z,\ \operatorname{tg} z=\frac{\sin z}{\cos z},$$
$$\operatorname{cotg} z=\frac{\cos z}{\sin z},\ \sin(-z)=-\sin z,\ \cos(-z)=\cos z,\ \operatorname{tg}(-z)=-\operatorname{tg} z,\ \operatorname{cotg}(-z)=$$
$$-\operatorname{cotg} z,\ \sin^2 z+\cos^2 z=1.$$

IV. Aus $\sin z=x$ folgt, dass z der Bogen sey, detsen Sinus $=x$ ist. Nun aber gibt es viele Bögen, deren Sinus derselbe ist; wählt man den kleinsten davon, der zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ liegt, so soll derselbe durch $\operatorname{arc}(\sin=x)$ bezeichnet werden. Man kann also aus $\operatorname{arc}(\sin=x)=z$ wohl schliessen: $x=\sin z$, nicht aber umgekehrt aus $\sin z=x$ sofort $z=\operatorname{arc}(\sin=x)$, es müsste denn z schon zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ liegen. Ist z zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$, so hat man $z=\operatorname{arc}(\sin=x)$; ist z zwischen $\frac{\pi}{2}$ und $\frac{3\pi}{2}$: $z=\pi-\operatorname{arc}(\sin=x)$; ist z zwischen $\frac{3\pi}{2}$ und 2π: $z=\operatorname{arc}(\sin=x)+2\pi$ u. s. w. Eben so bezeichnet $\operatorname{arc}(\operatorname{tg}=x)$ den kleinsten Bogen, dessen Tangente $=x$ ist, so dass aus $\operatorname{arc}(\operatorname{tg}=x)=z$ folgt $x=\operatorname{tg} z$, während die umgekehrte Gleichung nicht sofort angeschrieben werden kann. Dabei liegt $\operatorname{arc}(\operatorname{tg}=x)$ zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$. Endlich ist immer $\operatorname{arc}(\cos=x)=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arc}(\sin=x)$, $\operatorname{arc}(\operatorname{cotg}=x)=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arc}(\operatorname{tg}=x)$.

V. Die Grösse $\sqrt{-1}=i$ kann nicht durch positive oder negative Zahlen ausgedrückt werden, und heisst desswegen eine imaginäre Zahl. Man hat für sie: $i^2=-1$, $i^3=-i$, $i^4=+1$, $i^{4n}=1$, $i^{4n+1}=i$, $i^{4n+2}=-1$, $i^{4n+3}=-i$. Ferner (§. 17, IV): $e^{xi}=\cos x+i\sin x$, woraus $(\cos x+i\sin x)^m=(e^{xi})^m=e^{mxi}=\cos mx+i\sin mx$, was auch m sey. Setzt man $y+iz=\varrho(\cos\alpha+i\sin\alpha)$, so ist $\varrho=\sqrt{y^2+z^2}$, $\cos\alpha=\frac{y}{\varrho}$, $\sin\alpha=\frac{z}{\varrho}$, wenn y und z reelle (d. h. positive oder negative) Zahlen sind; hieraus folgt $(y+iz)^m=\varrho^m(\cos\alpha+i\sin\alpha)^m=\varrho^m(\cos m\alpha+i\sin m\alpha)$. Da ganz eben so $\sqrt[m]{(y+iz)}=(y+iz)^{\frac{1}{m}}=\varrho^{\frac{1}{m}}\left(\cos\frac{\alpha}{m}+i\sin\frac{\alpha}{m}\right)$ und α nicht bloss einen einzigen Werth haben kann, sondern unzählig viele, die nach einander um 2π verschieden sind, so hat also $\sqrt[m]{(y+iz)}$ mehrere Werthe. Thatsächlich sind nur m davon von einander verschieden, und wenn α_1 der kleinste Bogen ist, für den $\cos\alpha=\frac{y}{\varrho}$, $\sin\alpha=\frac{z}{\varrho}$, so erhält man dieselben, wenn man in $\varrho^{\frac{1}{m}}\left[\cos\frac{\alpha_1+2r\pi}{m}+i\sin\frac{\alpha_1+2r\pi}{m}\right]$ nach einander setzt $r=0, 1, 2, \ldots, m-1$.

Setzt man $l(y+iz)=u+iv$, so ist $y+iz=e^{u+iv}=e^u e^{vi}=e^u$ $(\cos v + i\sin v)$, woraus folgt: $e^u \cos v=y$, $e^u \sin v=z$; $e^u=\sqrt{y^2+z^2}$, $\cos v \frac{y}{\sqrt{y^2+z^2}}$, $\sin v=\frac{z}{\sqrt{y^2+z^2}}$; also $u=\frac{1}{2}l(y^2+z^2)$, während v ein Winkel ist, beschaffen wie so eben verlangt. Ist v_1 der kleinste Winkel dieser Art, so ist $v=v_1+2r\pi$, wo r eine ganze Zahl. Also endlich

$$l(y+iz)=\frac{1}{2}l(y^2+z^2)+(v_1+2r\pi)i;\ \cos v_1=\frac{y}{\sqrt{y^2+z^2}},\ \sin v_1=\frac{z}{\sqrt{y^2+z^2}}.$$

Inhaltsverzeichniss.

Erster Abschnitt.

Von den Funktionen. Gränzwerthe. Differentialquotient für Funktionen einer einzigen unabhängig Veränderlichen.

Zweiter Abschnitt.

Differentialquotienten höherer Ordnung. Vertauschung der unabhängig Veränderlichen. Bedeutung gewisser Differentialquotienten.

Dritter Abschnitt.

Die Theoreme von Taylor, Mac-Laurin, Bürmann und Lagrange.

Vierter Abschnitt.

Untersuchung der scheinbar unbestimmten Formen.

Fünfter Abschnitt.

Von den grössten und kleinsten Werthen für Funktionen einer unabhängig Veränderlichen.

Sechster Abschnitt.

Reihenbildung und Reihensummirung mittelst der Differentialrechnung.

Siebenter Abschnitt.

Differentialquotienten für Funktionen mehrerer unabhängig Veränderlichen. Vertauschung dieser letztern. Analytische Anwendungen.

Allgemeine Anmerkung.

Achter Abschnitt.

Das unbestimmte Integral.

Neunter Abschnitt.

Das bestimmte Integral.

Zehnter Abschnitt.

Quadratur der Kurven und Oberflächen. Rektifikation der Kurven und Kubatur der Körper.

Elfter Abschnitt.

Weitere Untersuchungen über bestimmte Integrale.

Zwölfter Abschnitt.

Die Differentialgleichungen erster Ordnung.

Dreizehnter Abschnitt.

Die Differentialgleichungen höherer Ordnung.

Vierzehnter Abschnitt.

Von den besondern Auflösungen der Differentialgleichungen.

Fünfzehnter Abschnitt.

Integration der gleichzeitigen Differentialgleichungen.

Sechszehnter Abschnitt.

Die periodischen Reihen von Fourier und Lagrange.

Siebzehnter Abschnitt.

Die elliptischen Integrale.

Achtzehnter Abschnitt.

Die Euler'schen Integrale oder die Gamma-Funktionen. Reduktion vielfacher Integrale nach verschiedenen Methoden.

Neunzehnter Abschnitt.

Näherungsweise Berechnung bestimmter Integrale.

Anhang.

Einzelne Ausführungen und Uebungen enthaltend.



Erstes Buch.

Differentialrechnung für Funktionen einer und mehrerer Veränderlichen.

Erster Abschnitt.

Von den Funktionen. Gränzwerthe. Differentialquotient für Funktionen einer einzigen unabhängig Veränderlichen.

§. 1.

Zwei Begriffe müssen wir vor Allem uns klar machen, den der Funktion und den der Gränze oder des Gränzwerthes. Ueber beide wollen wir uns desshalb zunächst etwas näher umsehen.

Unter Funktion einer Grösse x versteht man in der Mathematik jede Grösse, deren Werth abhängt vom Werthe eben jener Grösse x, so dass also der Werth der zweiten Grösse erst gefunden werden kann, wenn man den der ersten kennt. So ist also x^5 eine Funktion von x, indem zunächst x bekannt seyn muss und erst dann x^5 gefunden werden kann; $\log a$ ist dessgleichen eine Funktion von a u. s. w. Die Grösse, welche bekannt seyn muss, damit der Werth der von ihr abhängenden gefunden werden kann, ist in der Regel willkürlich, d. h. man kann ihr ganz beliebige Werthe beilegen; sie heisst desshalb gewöhnlich die unabhängig Veränderliche, und zwar das Letztere, weil man sich ihren Zustand als veränderlich denkt, oder, was dasselbe ist, annimmt, dass sie beliebig viele verschiedene Werthe annehmen kann. Man könnte sie eben so wohl auch Urgrösse oder Stammgrösse u. s. w. nennen, da diese Namen dieselbe Sache bezeichnen würden. Die Funktion selbst heisst, im Gegensatz hiezu, die abhängig Veränderliche. So ist, wenn $y = \sin x$, x die unabhängig Veränderliche, y (d. h. $\sin x$) die abhängig Veränderliche; $5x^4 - 3x^2 + 7$ ist abhängig veränderlich, x dabei unabhängig. Es ist wohl leicht begreiflich, dass die Bezeichnung eine unwesentliche Sache ist. So ist z^8 eine Funktion von z, wobei eben z die unabhängig Veränderliche ist; $5\sin v - 9\cos v + 3\log v$ eine Funktion der (unabhängig gedachten) Veränderlichen v, u. s. w.

Es ist aber auch wohl denkbar, dass diejenige Grösse, von der der Werth einer andern abhängt, selbst wieder abhängig ist vom Werthe einer dritten Grösse. So ist $\log \sin x$ zunächst eine Funktion von $\sin x$, welch letztere Grösse selbst wieder von x abhängt. Ist allgemein y eine Funktion von x, so ist z. B. $19y^4 - 7y^3 + 8y$ eine Funktion von y, die also mittelbar von x abhängt. Solche Funktionen pflegt man Funktionen von Funktionen zu nennen. Bekanntlich bezeichnet man eine beliebige Funktion von

x mit $f(x)$, $F(x)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ u. s. f., so dass also $f(y)$ eine Funktion von y, $F(z)$ eine solche von z, ... bezeichnet. Ist nun $y=\varphi(x)$, $z=f(y)$, so ist z eine Funktion von einer Funktion von x, die man auch mit $f(\varphi(x))$ bezeichnen könnte. Wie man hier weiter gehen kann, ist klar. Eben so ist klar, dass wenn zwischen den Grössen y und x die Beziehung $y=f(x)$ obwaltet, man nicht nur y als Funktion von x ansehen kann, sondern auch wohl berechtigt ist, x als Funktion von y anzusehen. So folgt aus $y=x^4$ auch $x=\sqrt[4]{y}$ und es ist jetzt x als Funktion von y angesehen, während zuerst y als Funktion von x musste betrachtet werden. Folgt aus $y=f(x)$ die Gleichung $x=F(y)$, so sagt man, $F(y)$ sey die umgekehrte Funktion von $f(x)$, und es muss $F(f(x))$ geradezu x geben.

Die Mathematik hat es in der Regel nur mit stetigen Funktionen zu thun, und sie versteht darunter diejenigen Funktionen, die sich nur um verschwindend kleine Grössen ändern, wenn der Werth der Urgrösse sich auch nur um eine solche Grösse ändert. Die gewöhnlichen Funktionen der niedern Analysis sind alle in diesem Falle und nur für spezielle Werthe der Urgrösse machen sie davon eine Ausnahme. Man kann das eben Gesagte auch in folgender Weise darstellen. Ist $f(x)$ eine Funktion von x, und man ändert den Werth von x, lässt ihn also in $x+\Delta x$ übergehen, wo Δx, den Bezeichnungen der Differenzenrechnung gemäss,* den (ganz beliebigen) Zuwachs von x bedeutet, den wir uns, der Einfachheit wegen, positiv denken wollen, so wird $f(x)$ in $f(x+\Delta x)$ übergehen, wo also $f(x+\Delta x)$ den Werth der Funktion $f(x)$ bedeutet, den man erhält, wenn man $x+\Delta x$ an die Stelle von x setzt. Die Aenderung, welche $f(x)$ hiedurch erleidet, ist $f(x+\Delta x)-f(x)$ und wenn nun diese mit unbeschränkt kleiner werdendem Δx ebenfalls fortwährend kleiner wird, oder besser gesagt, für Werthe von Δx, die der Null beliebig nahe kommen, ebenfalls Werthe erhält, die der Null beliebig nahe kommen, so ist $f(x)$, für den betrachteten Werth von x, stetig. So ist x^3 für jeden Werth von x stetig. Denn es ist

$$(x+\Delta x)^3-x^3=3x^2\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3.$$

Lässt man hier Δx der Null nahe genug kommen, so wird die Grösse zweiter Seite ebenfalls Null nahe kommen, was unsern Satz beweist. $\frac{1}{x^2}$ ist stetig für alle Werthe von x, ausser für $x=0$; $\operatorname{tg} x$ ist stetig, ausser wenn $x=\frac{\pi}{2}$ u. s. w., in welchen Fällen $\frac{1}{x^2}$, $\operatorname{tg} x$ unendlich gross werden, d. h. jede Grössenschranke überschreiten. Unstetig heissen wir nun eine Funktion, wenn sie nicht stetig ist, d. h. also, wenn die Differenz $f(x+\Delta x)-f(x)$ mit unendlich abnehmendem Δx sich nicht Null beliebig nähert. In dieser Lage ist z. B. $\frac{1}{x}$ für $x=0$. Denn es ist $\frac{1}{x+\Delta x}-\frac{1}{x}=\frac{x-(x+\Delta x)}{x(x+\Delta x)}$

---

* Man vergleiche damit meine „Grundzüge der algebraischen Analysis". (Karlsruhe, Braun.) S. 79 ff.

$= \frac{-\Delta x}{x^2 + x\Delta x} = \frac{-1}{\frac{x^2}{\Delta x} + x}$. Da aber $x = 0$, so wird, für ein beliebiges Δx, diese Grösse nicht angebbar, oder, wie man sich ausdrückt, unendlich gross (∞), und es ist daher unmöglich, von ihr zu sagen, sie nähere sich mit abnehmendem Δx der Null. Betrachten wir den Quotienten

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \qquad (1)$$

und lassen in demselben (das beliebig gedachte) Δx mehr und mehr gegen o gehen, so wird, im Falle dieser Quotient (1) sich dann mehr und mehr einer bestimmten endlichen Grösse annähert, nothwendig $f(x)$ stetig seyn (für diesen Werth von x). Denn würde $f(x + \Delta x) - f(x)$ mit unbegränzt abnehmendem Δx nicht selbst unbegränzt abnehmen, sich vielmehr einer endlichen (oder gar unendlichen) Grösse nähern, so müsste nothwendig, bei sehr kleinen Werthen von Δx, der Bruch (1), dessen Zähler endlich wäre, sehr gross seyn, so dass mit unendlich abnehmendem Δx er sich nothwendig einem unendlich grossen Werthe annähern müsste. Ist also unsere Voraussetzung, (1) nähere sich einem endlichen Werthe, wenn Δx sich o nähert, richtig, so kann $f(x)$ nur stetig seyn. Umgekehrt ist der Satz nicht immer richtig. So ist z. B. $\sqrt{x}$ für $x = 0$ noch stetig, da $\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}$ für $x = 0$ zu $\sqrt{\Delta x}$ wird, und mit unendlich abnehmendem Δx auch unendlich abnimmt; dagegen ist $\frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}$ für $x = 0$ gleich $\frac{\sqrt{\Delta x}}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt{\Delta x}}$ und wird mit unendlich abnehmendem Δx immer grösser werden. Trotzdem nun, dass der ausgesprochene Satz nicht umgekehrt werden kann, bleibt er dennoch von grosser Wichtigkeit, da der direkte Satz selbst in den meisten Fällen genügt.

Wir sind bei unsern Untersuchungen von selbst auf den zweiten Begriff, den des Gränzwerthes gekommen. Wir haben nämlich gesagt, wenn der Bruch (1) mit unbeschränkt abnehmendem Δx sich einer endlichen Grösse mehr und mehr nähere, so sei $f(x)$ stetig. Diese Grösse nun, der sich (1) nähert, nennen wir die Gränze oder den Gränzwerth von (1). Ueberhaupt verstehen wir also unter Gränzwerth einer von α abhängenden Grösse denjenigen Werth, dem sich dieselbe mehr und mehr nähert, je mehr α einer bestimmten Grösse a sich nähert. Letztere Grösse a ist gewöhnlich o. So ist z. B. der Gränzwerth von $\frac{1}{x + \alpha}$ offenbar $\frac{1}{x + a}$ (oder $\frac{1}{x}$, wenn α sich o nähert). Wir bezeichnen dies durch Vorsetzen des Zeichen Gr., als Anfangsbuchstaben des Wortes „Gränze", und werden dabei in der Regel annehmen, wenn es nicht ausdrücklich anders gesagt ist, die sich ändernde Grösse gehe gegen o. In diesem Sinne ist also:

$$\text{Gr.} \frac{1}{(x + \alpha)^3} = \frac{1}{x^3}, \ \text{Gr.}\, x^\alpha = 1, \ \text{Gr.} \log. \frac{(x + \alpha)}{x} = 0 \text{ u. s. w.}$$

Wir haben hier die beliebig abnehmende Grösse mit α bezeichnet; in (1) wäre sie Δx u. s. w. Der bereits oben mehrfach ausgesprochene Satz würde also jetzt heissen: Ist

$$\text{Gr.}\left(\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\right) \qquad (2)$$

endlich, so ist f (x) stetig.

Es kann sich auch ereignen, dass die sich ändernde Grösse mehr und mehr anwächst, oder, wie man alsdann sagt, unendlich gross wird. Auch in diesem Sinne lässt sich von einer Gränze sprechen, und man sollte allerdings ein etwas verändertes Zeichen brauchen. Da wir in der Regel nicht in diese Lage kommen werden, so wollen wir davon absehen und nur besonders daran erinnern, wenn der Fall eintritt. Für unendlich wachsende (positive oder negative) α wäre also

$$\text{Gr.}\frac{1}{\alpha}=0,\ \text{Gr.}\frac{\alpha+x}{\alpha}=1,\ \text{Gr.}\frac{3\alpha+5x}{2\alpha}=\frac{3}{2}\ \text{u. s. w.}$$

Wir wollen nun zunächst zur Aufsuchung einiger Gränzwerthe übergehen, die für unsere nachfolgenden Untersuchungen von Wichtigkeit sind.

§. 2.

I. Sey α ein zu einem Halbmesser = 1 gehöriger positiver Kreisbogen, und man soll

$$\text{Gr.}\frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

suchen. Diese Aufgabe lässt sich auf zweierlei Weise lösen. Einmal nämlich beweist man in der Geometrie, dass in einem Kreise die Sehne kleiner ist als der zugehörige Bogen, während die Tangente grösser ist. Daraus folgt, dass

$$\alpha > \sin\alpha,\ \alpha < \operatorname{tg}\alpha;\ 1 > \frac{\sin\alpha}{\alpha},\ 1 < \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\alpha}\ \left(\text{für } \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$$

so dass also, da $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\alpha}=\frac{\sin\alpha}{\alpha\cos\alpha}$, auch $\frac{\sin\alpha}{\alpha\cos\alpha}>1$, $\frac{\sin\alpha}{\alpha}>\cos\alpha$ und mithin der Werth der Grösse $\frac{\sin\alpha}{\alpha}$ immer kleiner ist als 1 und grösser als $\cos\alpha$. Lässt man nun α unbegränzt abnehmen, so wird $\cos\alpha$ mehr und mehr gegen 1 gehen, also, da $\frac{\sin\alpha}{\alpha}$ immer zwischen 1 und $\cos\alpha$ liegt, so muss mit solchem abnehmenden α diese Grösse auch gegen 1 gehen, da sie schliesslich zwischen 1 und 1 liegen wird. Man hat also

$$\text{Gr.}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1.$$

Man kann denselben Satz auch in anderer Weise beweisen. Nach §. 16 meines „Handbuchs der ebenen und sphärischen Trigonometrie“ (Stuttgart, Metzler) ist immer $\left(\text{für } \alpha < \frac{\pi}{4}\right)$

$$\sin\alpha < \alpha,\ \sin\alpha > \alpha - \frac{1}{6}\alpha^3$$

d. h. immer

$$\frac{\sin\alpha}{\alpha} < 1,\ \frac{\sin\alpha}{\alpha} > 1 - \frac{1}{6}\alpha^2.$$

Lässt man nun α unbegränzt abnehmen, so wird $1-\frac{1}{6}\alpha^2$ mehr und mehr sich 1 nähern, so dass also 1 und $1-\frac{1}{6}\alpha^2$ sich mehr und mehr gleich

werden, und also, da $\frac{\sin\alpha}{\alpha}$ immer zwischen diesen beiden Grössen liegt, wird auch $\frac{\sin\alpha}{\alpha}$ sich unbegränzt 1 nähern. Da $\frac{\sin(-\alpha)}{-\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\alpha}$, so ist auch $\text{Gr.}\ \frac{\sin(-\alpha)}{-\alpha} = 1$.

II. Man soll

$$\text{Gr.}\ (1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$$

finden. Setzen wir $\alpha = \frac{1}{m}$, also $\frac{1}{\alpha} = m$, so wird mit unendlich abnehmendem α die Grösse m unendlich wachsen und umgekehrt. Kennt man also $\text{Gr.}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ für ein unendlich wachsendes m, so kennt man damit auch $\text{Gr.}\ (1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ für ein unendlich abnehmendes α. Wir wollen nun, da es uns bequemer ist, das Erstere suchen. Zunächst beachten wir, dass allgemein, wenn n eine positive ganze Zahl:

$$\frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b} = a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \ldots + b^n,$$

wie man durch Division ganz unmittelbar findet. Ist nun $a > b$, beide positiv, so ist sicherlich

$$a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \ldots + b^n < a^n + a^n + a^n + \ldots + a^n$$
$$\text{d. h.} < (n+1)\,a^n,$$

und mithin ist dann $\frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b} < (n+1)a^n$, $a^{n+1} - b^{n+1} < (n+1)\,a^n(a-b)$.

Hieraus folgt, dass $a^{n+1} - (n+1)\,a^n(a-b) < b^{n+1}$,

d. h. $a^n[a-(n+1)(a-b)] < b^{n+1}$, oder $a^n[(n+1)b - na] < b^{n+1}$. (3)

Denken wir uns nun in $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ die Zahl m ganz und positiv, setzen nach einander $m = 1, 2, 3, \ldots n, \ldots$ so erhalten wir die Reihe

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)^1, \left(1+\frac{1}{2}\right)^2, \left(1+\frac{1}{3}\right)^3, \ldots, \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}, \ldots \quad (4)$$

in welcher jedes folgende Glied grösser ist, als das vorhergehende. Um diese Behauptung zu rechtfertigen, setzen wir in (3): $a = 1+\frac{1}{n}$, $b = 1+\frac{1}{n+1}$, so ist $a > b$, also

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left[(n+1)\left(1+\frac{1}{n+1}\right) - n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right] < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1},$$

d. h. $$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1},$$

was die Behauptung rechtfertigt. Die Reihe (4) ist also eine steigende.

Setzt man in (3) aber $a = 1+\frac{1}{2n}$, $b = 1$, so ist wieder $a > b$, also

$$\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n\left[n+1-n\left(1+\frac{1}{2n}\right)\right] < 1^{n+1},$$

d. h. $$\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n \cdot \frac{1}{2} < 1, \quad \left(1+\frac{1}{2n}\right)^n < 2,$$

woraus, indem man quadrirt: $$\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n} < 4.$$

Da nun die dem Gliede $\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}$ vorangehenden Glieder der Reihe (4) alle kleiner sind, als dasselbe, so folgt leicht, dass kein Glied der Reihe (4), man mag sie fortsetzen, so weit man will, gleich oder grösser als 4 seyn kann. Da ferner das erste $= 2$, so liegt ein jedes zwischen 2 und 4. Daraus folgt offenbar, dass mit unendlich gross werdendem positiven ganzen m die Grösse $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ sich einer zwischen 2 und 4 liegenden Zahl nähern werde, die wir mit e bezeichnen wollen.

Ist m nicht eine ganze Zahl, sondern beliebig positiv, so sei $m = n + \alpha$, wo $\alpha < 1$, aber positiv, und n eine ganze Zahl. Alsdann ist

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = \left(1+\frac{1}{m}\right)^{n+\alpha},$$

und da $m > n$, aber $m < n + 1$, so ist $1+\frac{1}{m} < 1+\frac{1}{n}$, aber $> 1+\frac{1}{n+1}$,

also $$\left(1+\frac{1}{m}\right)^{n+\alpha} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\alpha} \text{ d. h. } < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha,$$

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^{n+\alpha} > \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+\alpha} \text{ d. h. } > \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{\alpha-1}.$$

Demnach liegt $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ immer zwischen $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha$ und $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{\alpha-1}$; lässt man aber m, also auch n und $n+1$ immer mehr wachsen, so nähern $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ und $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$, dem Obigen gemäss, der Zahl e; $\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha$, $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{\alpha-1}$ aber ganz offenbar der Zahl 1, so dass also beide obigen Grössen sich e nähern, mithin auch $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$, das immer zwischen beiden liegt.

Ist endlich m negativ $= -r$, so ist

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = \left(1-\frac{1}{r}\right)^{-r} = \left(\frac{r-1}{r}\right)^{-r} = \left(\frac{r}{r-1}\right)^r = \left(1+\frac{1}{r-1}\right)^r$$
$$= \left(1+\frac{1}{r-1}\right)^{r-1} \left(1+\frac{1}{r-1}\right).$$

Wird nun m unendlich gross, so wird es auch $r-1$; $\left(1+\frac{1}{r-1}\right)^{r-1}$

nähert sich e, $1+\frac{1}{r-1}$ aber 1, also nähert sich $\left(1-\frac{1}{r}\right)^{-r}$, d. h. $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ der Zahl e.

Daraus folgt, dass für ein (positives oder negatives) unendlich grosses m:

$$\text{Gr.}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = e, \text{ also Gr. } (1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e, \quad (5)$$

wenn α unendlich abnimmt.

Einen andern Beweis desselben Satzes findet man in meinen „Grundzügen" S. 6 ff. Will man den Werth von

$$\text{Gr.}\,(1+\alpha x)^{\frac{1}{\alpha}}$$

erhalten, so setze man $\alpha x = \varepsilon$, $\alpha = \frac{\varepsilon}{x}$, so wird mit unbegränzt abnehmendem α auch ε unbegränzt abnehmen. Alsdann ist

$$\text{Gr.}\,(1+\alpha x)^{\frac{1}{\alpha}} = \text{Gr.}\,(1+\varepsilon)^{\frac{x}{\varepsilon}} = \text{Gr.}\left((1+\varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}}\right)^x,$$

und da, nach dem Obigen Gr. $(1+\varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}} = e$ für jedes abnehmende ε (ob positiv oder negativ), so wird, da sich x nicht ändert mit ε:

$$\text{Gr.}\,(1+\alpha x)^{\frac{1}{\alpha}} = e^x \quad (6)$$

seyn.

Die Zahl e ist zur Grundzahl der natürlichen Logarithmen gemacht worden, die wir durch das Zeichen l bezeichnen wollen. Ist also

$$l(x) = z, \text{ so ist } x = e^z;$$

daraus folgt auch, wenn man die gewöhnlichen Logarithmen durch log bezeichnet: $\log x = z \log e$, d. h. $z = \frac{\log x}{\log e}$, oder $l(x) = \frac{\log x}{\log e}$.

Umgekehrt ist auch $\log x = \frac{l(x)}{l(a)}$,

wenn a die Grundzahl der gewöhnlichen Logarithmen ist. (Der genauere Werth von e findet sich in §. 18. III.)

Ehe wir weiter gehen, wollen wir noch einige Sätze über Gränzwerthe beifügen, die uns im Folgenden von Nutzen seyn können.

III. Sey P eine Funktion von α, dessgleichen Q und R; sey ferner, entweder immer, oder doch für Werthe von α, die wenig verschieden sind von einem bestimmten Werthe a:

$$Q > P > R, \text{ d. h. } P < Q \text{ und } P > R,$$

ferner für Werthe von α, die sich a unbegränzt nähern

$$\text{Gr. } Q = \text{Gr. } R,$$

so ist auch

$$\text{Gr. } P = \text{Gr. } Q = \text{Gr. } R.$$

Wir haben von diesem Satze bereits mehrfach Gebrauch gemacht, wenn $a = 0$ und wollen ihn doch noch förmlich beweisen. Da $P < Q$, so kann man also setzen $P = Q - \varrho$, und da $P > R$: $P = R + \varrho'$, wo ϱ und ϱ' positive

Grössen sind. Daraus folgt, dass $Q = P + \varrho$, $R = P - \varrho'$, mithin $Q - R = \varrho + \varrho'$. Lässt man nun α unbegränzt gegen a gehen, so wird mehr und mehr $Q = R$, also $Q - R = 0$, d. h. es ist Gr. $(\varrho + \varrho') = 0$. Da aber ϱ und ϱ' positiv sind, so kann ihre Summe nur dann gegen Null gehen, wenn jede dieser Grössen selbst gegen Null geht, so dass also Gr. $\varrho = 0$, Gr. $\varrho' = 0$, und mithin, da $P = Q - \varrho$, $P = R + \varrho'$, so wird mit der Näherung von α gegen a, auch P sich Q oder R unbegränzt nähern, was eben in der Behauptung ausgesprochen ist.

IV. Seyen wieder P, Q, R, ... Funktionen von α, und es sey für unendlich abnehmende (d. h. gegen Null gehende) α:

$$\text{Gr.}\, P = p, \quad \text{Gr.}\, Q = q, \quad \text{Gr.}\, R = r, \ldots,$$

ferner seyen a, b, ... Grössen, die sich nicht mit α ändern, so ist

$$\text{Gr.}\,(P + a) = p + a, \quad \text{Gr.}\,(b P + a) = b p + a, \quad \text{Gr.}\,(a P + b Q + c R + \ldots) = a p + b q + c r \ldots, \quad \text{Gr.}\,(P Q) = p q, \quad \text{Gr.} \left(\frac{P}{Q}\right) = \frac{p}{q}, \quad \text{Gr.}\, l(P) = l(p), \quad \text{Gr.}\, P^Q = p^q, \text{ u. s. w.}$$

Der Beweis dieser Sätze ist ein sehr einfacher. Da Gr. $P = p$, so folgt daraus, dass wenn α nahe an 0 ist, auch P nahe an p ist, man also setzen kann $P = p + \varrho$, wo ϱ eine Grösse ist, die immer näher an 0 kommt, je näher α selbst gegen Null geht. Eben so $Q = q + \varrho'$, $R = r + \varrho''$, ..., wo ϱ', ϱ'', ... ebenfalls mehr und mehr sich der Null nähern, je mehr α sich Null nähert. Daraus folgt:

$$P + a = p + a + \varrho, \quad b P + a = b p + a + b\varrho, \quad a P + b Q + c R + \ldots = a p + b q + c r + \ldots + a\varrho + b\varrho' + c\varrho'' + \ldots, \quad PQ = (p + \varrho)(q + \varrho') = pq + p\varrho' + q\varrho + \varrho\varrho', \quad \frac{P}{Q} = \frac{p + \varrho}{q + \varrho'},$$
$$l(P) = l(p + \varrho), \quad P^Q = (p + \varrho)^{q + \varrho'} = (p + \varrho)^q\,(p + \varrho)^{\varrho'}, \ldots\ldots$$

Lässt man nun hier α gegen Null gehen, also ϱ, ϱ', ϱ'' ebenfalls gegen Null, so wird $p + a + \varrho$ gegen $p + a$ gehen (wo natürlich p nicht mehr von α abhieng); $bp + a + b\varrho$ gegen $bp + a$, indem sicher auch $b\varrho$ zu 0 werden wird; $ap + bq + cr + \ldots + a\varrho + b\varrho' + c\varrho'' + \ldots$ gegen $ap + bq + cr + \ldots$; $p\varrho + p\varrho' + q\varrho + \varrho\varrho'$ ferner gegen pq, indem $p\varrho'$, $q\varrho$, $\varrho\varrho'$ zu Null werden; $\frac{p + \varrho}{q + \varrho'}$ wird zu $\frac{p}{q}$ werden und eben so $l(p + \varrho)$ zu $l(p)$; $(p + \varrho)^q$ wird, da p und q sich nicht ändern, nothwendig zu p^q, und $(p + \varrho)^{\varrho'}$ zu $p^0 = 1$ werden, also $(p + \varrho)^q\,(p + \varrho)^{\varrho'}$ zu $p^q \cdot 1 = p^q$, ..., woraus nun ganz unmittelbar alle behaupteten Sätze fliessen.

§. 3.

Der bereits in §. 1 mehrfach betrachtete Werth

$$\text{Gr.}\, \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \qquad (2)$$

(für ein unendlich abnehmendes Δx) heisst der Differentialquotient von f (x). Er ist der Gränzwerth des Differenzenquotienten $\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$, und wird durch die Zeichen

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x}, \ \frac{\partial}{\partial x} f(x), \ f'(x) \qquad (7)$$

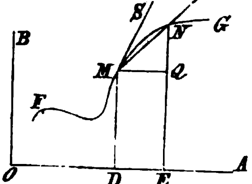
bezeichnet, wovon das letztere von **Lagrange** herrührt. Ist $y = f(x)$, so wird die Differenz $f(x + \Delta x) - f(x)$, gemäss den Bezeichnungen der Differenzenrechnung, durch Δy bezeichnet werden, und man hat auch

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \text{Gr.} \frac{\Delta y}{\Delta x}, \qquad (8)$$

als Erklärung des **Differentialquotienten von y nach x**. Das Zeichen $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial f(x)}{\partial x}$ darf nicht als ein Bruch angesehen werden, dessen Zähler etwa ∂y, und dessen Nenner ∂x wäre; es **bedeutet** blos den Differentialquotienten (∂) von y, wenn x die unabhängige Veränderliche ist, wesshalb das ∂x unten beigefügt ist.

Die Bedeutung der Grösse $\frac{\partial y}{\partial x}$ tritt auch klar hervor, wenn wir ihre geometrische Darstellung ins Auge fassen. Sey (Fig. 1) FG eine krumme Linie, OA und OB die rechtwinklichen Koordinatenaxen, so wird die Ordinate MD $= y$ eine Funktion der Abszisse OD $= x$ seyn. Sey nun DE $= \Delta x$, also EN $= y + \Delta y$ der neue Werth der Ordinate (d. h. wenn $y = f(x)$, so ist $y + \Delta y$ oder EN $= f(x + \Delta x)$), und man ziehe durch die Punkte M und N eine Gerade MN, so wird dieselbe mit der Abszissenaxe OA, oder vielmehr mit der mit OA parallelen MQ einen Winkel NMQ machen, für den (wegen NQ $=$ EN $-$ MD $= \Delta y$)

Fig. 1.



$$\text{tg NMQ} = \frac{NQ}{MQ} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Lässt man Δx abnehmen, d. h. E gegen D rücken, so rückt N gegen M und die Gerade MN nähert sich mehr und mehr einer bestimmten Lage MS, welch letztere zum Vorschein kommt, wenn N an M angerückt ist. Der Winkel SMQ ist dann gegeben durch die Gleichung

$$\text{tg SMQ} = \text{Gr.} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\partial y}{\partial x},$$

so dass letztere Grösse eine vollkommen klare geometrische Bedeutung hat. Die Gerade MS heisst in der Geometrie die berührende Gerade oder Tangente.

Anmerkung. Man pflegt zuweilen das Gesagte auch in etwas anderer Form auszusprechen. Versteht man nämlich unter **unendlich kleiner Grösse** eine Grösse, deren Werth kleiner ist, als jede auch noch so kleine Grösse, so kann man sagen, dass $\frac{\partial y}{\partial x}$ der Werth von $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ sey, wenn Δx (also auch Δy) unendlich klein ist, oder dass $\frac{\partial f(x)}{\partial x}$ der Werth des Bruches $\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ für ein unendlich kleines Δx sey. Eben so wäre dann in Fig. 1 MS diejenige Gerade, die durch zwei unendlich nahe Punkte der krummen Linie FG gelegt würde. Man sieht leicht, dass die eben angegebene Fassung nur der Form nach verschieden ist von der früheren, im Wesen aber mit derselben übereinkommt. Will man sich derselben bedienen, so ist die Ableitung gleich scharf und man muss nur beachten, dass eben „unendlich kleine" Grössen die „Gränze" aller Grössen sind, aber nicht geradezu Null gesetzt.

werden können, da Null gar keine Grösse mehr ist. Die Gränze einer Fläche ist zwar wohl nicht mehr angebbar, sie gehört aber doch zur Fläche und ist eben desshalb nicht als gar Nichts = Null anzusehen; so ist es mit den unendlich kleinen Grössen. Diese liegen unsern Anschauungen und Begriffen des Stetigen und Ausgedehnten wesentlich zu Grunde. Die Zeit verfliesst in unendlich kleinen Momenten; ein bewegter Punkt geht von Lage zu Lage durch unendlich kleine Zwischenstufen über u. s. w. Von dieser Anschauung rührt auch der Begriff des Differentials her. Da nämlich $\varDelta y = \frac{\varDelta y}{\varDelta x} \varDelta x$, und für unendlich kleine $\varDelta x$: $\frac{\varDelta y}{\varDelta x} = \frac{\partial y}{\partial x}$, so wird, wenn man das unendlich kleine $\varDelta x$ mit dx, das ebenfalls unendlich kleine $\varDelta y$ (indem y eine stetige Funktion von x ist, §. 1) mit dy bezeichnet, aus dieser Gleichung folgen:

$$dy = \frac{\partial y}{\partial x} dx,$$

wo nun dy das Differential, d. h. die unendlich kleine Zunahme von y, bezeichnet. Wir werden von diesen Bezeichnungen in der Regel keinen Gebrauch machen und wollen uns dabei also auch nicht weiter aufhalten.

Der Werth (2) oder (8) lässt sich bei einigen Funktionen leicht angeben, wie wir dies nun betrachten wollen.

I. Sey $y = x$, so ist $y + \varDelta y = x + \varDelta x$, also $\varDelta y = \varDelta x$ und $\frac{\varDelta y}{\varDelta x} = \frac{\varDelta x}{\varDelta x} = 1$. Da nun diese Grösse sich nicht mehr ändern kann, d. h. **konstant** ist, so ist gewiss auch Gr. $\frac{\varDelta y}{\varDelta x} = 1$, d. h.

$$\frac{\partial x}{\partial x} = 1.$$

II. Sey $y = l(x)$, also $y + \varDelta y = l(x + \varDelta x)$, $\varDelta y = l(x + \varDelta x) - l(x) = l\left(\frac{x + \varDelta x}{x}\right) = l\left(1 + \frac{\varDelta x}{x}\right)$, mithin $\frac{\partial y}{\partial x} = \text{Gr.} \frac{l\left(1 + \frac{\varDelta x}{x}\right)}{\varDelta x} = \text{Gr.}\, l\left(1 + \frac{\varDelta x}{x}\right)^{\frac{1}{\varDelta x}}$. Aber nach §. 2, Formel (6) ist, wenn dort $\alpha = \varDelta x$ und $\frac{1}{x}$ für x gesetzt wird: Gr. $\left(1 + \frac{\varDelta x}{x}\right)^{\frac{1}{\varDelta x}} = e^{\frac{1}{x}}$, also gemäss §. 2, IV:

Gr. $l\left(1 + \frac{\varDelta x}{x}\right)^{\frac{1}{\varDelta x}} = l e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$, indem $l(e) = 1$. Man hat also

$$\frac{\partial\, l(x)}{\partial x} = \frac{1}{x}.$$

III. Sey $y = \sin x$, also $y + \varDelta y = \sin(x + \varDelta x)$, $\varDelta y = \sin(x + \varDelta x) - \sin x = 2 \cos(x + \frac{1}{2} \varDelta x) \sin \frac{1}{2} \varDelta x$. * Demgemäss:

$\frac{\partial y}{\partial x} = \text{Gr.} \frac{2 \cos(x + \frac{1}{2}\varDelta x). \operatorname{Sin} \frac{1}{2}\varDelta x}{\varDelta x} = \text{Gr.} \cos(x + \frac{1}{2}\varDelta x). \frac{\operatorname{Sin} \frac{1}{2}\varDelta x}{\frac{1}{2}\varDelta x}$ Da aber Gr. $\cos(x + \frac{1}{2}\varDelta x) = \cos x$, Gr. $\frac{\sin \frac{1}{2}\varDelta x}{\frac{1}{2}\varDelta x} = 1$ (§. 2. I.), so folgt hieraus nach §. 2. IV.: Gr. $\frac{\varDelta y}{\varDelta x} = \cos x$,

---

* §. 14, Formeln (25) meines „Handbuchs der ebenen und sphärischen Trigonometrie“.

d. h. $$\frac{\partial \sin x}{\partial x} = \cos x.$$

IV. Sey $y = \cos x$, so ist $y + \Delta y = \cos(x + \Delta x)$, $\Delta y = \cos(x + \Delta x) - \cos x = -2 \sin(x + \frac{1}{2}\Delta x) \sin\frac{1}{2}\Delta x$, also $\frac{\partial y}{\partial x} = \text{Gr.} \frac{-2 \sin(x + \frac{1}{2}\Delta x) \sin\frac{1}{2}\Delta x}{\Delta x}$ $= \text{Gr.} - \sin(x + \frac{1}{2}\Delta x) \cdot \frac{\sin\frac{1}{2}\Delta x}{\frac{1}{2}\Delta x}$, woraus ganz in derselben Weise, wie so eben, folgt: $$\frac{\partial \cos x}{\partial x} = -\sin x.$$

§. 4.

Wir wollen nun zunächst einige allgemeine Sätze nachweisen, die uns bei der Differentiation der Funktionen die wichtigsten Dienste leisten werden.

I. Sey C eine Grösse, deren Werth unabhängig ist vom Werthe von x, d. h. eine Konstante nach x, so ist
$$\frac{\partial C}{\partial x} = 0.$$

Denn will man jetzt setzen $f(x) = C$, so ist auch $f(x + \Delta x) = C$, da C sich ja nicht ändert mit x, demnach ist $f(x + \Delta x) - f(x) = 0$, d. h. $\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = 0$, also auch $\text{Gr.} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = 0$, woraus der behauptete Satz folgt.

II. Ist y eine beliebige Funktion von x, so ist
$$\frac{\partial (y + C)}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial x}.$$

Denn ist $f(x) = y + C$, so ist $f(x + \Delta x) = y + \Delta y + c$, also $f(x + \Delta x) - f(x) = \Delta y$, woraus
$$\frac{\partial (y + C)}{\partial x} = \text{Gr.} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \text{Gr.} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\partial y}{\partial x}.$$

So ist
$$\frac{\partial (\sin x + 12)}{\partial x} = \cos x, \quad \frac{\partial [-3 + l(x)]}{\partial x} = \frac{1}{x}, \quad \frac{\partial\, l(5x)}{\partial x} = \frac{\partial [l(5) + l(x)]}{\partial x} = \frac{1}{x}.$$

III. Dessgleichen ist $$\frac{\partial (C y)}{\partial x} = C \frac{\partial y}{\partial x}.$$

Denn wenn $f(x) = C y$, so ist $f(x + \Delta x) = C(y + \Delta y)$, $f(x + \Delta x) - f(x) = C \Delta y$, also
$$\frac{\partial (C y)}{\partial x} = \text{Gr.} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \text{Gr.} \frac{C \Delta y}{\Delta x} = C \frac{\partial y}{\partial x}.$$

So wäre
$$\frac{\partial (15 \cos x)}{\partial x} = -15 \sin x, \quad \frac{\partial (5\, l(x))}{\partial x} = \frac{5}{x}, \quad \frac{\partial\, l(x^4)}{\partial x} = \frac{\partial [4\, l(x)]}{\partial x} = \frac{4}{x}, \quad \frac{\partial (-13 x)}{\partial x} = -13.$$

Ist $\log x = z$, wo a die Grundzahl des Logarithmensystemes seyn soll, so ist $x = a^z$, also $l(x) = z\, l(a)$, $z = \frac{l(x)}{l(a)}$, d. h. $\log x = \frac{l(x)}{l(a)}$, also $\frac{\partial \log x}{\partial x} = \frac{1}{l(a)} \frac{\partial\, l(x)}{\partial x} = \frac{1}{l(a)} \cdot \frac{1}{x}$. Zugleich ist übrigens auch $a = e^{l(a)}$, also $\log a = l(a) \log e$, oder da $\log a = 1$: $\frac{1}{l(a)} = \log e$, so dass also $\frac{\partial \log x}{\partial x} = \frac{1}{l(a)} \cdot \frac{1}{x} = \frac{\log e}{x}$.

IV. Sind y und z Funktionen von x, so ist

$$\frac{\partial (y+z)}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial (y-z)}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial x}.$$

Denn sey $f(x) = y + z$, so ist $f(x + \Delta x) = y + z + \Delta y + \Delta z$, $f(x + \Delta x) - f(x) = \Delta y + \Delta z$, also

$$\frac{\partial (y+z)}{\partial x} = \text{Gr.} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \text{Gr.} \frac{\Delta y + \Delta z}{\Delta x} = \text{Gr.} \left(\frac{\Delta y}{\Delta x} + \frac{\Delta z}{\Delta x}\right) = \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial x}.$$

Eben so wird der zweite Satz bewiesen. Eine Verbindung der Sätze III und IV führt leicht zu folgendem:

Sind $y, z, u, \ldots$ beliebige Funktionen von x; $a, b, c, \ldots$ beliebige Konstanten, so ist $\frac{\partial (a y + b z + c u + \ldots)}{\partial x} = a \frac{\partial y}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial x} + c \frac{\partial u}{\partial x} + \ldots$

So ist

$$\frac{\partial (8 \sin x + 7 \cos x)}{\partial x} = 8 \frac{\partial \sin x}{\partial x} + 7 \frac{\partial \cos x}{\partial x} = 8 \cos x - 7 \sin x,$$

$$\frac{\partial [-11 x + 3 l(x)]}{\partial x} = -11 + \frac{3}{x}, \quad \frac{\partial [9 \sin x - 2 l(x^3)]}{\partial x} = 9 \cos x - \frac{6}{x}.$$

V. Seyen wieder y und z Funktionen von x, so ist

$$\frac{\partial (y z)}{\partial x} = y \frac{\partial z}{\partial x} + z \frac{\partial y}{\partial x}.\text{*}$$

Denn sey $f(x) = y z$, so ist $f(x + \Delta x) = (y + \Delta y)(z + \Delta z) = y z + y \Delta z + z \Delta y + \Delta y \Delta z$, $f(x + \Delta x) - f(x) = y \Delta z + z \Delta y + \Delta y \Delta z$, mithin $\frac{\partial (y z)}{\partial x} = \text{Gr.} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \text{Gr.} \frac{y \Delta z + z \Delta y + \Delta y \, \Delta z}{\Delta x}$ $= \text{Gr.} \left(y \frac{\Delta z}{\Delta x} + z \frac{\Delta y}{\Delta x} + \Delta y \frac{\Delta z}{\Delta x} \right) = y \frac{\partial z}{\partial x} + z \frac{\partial y}{\partial x}$, indem (nach §. 2. IV) $\text{Gr.} \left(y \frac{\Delta z}{\Delta x} \right) = y \frac{\partial z}{\partial x}$, $\text{Gr.} \left(z \frac{\Delta y}{\Delta x} \right) = z \frac{\partial y}{\partial x}$, $\text{Gr.} \left(\Delta y \frac{\Delta z}{\Delta x} \right) = 0 \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 0$ ist.

So ist nun:

$$\frac{\partial (x^2)}{\partial x} = \frac{\partial (x x)}{\partial x} = x \frac{\partial x}{\partial x} + x \frac{\partial x}{\partial x} = x + x = 2 x,$$

$$\frac{\partial x^3}{\partial x} = \frac{\partial (x^2 x)}{\partial x} = x^2 \frac{\partial x}{\partial x} + x \frac{\partial x^2}{\partial x} = x^2 + x \,.\, 2x = 3 x^2,$$

$$\frac{\partial x^4}{\partial x} = \frac{\partial (x^3 x)}{\partial x} = x^3 \frac{\partial x}{\partial x} + x \frac{\partial x^3}{\partial x} = x^3 + x \,.\, 3x^2 = 4x^3, \quad \text{u. s. w. allgemein,}$$

$$\frac{\partial x^m}{\partial x} = m x^{m-1}, \text{ m positiv und ganz.}$$

$$\frac{\partial (\sin x \cos x)}{\partial x} = \sin x \frac{\partial \cos x}{\partial x} + \cos x \frac{\partial \sin x}{\partial x} = - \sin^2 x + \cos^2 x,$$

$$\partial l(x^x) = \frac{\partial [x \, l(x)]}{\partial x} = x \frac{\partial l(x)}{\partial x} + l(x) \frac{\partial x}{\partial x} = x \,.\, \frac{1}{x} + l(x) = 1 + l(x),$$

$$\frac{\partial [5 \sin x \,.\, l(x^4)]}{\partial x} = \frac{\partial [20 \sin x \,.\, l(x)]}{\partial x} = 20 \frac{\partial [\sin x \,.\, l(x)]}{\partial x} = 20 \left[\sin x \frac{\partial l(x)}{\partial x} + l(x) \frac{\partial \sin x}{\partial x} \right]$$

$$= 20 \left[\sin x \,.\, \frac{1}{x} + l(x) \,.\, \cos x \right] = \frac{20 \sin x}{x} + 20 \, l(x) \cos x.$$

---

* D. h. Differentialquotient eines Produkts zweier Faktoren = Differentialquotient des zweiten Faktors, multiplizirt mit dem ersten, + Differentialquotient des ersten Faktors, multiplizirt mit dem zweiten.

Man kann obiges Resultat leicht verallgemeinern. So ist
$\frac{\partial (yzu)}{\partial x} = yz\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial (yz)}{\partial x} = yz\frac{\partial u}{\partial x} + uy\frac{\partial z}{\partial x} + uz\frac{\partial y}{\partial x}$ u. s. w.

VI. Man hat eben so

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{z}\right) = \frac{z\frac{\partial y}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial x}}{z^2} \text{ *}$$

Sey nämlich $f(x) = \frac{y}{z}$, so ist $f(x + \Delta x) = \frac{y + \Delta y}{z + \Delta z}$, $f(x + \Delta x) - f(x) = \frac{y + \Delta y}{z + \Delta z} - \frac{y}{z} = \frac{(y + \Delta y)z - y(z + \Delta z)}{z(z + \Delta z)} = \frac{z\Delta y - y\Delta z}{z^2 + z\Delta z}$, $\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{z\Delta y - y\Delta z}{(z^2 + z\Delta z)\Delta x} = \frac{z\frac{\Delta y}{\Delta x} - y\frac{\Delta z}{\Delta x}}{z^2 + z\Delta z}$, mithin

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{z}\right) = \text{Gr.}\,\frac{z\frac{\Delta y}{\Delta x} - y\frac{\Delta z}{\Delta x}}{z^2 + z\Delta z} = \frac{z\frac{\partial y}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial x}}{z^2},$$

da Gr. $z\frac{\Delta y}{\Delta x} = z\frac{\partial y}{\partial x}$. Gr. $y\frac{\Delta z}{\Delta x} = y\frac{\partial z}{\partial x}$, Gr. $z\Delta z = z \cdot 0 = 0$ ist (§. 2. IV).

Daraus folgt:

$$\frac{\partial \operatorname{tg} x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) = \frac{\cos x\frac{\partial \sin x}{\partial x} - \sin x\frac{\partial \cos x}{\partial x}}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x},$$

$$\frac{\partial \operatorname{cotg} x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right) = \frac{\sin x\frac{\partial \cos x}{\partial x} - \cos x\frac{\partial \sin x}{\partial x}}{\sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{-1}{\sin^2 x},$$

$$\frac{\partial x^{-m}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x^m}\right) = \frac{x^m\frac{\partial 1}{\partial x} - 1\frac{\partial x^m}{\partial x}}{x^{2m}} = \frac{0 - mx^{m-1}}{x^{2m}} = -\frac{mx^{m-1}}{x^{2m}} = -\frac{m}{x^{m+1}},$$ wenn

m positiv und ganz,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\sin x}{x^3}\right) = \frac{x^3\frac{\partial \sin x}{\partial x} - \sin x\frac{\partial x^3}{\partial x}}{x^6} = \frac{x^3\cos x - 3x^2\sin x}{x^6} = \frac{x\cos x - 3\sin x}{x^4}.$$

VII. Sind $f(x)$, $F(x)$ zwei Funktionen von x, so beschaffen, dass, was auch x sey:

$$f(x) = F(x) + C,$$

wo C eine Konstante, so ist nothwendig

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \frac{\partial F(x)}{\partial x}.$$

Denn, da obige Gleichung für alle Werthe von x besteht, so ist auch

$$f(x + \Delta x) = F(x + \Delta x) + C,\ f(x + \Delta x) - f(x) = F(x + \Delta x) - F(x),$$

also auch

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x},\ \text{Gr.}\,\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \text{Gr.}\,\frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x}.$$

Ist $C = 0$, so sind beide Funktionen einander gleich, und der Satz ist natürlich auch richtig.

* Differentialquotient eines Bruchs = Differentialquotient des Zählers, multiplizirt mit dem Nenner, minus Differentialquotient des Nenners, mal dem Zähler, dividirt Alles durch das Quadrat des Nenners.

Wäre also z. B.

$$x^2 y = 5 x^3 + 4,$$

so ist $\frac{\partial (x^2 y)}{\partial x} = \frac{\partial (5 x^3 + 4)}{\partial x}$, d. h. $x^2 \frac{\partial y}{\partial x} + y \frac{\partial x^2}{\partial x} = 5 \frac{\partial x^3}{\partial x}$, $x^2 \frac{\partial y}{\partial x} + 2 x y = 15 x^2$.

§. 5.

Wir wollen annehmen y sey eine Funktion von x, und dann f(y) eine Funktion von y und es soll sich um die Bestimmung von $\frac{\partial f(y)}{\partial x}$ handeln. Man hat $\frac{\partial f(y)}{\partial x} = \text{Gr.} \frac{f(y + \Delta y) - f(y)}{\Delta x} = \text{Gr.} \left(\frac{f(y + \Delta y) - f(y)}{\Delta y} \frac{\Delta y}{\Delta x} \right)$.

Nun ist, nach unsern Fundamental-Erklärungen: $\text{Gr.} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\partial y}{\partial x}$; was $\text{Gr.} \frac{f(y + \Delta y) - f(y)}{\Delta y}$ anbelangt, so wird natürlich auch Δy zur Gränze Null gehen, wenn Δx in dieser Lage ist, da wir immer y als stetige Funktion von x voraussetzen (§. 1); die Grösse $\text{Gr.} \frac{f(y + \Delta y) - f(y)}{\Delta y}$ ist alsdann, gemäss §. 3, der Differentialquotient von f (y) nach y, d. h. so bestimmt, als wenn y die unabhängig Veränderliche wäre, welchen Werth wir mit $\frac{\partial f(y)}{\partial y}$ * zu bezeichnen haben. Demnach ist (§. 2. IV):

$$\frac{\partial f(y)}{\partial x} = \frac{\partial f(y)}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x}. \qquad (9)$$

Man nennt diesen höchst wichtigen Satz den der Differentiation der Funktionen von Funktionen. Ist f (y) = z, so ist also

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x}.$$

Ist eben so w eine Funktion von v, v von u, u von y, y von x, so folgt aus der identischen Gleichung

$$\frac{\Delta w}{\Delta x} = \frac{\Delta w}{\Delta v} \frac{\Delta v}{\Delta u} \frac{\Delta u}{\Delta y} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

offenbar (§. 2. IV): $\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x}$ u. s. w.

So ist

$\frac{\partial \sin (x + a)}{\partial x} = \frac{\partial \sin y}{\partial x}$ (wenn $x + a = y$) $= \frac{\partial \sin y}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} = \cos y \frac{\partial (x + a)}{\partial x} = \cos y$ $= \cos (x + a)$, $\frac{\partial l (\sin x)}{\partial x}$ (wenn $y = \sin x$) $= \frac{\partial l (y)}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{y} \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{\sin x} \frac{\partial \sin x}{\partial x}$ $= \frac{1}{\sin x} \cos x = \cotg x$, $\frac{\partial \sin^4 x}{\partial x} = \frac{\partial y^4}{\partial x}$ (wenn $y = \sin x$) $= \frac{\partial y^4}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} = 4 y^3 \frac{\partial y}{\partial x}$ $= 4 \sin^3 x \frac{\partial \sin x}{\partial x} = 4 \sin^3 x \cos x$.

Ehe wir jedoch weitere Beispiele hinzufügen, wollen wir die Differentialquotienten der noch rückständigen einfachen Funktionen bestimmen.

---

* Kennt man $\frac{\partial f(x)}{\partial x}$, so wird man $\frac{\partial f(y)}{\partial y}$ einfach dadurch erhalten, dass man y für x setzt. So ist $\frac{\partial \cos y}{\partial y} = -\sin y$, $\frac{\partial l (y)}{\partial y} = \frac{1}{y}$, $\frac{\partial y^4}{\partial y} = 4 y^3$, $\frac{\partial \operatorname{tg} y}{\partial y} = \frac{1}{\cos^2 y}$ u. s. w.

I. Sey $y = x^m$, m ganz beliebig (konstant). Hieraus folgt $l(y) = m\,l(x)$, also (§. 4. VII, III, §. 3. II):

$$\frac{\partial l(y)}{\partial x} = \frac{\partial [m\,l(x)]}{\partial x}, \quad \frac{\partial l(y)}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} = m\frac{\partial l(x)}{\partial x}, \quad \frac{1}{y}\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{m}{x},$$

woraus:
$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{m y}{x}, \text{ d. h. da } y = x^m: \quad \frac{\partial x^m}{\partial x} = \frac{m x^m}{x}, \text{ oder}$$

$$\frac{\partial . x^m}{\partial x} = m x^{m-1},$$

welcher Satz nun für ein ganz beliebiges m gilt. (Man vergl. §. 4. V, VI.)

Hieraus folgt:

$$\frac{\partial x^6}{\partial x} = 6x^5, \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^{-1}\right) = -1x^{-2} = \frac{-1}{x^2}, \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x^3}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^{-3}\right)$$

$$= -3x^{-4} = \frac{-3}{x^4}, \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x^n}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^{-n}\right) = -n x^{-n-1} = -\frac{n}{x^{n+1}}, \quad \frac{\partial \sqrt{x}}{\partial x} = \frac{\partial x^{\frac{1}{2}}}{\partial x}$$

$$= \tfrac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \tfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad \frac{\partial \sqrt[n]{x}}{\partial x} = \frac{\partial x^{\frac{1}{n}}}{\partial x} = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{n}x^{\frac{-(n-1)}{n}} = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}},$$

$$\frac{\partial \sqrt[4]{x^3}}{\partial x} = \frac{\partial x^{\frac{3}{4}}}{\partial x} = \tfrac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}} = \frac{3}{4\sqrt[4]{x}}, \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^{-\frac{1}{2}}\right) = -\tfrac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2\sqrt{x^3}},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\sqrt[n]{x}}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^{-\frac{1}{n}}\right) = -\frac{1}{n}x^{-\frac{1}{n}-1} = -\frac{1}{n}x^{\frac{-(n+1)}{n}} = -\frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n+1}}},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\sqrt[5]{x^8}}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^{-\frac{8}{5}}\right) = -\frac{8}{5}x^{-\frac{13}{5}} = -\frac{8}{5\sqrt[5]{x^{13}}} \text{ u. s. w.}$$

II. Sey $y = e^x$, also $l(y) = x$, so ist ganz eben so:

$$\frac{\partial l(y)}{\partial x} = \frac{\partial x}{\partial x}, \quad \frac{\partial l(y)}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} = 1, \quad \frac{1}{y}\frac{\partial y}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial y}{\partial x} = y,$$

d. h. da $y = e^x$:
$$\frac{\partial e^x}{\partial x} = e^x.$$

III. Sey $y = a^x$, a beliebig aber konstant. Man hat $l(y) = x\,l(a)$, also indem man differenzirt (§. 4. VII, III, §. 3. I).

$$\frac{1}{y}\frac{\partial y}{\partial x} = l(a), \quad \frac{\partial y}{\partial x} = y\,l(a),$$

d. h.
$$\frac{\partial a^x}{\partial x} = a^x\,l(a).$$

IV. Sey $y = \text{arc}(\sin = x)$, also $\sin y = x$, so ist (§. 4. VII, §. 3. III, I):

$$\frac{\partial \sin y}{\partial x} = \frac{\partial x}{\partial x}, \quad \frac{\partial \sin y}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} = 1, \quad \cos y\frac{\partial y}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{\cos y}.$$

Nun ist aber, da y zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ liegt, also cos y positiv ist:

$$\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2},$$

also endlich $$\frac{\partial \,.\, \mathrm{arc}\,(\sin = x)}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Da immer $$\mathrm{arc}\,(\cos = x) = \frac{\pi}{2} - \mathrm{arc}\,(\sin = x),$$

so ist (§. 4. II, III): $$\frac{\partial\, \mathrm{arc}\,(\cos = x)}{\partial x} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

V. Sey $y = \mathrm{arc}\,(\mathrm{tg} = x)$, also $\mathrm{tg}\, y = x$, so ist, wie so eben:

$$\frac{1}{\cos^2 y}\,\frac{\partial y}{\partial x} = 1,\ \frac{\partial y}{\partial x} = \cos^2 y = \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2},$$

d. h. $$\frac{\partial\, \mathrm{arc}\,(\mathrm{tg} = x)}{\partial x} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Da immer $$\mathrm{arc}\,(\mathrm{cotg} = x) = \frac{\pi}{2} - \mathrm{arc}\,(\mathrm{tg} = x),$$

so ist $$\frac{\partial\, \mathrm{arc}\,(\mathrm{cotg} = x)}{\partial x} = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Stellen wir nunmehr diejenigen Differentialquotienten zusammen, die man sich zu merken hat, um mittelst der allgemeinen Sätze beliebige Funktionen differenziren zu können, so mögen es die folgenden seyn:

$$\left.\begin{array}{l}
\frac{\partial x^m}{\partial x} = m x^{m-1},\ \frac{\partial\, l(x)}{\partial x} = \frac{1}{x},\ \frac{\partial e^x}{\partial x} = e^x,\ \frac{\partial \sin x}{\partial x} = \cos x,\ \frac{\partial \cos x}{\partial x} = -\sin x,\\
\frac{\partial\, \mathrm{arc}\,(\sin = x)}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ \frac{\partial\, \mathrm{arc}\,(\mathrm{tg} = x)}{\partial x} = \frac{1}{1+x^2};\\
\frac{\partial \,.\, a^x}{\partial x} = a^x\, l(a),\ \frac{\partial\, \mathrm{tg}\, x}{\partial x} = \frac{1}{\cos^2 x},\ \frac{\partial\, \mathrm{cotg}\, x}{\partial x} = -\frac{1}{\sin^2 x},\ \frac{\partial\, \mathrm{arc}\,(\cos = x)}{\partial x} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\\
\frac{\partial\, \mathrm{arc}\,(\mathrm{cotg} = x)}{\partial x} = -\frac{1}{1+x^2}.
\end{array}\right\} \quad (10)$$

Vermittelst des wichtigen Satzes (9) kann man mit Hülfe früherer Sätze bereits schon sehr zusammengesetzte Funktionen differenziren, wie wir nun an einigen Beispielen zeigen wollen.

§. 6.

I. Sey zu differenziren $a x - b x^m + c \sqrt[n]{x} - \frac{1}{x^p}$. Da letztere Grösse $= a x - b x^m + c x^{\frac{1}{n}} - x^{-p}$, so erhält man, nach §. 4. III, IV und §. 5. I:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(a x - b x^m + c \sqrt[n]{x} - \frac{1}{x^p}\right) = a - m b x^{m-1} + \frac{1}{n} c x^{\frac{1}{n}-1} + p x^{-p-1}$$

$$= a - m b x^{m-1} + \frac{c}{n} x^{-\left(\frac{n-1}{n}\right)} + p x^{-(p+1)} = a - m b x^{m-1} + \frac{c}{n \sqrt[n]{x^{n-1}}} + \frac{p}{x^{p+1}}.$$

II. Man soll $(a x + b x^3)^m - \sqrt{a + b x + c x^2}$ differenziren. Setzt man $a x + b x^3 = y$, $a + b x + c x^2 = z$, so hat man $\frac{\partial}{\partial x}(y^m - z^{\frac{1}{2}})$ zu bestimmen. Diese Grösse ist zunächst (§. 4. IV) gleich $\frac{\partial}{\partial x}\, y^m - \frac{\partial}{\partial x}\, z^{\frac{1}{2}}$, also, nach §. 5. (9) gleich

$\frac{\partial . y^m}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial . z^{\frac{1}{2}}}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = m y^{m-1} \frac{\partial y}{\partial x} - \frac{1}{2} z^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial z}{\partial x}$, und da $\frac{\partial y}{\partial x} = a + 3 b x^2$, $\frac{\partial z}{\partial x} = b + 2 c x$, so ist, wenn man für y und z wieder ihre Werthe setzt:

$$\frac{\partial}{\partial x}[(a x + b x^3)^m - \sqrt{a + b x + c x^2}] = m(a x + b x^3)^{m-1}(a + 3 b x^2) - \frac{1}{2} \frac{b + 2 c x}{\sqrt{a + b x + c x^2}}.$$

III. Will man $\frac{\partial}{\partial x} l\,[\text{arc}\,(\sin = x)]$ erhalten, so setze man $\text{arc}\,(\sin = x) = y$, und hat (§. 5): $\frac{\partial}{\partial x} l\,[\text{arc}\,(\sin = x)] = \frac{\partial}{\partial x} l\,(y) = \frac{\partial\, l\,(y)}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{y} \frac{\partial y}{\partial x}$,
d. h. da $y = \text{arc}\,(\sin = x)$, $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ (§. 5. IV), so ist endlich:

$$\frac{\partial}{\partial x} l\,[\text{arc}\,(\sin = x)] = \frac{1}{\text{arc}\,(\sin = x).\ \sqrt{1 - x^2}}.$$

IV. Soll $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}\right)$ bestimmt werden, so setze man $1 + x = y$, $\frac{\partial y}{\partial x} = 1$, $1 - x = z$, $\frac{\partial z}{\partial x} = -1$, und hat zunächst (§. 4. VI):

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y^{\frac{1}{2}} + z^{\frac{1}{2}}}{y^{\frac{1}{2}} - z^{\frac{1}{2}}}\right) = \frac{(y^{\frac{1}{2}} - z^{\frac{1}{2}}) \frac{\partial}{\partial x}(y^{\frac{1}{2}} + z^{\frac{1}{2}}) - (y^{\frac{1}{2}} + z^{\frac{1}{2}}) \frac{\partial}{\partial x}(y^{\frac{1}{2}} - z^{\frac{1}{2}})}{(y^{\frac{1}{2}} - z^{\frac{1}{2}})^2}.$$

Aber $\frac{\partial}{\partial x}(y^{\frac{1}{2}} + z^{\frac{1}{2}}) = \frac{\partial y^{\frac{1}{2}}}{\partial x} + \frac{\partial z^{\frac{1}{2}}}{\partial x}$ (§. 4. IV) $= \frac{\partial . y^{\frac{1}{2}}}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial . z^{\frac{1}{2}}}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} z^{-\frac{1}{2}}$
$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{y}} - \frac{1}{\sqrt{z}}\right)$, $\frac{\partial}{\partial x}\left(y^{\frac{1}{2}} - z^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{z}}\right)$,
also die gesuchte Grösse =

$$\frac{\frac{1}{2}(\sqrt{y} - \sqrt{z})\left(\frac{1}{\sqrt{y}} - \frac{1}{\sqrt{z}}\right) - \frac{1}{2}(\sqrt{y} + \sqrt{z})\left(\frac{1}{\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{z}}\right)}{(\sqrt{y} - \sqrt{z})^2}$$

$$= \frac{\frac{(\sqrt{y} - \sqrt{z})(\sqrt{z} - \sqrt{y})}{2\sqrt{y z}} - \frac{(\sqrt{y} + \sqrt{z})(\sqrt{z} + \sqrt{y})}{2\sqrt{y z}}}{(\sqrt{y} - \sqrt{z})^2} = \frac{-(\sqrt{y} - \sqrt{z})^2 - (\sqrt{y} + \sqrt{z})^2}{2\sqrt{y z}\,(\sqrt{y} - \sqrt{z})^2}$$

$$= -\frac{(y + z)}{\sqrt{y z}\,(\sqrt{y} - \sqrt{z})^2} = -\frac{(y + z)}{\sqrt{y z}\,(y + z - 2\sqrt{y z})} = -\frac{2}{\sqrt{1 - x^2}\,(2 - 2\sqrt{1 - x^2})}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}\,(1 - \sqrt{1 - x^2})}.$$

V. Will man $\frac{\partial}{\partial x} \text{arc}\,(\text{tg} = \sqrt{5 + 4 x + 3 x^2})$ bestimmen, so setze man $5 + 4 x + 3 x^2 = y$, $\sqrt{y} = z$, und hat $\frac{\partial}{\partial x} \text{arc}\,(\text{tg} = \sqrt{5 + 4 x + 3 x^2}) = \frac{\partial}{\partial x}$ $\text{arc}\,(\text{tg} = z) = \frac{\partial}{\partial z} \text{arc}\,(\text{tg} = z). \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial x}$ (§. 5) $= \frac{\partial\, \text{arc}\,(\text{tg} = z)}{\partial z} \frac{\partial y^{\frac{1}{2}}}{\partial y} \frac{\partial\,(5 + 4 x + 3 x^2)}{\partial x}$

$$= \frac{1}{1 + z^2} \cdot \frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}} \cdot (4 + 6 x) = \frac{1}{1 + y} \cdot \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot (4 + 6 x) = \frac{4 + 6 x}{(1 + 5 + 4 x + 3 x^2)\, 2\sqrt{5 + 4 x + 3 x^2}}$$

$$= \frac{2 + 3 x}{(6 + 4 x + 3 x^2)\sqrt{5 + 4 x + 3 x^2}}.$$

VI. Um $\frac{\partial}{\partial x} l(x\sqrt{b}+\sqrt{a+bx^2})$ zu erhalten, setze man $a+bx^2=y$ (also $\frac{\partial y}{\partial x}=2bx$), $x\sqrt{b}+\sqrt{y}=z$, und erhält

$$\frac{\partial}{\partial x} l(x\sqrt{b}+\sqrt{a+bx^2})=\frac{\partial}{\partial x}l(z)=\frac{\partial l(z)}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{z}\cdot\frac{\partial(x\sqrt{b}+\sqrt{y})}{\partial x}=\frac{1}{z}\left(\sqrt{b}+\frac{\partial\sqrt{y}}{\partial x}\right)$$

$$=\frac{1}{z}\left(\sqrt{b}+\frac{\partial y^{\frac{1}{2}}}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}\right)=\frac{1}{z}(\sqrt{b}+\tfrac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}}.2bx)=\frac{1}{z}\left(\sqrt{b}+\frac{bx}{\sqrt{y}}\right)=\frac{1}{x\sqrt{b}+\sqrt{a+bx^2}}$$

$$\left(\sqrt{b}+\frac{bx}{\sqrt{a+bx^2}}\right)=\frac{1}{x\sqrt{b}+\sqrt{a+bx^2}}\left(\frac{\sqrt{b}\sqrt{a+bx^2}+bx}{\sqrt{a+bx^2}}\right)=\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a+bx^2}}.$$

VII. $\frac{\partial}{\partial x}\sin(a+bx+cx^3)=\frac{\partial}{\partial x}\sin y=\frac{\partial\sin y}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}=\cos y.(b+3cx^2)=(b+3cx^2)$ $\cos(a+bx+cx^3)$; $\frac{\partial}{\partial x}\text{arc}(\sin=\frac{b}{a}x)=\frac{\partial}{\partial x}\text{arc}(\sin=y)=\frac{\partial}{\partial y}\text{arc}(\sin=y)\frac{\partial y}{\partial x}$ $=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\frac{b}{a}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}x^2}}.\frac{b}{a}=\frac{b}{\sqrt{a^2-b^2x^2}}\ (a>0)$; $\frac{\partial}{\partial x}l[l(x)]=\frac{\partial}{\partial x}l(y)$ $=\frac{\partial l(y)}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{1}{y}.\frac{1}{x}=\frac{1}{x\,l(x)}$; $\frac{\partial}{\partial x}e^{x^2}=\frac{\partial}{\partial x}e^y=\frac{\partial e^y}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}=e^y\frac{\partial x^2}{\partial x}=e^y.2x$ $=2xe^{x^2}$; $\frac{\partial}{\partial x}a^{nx^r}=\frac{\partial}{\partial x}a^y=\frac{\partial a^y}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}=a^y l(a)\frac{\partial(nx^r)}{\partial x}=a^y\,l(a).nrx^{r-1}=nrl(a)x^{r-1}a^{nx^r}$;

$\frac{\partial}{\partial x}(e^{x^2}\text{tg}\,ax)=\text{tg}\,ax\frac{\partial e^{x^2}}{\partial x}+e^{x^2}\frac{\partial\,\text{tg}\,ax}{\partial x}=2xe^{x^2}\text{tg}\,ax+e^{x^2}\frac{\partial\,\text{tg}\,y}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}=2xe^{x^2}\text{tg}\,ax$ $+\frac{e^{x^2}a}{\cos^2 ax}$; $\frac{\partial}{\partial x}\text{arc}[\text{tg}=a\,\text{tg}(bx)]=\frac{\partial}{\partial x}\text{arc}(\text{tg}=a\,\text{tg}\,y)=\frac{\partial}{\partial x}\text{arc}(\text{tg}=z)=$ $\frac{\partial\,\text{arc}(\text{tg}=z)}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{1}{1+z^2}\frac{\partial(a\,\text{tg}\,y)}{\partial y}\frac{\partial(bx)}{\partial x}=\frac{1}{1+z^2}.\frac{a}{\cos^2 y}.b=\frac{ab}{(1+a^2\text{tg}^2y)\cos^2y}$ $=\frac{ab}{\cos^2y+a^2\sin^2y}=\frac{ab}{\cos^2(bx)+a^2\sin^2(bx)}$.

Als Beispiele zur Uebung legen wir noch vor:

$\frac{\partial}{\partial x}(ax+b)^m=am(ax+b)^{m-1}$, $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^3-1}{x^4-7x^2}\right)=\frac{-x^6-7x^4+4x^3-14x}{(x^4-7x^2)^2}$,

$\frac{\partial}{\partial x}\sqrt[3]{\frac{ax^2-b}{x^5}}=\frac{(-3ax^2+5b)\sqrt[3]{x}}{3x^3\sqrt[3]{(ax^2-b)^2}}$, $\frac{\partial}{\partial x}l(\sqrt{1-x^2})=-\frac{x}{1-x^2}$, $\frac{\partial}{\partial x}l(x+\sqrt{1+x^2})$ $=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, $\frac{\partial}{\partial x}\sin(a+bx)=b\cos(a+bx)$, $\frac{\partial}{\partial x}\text{tg}[l(x)]=\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{\cos^2[l(x)]}$,

$\frac{\partial}{\partial x}l\left(\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}\right)=-\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$, $\frac{\partial}{\partial x}\text{arc}(\text{tg}=\sqrt{x})=\frac{1}{2(1+x)\sqrt{x}}$,

$\frac{\partial}{\partial x}l(\text{tg}\,x)=\frac{2}{\sin 2x}$, $\frac{\partial}{\partial x}l(\sin x)=\text{cotg}\,x$, $\frac{\partial}{\partial x}[(2x+3)^2(5x+4)^4]=(2x+3)(5x+4)^3$ $[60x+76]$, $\frac{\partial}{\partial x}\frac{(4+5x^2)^3}{(2+3x^2)^4}=-\frac{6x(6+5x^2)(4+5x^2)^2}{(2+3x^2)^5}$, $\frac{\partial}{\partial x}\sqrt{\frac{2+5x^2}{3+4x^2}}$ $=\frac{7x}{\sqrt{(2+5x^2)(3+4x^2)^3}}$, $\frac{\partial}{\partial x}\sqrt[3]{\frac{5x}{3+2x}}=\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{x^2(3+2x)^4}}$, $\frac{\partial}{\partial x}l\left(\frac{4+3x^2}{2+7x}\right)$ $=\frac{-28+12x+21x^2}{(2+7x)(4+3x^2)}$.

§. 7.

I. Angenommen, es seyen y und z beliebige Funktionen von x, und $f(y,z)$ eine Funktion beider Grössen *, und man soll $\frac{\partial f(y,z)}{\partial x}$ ermitteln.

Geht x über in $x+\Delta x$, so gehen y und z über in $y+\Delta y$, $z+\Delta z$, so dass also der geänderte Zustand von $f(y,z)$ ist $f(y+\Delta y, z+\Delta z)$ und die Aenderung selbst $f(y+\Delta y, z+\Delta z)-f(y,z)$. Demgemäss hat man:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(y,z) = \text{Gr.} \frac{f(y+\Delta y, z+\Delta z)-f(y,z)}{\Delta x}.$$

Nun ist aber identisch:

$$\frac{f(y+\Delta y, z+\Delta z)-f(y,z)}{\Delta x} = \frac{f(y+\Delta y, z+\Delta z)-f(y, z+\Delta z)+f(y, z+\Delta z)-f(y,z)}{\Delta x}$$
$$= \frac{f(y+\Delta y, z+\Delta z)-f(y, z+\Delta z)}{\Delta y}\frac{\Delta y}{\Delta x}+\frac{f(y, z+\Delta z)-f(y,z)}{\Delta z}\frac{\Delta z}{\Delta x}.$$

Was den Gränzwerth anbelangt, dem diese Grösse mit abnehmendem Δx (also auch abnehmenden Δy, Δz) sich nähert, so ist zunächst $f(y+\Delta y, z+\Delta z)-f(y, z+\Delta z)$ die Aenderung, welche $f(y, z+\Delta z)$ erleidet, wenn y übergeht in $y+\Delta y$, z sich aber nicht ändert, d. h. $z+\Delta z$ ungeändert bleibt. Daraus folgt, dass der Werth von Gr. $\frac{f(y+\Delta y, z+\Delta z)-f(y, z+\Delta z)}{\Delta y}$ der Differentialquotient von $f(y, z+\Delta z)$ nach y, ohne dass z sich ändert, seyn wird. Da aber Δz auch zu gleicher Zeit mit Δx und Δy unbegränzt abnimmt, so nähert sich $z+\Delta z$ dem Werthe z, und es ist mithin

$$\text{Gr.} \frac{f(y+\Delta y, z+\Delta z)-f(y, z+\Delta z)}{\Delta y} = \frac{\partial f(y,z)}{\partial y},$$

wo wir nun durch $\frac{\partial f(y,z)}{\partial y}$ den partiellen Differentialquotienten von $f(y,z)$ nach y bezeichnen, den man erhält, wenn man diese Grösse so differenzirt, als wenn y die unabhängig Veränderliche, z aber konstant wäre. Ganz eben so ist

$$\text{Gr.} \frac{f(y, z+\Delta z)-f(y,z)}{\Delta z} = \frac{\partial f(y,z)}{\partial z},$$

wo $\frac{\partial f(y,z)}{\partial z}$ den partiellen Differentialquotienten von $f(y,z)$ nach z bedeutet, wobei also y konstant ist. Da ferner

$$\text{Gr.} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\partial y}{\partial x}, \quad \text{Gr.} \frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial x},$$

so ist endlich

$$\frac{\partial}{\partial x} f(y,z) = \frac{\partial f(y,z)}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial f(y,z)}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}. \qquad (11)$$

Wäre eine der beiden Grössen (y oder z) gleich x, hätte man also $f(x,z)$ zu differenziren, so wäre der Differentialquotient davon, gemäss (11), da $\frac{\partial x}{\partial x} = 1$ (§. 3. I):

$$\frac{\partial f(x,z)}{\partial x}+\frac{\partial f(x,z)}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}.$$

Dabei bedeutet $\frac{\partial f(x,z)}{\partial x}$ den partiellen Differentialquotienten von $f(x,z)$

---

* Sey z. B. $y = \sin x$, $z = e^x$, so ist $e^x \sin^2 x + e^{3x} \sin x + 5 e^{4x} - 7 \sin^2 x = z y^2 + z^3 y + 5 z^4 - 7 y^2$ eine Funktion von y und z, d. h. von $\sin x$ und e^x.

nach x, wobei z als konstant angesehen wird. Es kann nun hier eine Verwirrung in den Zeichen eintreten, indem man auch unter $\frac{\partial f(x,z)}{\partial x}$, unserer früheren Bezeichnung gemäss, den vollständigen Differentialquotienten von f(x,z) verstehen könnte, wobei natürlich z (als Funktion von x) ebenfalls sich ändern müsste. Um dieser Verwirrung vorzubeugen, werden wir künftig den vollständigen (totalen) Differentialquotienten nach x mit $\frac{\partial}{\partial x} f(x,z)$ oder $\frac{\partial}{\partial x} f(y,z)$ u. s. w., den partiellen nach x aber mit $\frac{\partial f(x,z)}{\partial x}$, $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$, den partiellen nach y mit $\frac{\partial f(y,z)}{\partial y}$ u. s. f. bezeichnen, so dass man hat

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x}. \tag{12}$$

Sey z. B. zu suchen $\frac{\partial}{\partial x}\left[a^x + 5\cos^2 x - \frac{9\,a^{2x}}{\cos x} + \frac{7\cos^4 x}{a^x}\right]$.

Man setze $a^x = y$; $\cos x = z$, so hat man zu suchen

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[y + 5z^2 - 9y^2z^{-1} + 7y^{-1}z^4\right].$$

Aber es ist $\frac{\partial(y + 5z^2 - 9y^2z^{-1} + 7y^{-1}z^4)}{\partial y} = 1 - 18yz^{-1} - 7y^{-2}z^4$,

$$\frac{\partial(y + 5z^2 - 9y^2z^{-1} + 7y^{-1}z^4)}{\partial z} = 10z + 9y^2z^{-2} + 28y^{-1}z^3,$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = a^x\, l(a),\quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\sin x,$$

also $\frac{\partial}{\partial x}\left[a^x + 5\cos^2 x - \frac{9a^{2x}}{\cos x} + \frac{7\cos^4 x}{a^x}\right] = \left[1 - \frac{18y}{z} - \frac{7z^4}{y^2}\right] a^x\, l(a) - \left[10z + \frac{9y^2}{z^2} + \frac{28z^3}{y}\right]\sin x = \left[1 - \frac{18a^x}{\cos x} - \frac{7\cos^4 x}{a^{2x}}\right] a^x\, l(a) - \left[10\cos x + \frac{9a^{2x}}{\cos^2 x} + \frac{28\cos^3 x}{a^x}\right]\sin x.$

Hat man ferner $\frac{\partial}{\partial x}\left[4x^2 + 5x\,\mathrm{tg}\,x - 7\,\mathrm{tg}^4 x + 18\right]$ zu bestimmen, so sey $\mathrm{tg}\,x = y$, also die gegebene Grösse $4x^2 + 5xy - 7y^4 + 18$, und es ist:

$$\frac{\partial(4x^2 + 5xy - 7y^4 + 18)}{\partial x} = 8x + 5y,\quad \frac{\partial(4x^2 + 5xy - 7y^4 + 18)}{\partial y} = 5x - 28y^3,$$

also da $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{\cos^2 x}$:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[4x^2 + 5x\,\mathrm{tg}\,x - 7\,\mathrm{tg}^4 x + 18\right] = 8x + 5\,\mathrm{tg}\,x + (5x - 28\,\mathrm{tg}^3 x)\frac{1}{\cos^2 x}.$$

Eben so ist $\frac{\partial y^z}{\partial y} = zy^{z-1}$, $\frac{\partial y^z}{\partial z} = y^z\, l(y)$ (§. 5. I, III),

also nach (11): $\frac{\partial}{\partial x}(y^z) = zy^{z-1}\frac{\partial y}{\partial x} + y^z\, l(y)\frac{\partial z}{\partial x}$.

Für $y = z = x$ z. B.

$$\frac{\partial}{\partial x} x^x = xx^{x-1} + x^x\, l(x) = x^x + x^x\, l(x) = x^x\,[1 + l(x)].$$

Ferner: $\frac{\partial}{\partial x} x^{2x} = 2x x^{2x-1} + x^{2x} l(x).2 = 2x^{2x}[1+l(x)]$.

II. Sind y, z, u Funktionen von x, f(y, z, u) eine Funktion von y, z, u, so ist

$$\frac{\partial}{\partial x} f(y,z,u) = \text{Gr.} \frac{f(y+\Delta y, z+\Delta z, u+\Delta u) - f(y,z,u)}{\Delta x}$$

$$= \text{Gr.} \Big[\frac{f(y+\Delta y, z+\Delta z, u+\Delta u) - f(y, z+\Delta z, u+\Delta u)}{\Delta y}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$+ \frac{f(y, z+\Delta z, u+\Delta u) - f(y,z,u+\Delta u)}{\Delta z}\frac{\Delta z}{\Delta x} + \frac{f(y,z,u+\Delta u) - f(y,z,u)}{\Delta u}\frac{\Delta u}{\Delta x}\Big],$$

wie man sich leicht überzeugen wird, wenn man nur die Multiplikationen ausführt und dann zusammenzieht. Da mit unendlich abnehmendem Δx auch Δy, Δz, Δu gegen die Gränze 0 gehen, so folgt hieraus ganz in derselben Weise, wie in I:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(y,z,u) = \frac{\partial f(y,z,u)}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial f(y,z,u)}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial f(y,z,u)}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x},$$

in welcher Gleichung die partiellen Differentialquotienten ganz dieselbe Bedeutung haben, wie bereits angegeben.

Es ist wohl aus dem Angegebenen leicht zu ersehen, in welcher Weise man sich hier zu benehmen hat, um zum Ziele zu gelangen,* und man sieht, dass allgemein:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\partial}{\partial x} f(y,z,u,v,\ldots) = \frac{\partial f(y,z,u,v,\ldots)}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial f(y,z,u,v,\ldots)}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial f(y,z,u,v,\ldots)}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} \\ \qquad + \frac{\partial f(y,z,u,v,\ldots)}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \ldots\ldots,\end{array}\right\} \quad (13)$$

wenn y, z, u, v, ... Funktionen von x sind. Die Formel (13) ist nun die allgemeinste Formel für Differentiation. Man erhält hiernach:

$$\frac{\partial}{\partial x}(yzuv\ldots) = zuv\ldots\frac{\partial y}{\partial x} + yuv\ldots\frac{\partial z}{\partial x} + yzv\ldots\frac{\partial u}{\partial x} + yzu\ldots\frac{\partial v}{\partial x} + \ldots$$

welche Formel die Verallgemeinerung von §. 4. V ist.

Sey etwa zu bestimmen:

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big[\text{arc}(\text{tg} = \sqrt{1-x^2}) + a^x \,\text{arc}(\text{tg} = \sqrt{1-x^2}) + 7a^{2x} - 3a^x l(x)\Big].$$

Man setze $\text{arc}(\text{tg} = \sqrt{1-x^2}) = y$, $a^x = z$, $l(x) = u$, so ist

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\text{arc}(\text{tg} = \sqrt{1-x^2}),\ \frac{\partial z}{\partial x} = a^x l(a),\ \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{x}.$$

Um $\frac{\partial y}{\partial x}$ zu erhalten, setze man (§. 5) $1-x^2 = v$, $\sqrt{v} = w$, und hat

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\text{arc}(\text{tg}=w) = \frac{\partial\,\text{arc}(\text{tg}=w)}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{1+w^2}\cdot\frac{\partial v^{\frac{1}{2}}}{\partial v}\frac{\partial(1-x^2)}{\partial x} = \frac{1}{1+w^2}\cdot\frac{1}{2}v^{-\frac{1}{2}}.(-2x)$$

$$= -\frac{x}{(1+w^2)\sqrt{v}} = -\frac{x}{(1+v)\sqrt{v}} = -\frac{x}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}};$$

---

* Man fügt jeweils Grössen zu und subtrahirt die nämlichen Grössen, so dass Differenzen zum Vorschein kommen, bei denen blos y, oder blos z, u. s. w. sich geändert hat. Statt dann die erste durch Δx zu dividiren, dividirt man durch Δy, und multiplizirt mit $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ u. s. w., wie sich dies aus der Darstellung im Texte von selbst ergibt.

dann $\frac{\partial}{\partial x}\left[\mathrm{arc}(\mathrm{tg}=\sqrt{1-x^2})+a^x\,\mathrm{arc}(\mathrm{tg}=\sqrt{1-x^2})+7a^{2x}-3a^x\,l(x)\right]=\frac{\partial}{\partial x}\Big[y$ $+zy+7z^2-3zu\Big]=\frac{\partial[y+..-3zu]}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial[y+..-3zu]}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial[y+..-3zu]}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}$

$$=[1+z]\left(\frac{-x}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}}\right)+[y+14z-3u]\,a^x\,l(a)-3z\,.\frac{1}{x}=-\frac{(1+a^x)x}{(2-x^2)\sqrt{1-x^2}}$$

$$+[\mathrm{arc}(\mathrm{tg}=\sqrt{1-x^2})+14a^x-3l(x)]\,a^x\cdot l(a)-\frac{3a^x}{x}.$$

Zur Uebung legen wir vor:

$\frac{\partial}{\partial x}l\left(\frac{1-\cos nx}{1+\cos nx}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{n}{\sin nx}$; $\frac{\partial}{\partial x}a^{b^x}=l(a)\,l(b)\,a^{b^x}b^x$; $\frac{\partial}{\partial x}\,\mathrm{arc}\left(\sin=\sqrt{\frac{a}{a+x}}\right)$ $=-\frac{1}{2(a+x)}\sqrt{\frac{a}{x}}$; $\frac{\partial}{\partial x}\,\mathrm{arc}\left(\mathrm{tg}=\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{2}x\right)=\frac{\frac{1}{2}\sqrt{a^2-b^2}}{a+b\cos x}$; $\frac{\partial}{\partial x}x^{\frac{1}{x}}=\frac{x^{\frac{1}{x}}[1-l(x)]}{x^2}$; $\frac{\partial}{\partial x}(\cos x)^{\sin x}=(\cos x)^{\sin x}\left[\cos x\,l(\cos x)-\frac{\sin^2 x}{\cos x}\right]$; $\frac{\partial}{\partial x}\left[(x+a)^m(x+b)^n(x+c)^r\ldots\right]$ $=\frac{mz}{x+a}+\frac{nz}{x+b}+\frac{rz}{x+c}+..$, wo $z=(x+a)^m(x+b)^n(x+c)^r\,..$; $\frac{\partial}{\partial x}\,\mathrm{arc}\left(\cos=\frac{b+a\cos x}{a+b\cos x}\right)$ $=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a+b\cos x}$; $\frac{\partial}{\partial x}\sin\frac{ax}{\sqrt{1-a^2x^2}}=\frac{a}{\sqrt{(1-a^2x^2)^3}}\cos\frac{ax}{\sqrt{1-a^2x^2}}$; $\frac{\partial}{\partial x}\,\mathrm{arc}\left(\sin=\frac{y}{z}\right)$ $=\frac{1}{\sqrt{z^2-y^2}}\frac{\partial y}{\partial x}-\frac{y}{z\sqrt{z^2-y^2}}\frac{\partial z}{\partial x}$ $(z>0)$.

Anmerkung. Man pflegt zuweilen die Gleichung (13) abkürzungsweise auch so zu schreiben: $\frac{\partial}{\partial x}f(y,z,u,v,..)=\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\ldots.$

Ferner ist klar, dass man für jeden einzelnen Fall auch die früheren Sätze anwenden kann und meistens gleichschnell zum Ziele gelangt. So sey etwa zu bestimmen:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[4x^3a^x+2x^2a^{2x}+3x\,l(x)-5\sin x\right].$$

Statt nun $a^x=y$, $l(x)=z$, $\sin x=u$ zu setzen, verfährt man geradezu nach den Regeln des §. 4. und hat für die gesuchte Grösse:

$$4\left[x^3\frac{\partial a^x}{\partial x}+a^x\frac{\partial x^3}{\partial x}\right]+2\left[x^2\frac{\partial a^{2x}}{\partial x}+a^{2x}\frac{\partial x^2}{\partial x}\right]+3\left[x\frac{\partial l(x)}{\partial x}+l(x)\frac{\partial x}{\partial x}\right]-5\frac{\partial \sin x}{\partial x}.$$

Da aber $\frac{\partial a^x}{\partial x}=a^x\,l(a)$ (§. 5. III), $\frac{\partial a^{2x}}{\partial x}=\frac{\partial a^y}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}=a^{2x}.l(a)2=2a^{2x}l(a)$, $\frac{\partial l(x)}{\partial x}=\frac{1}{x}$ u. s. w., so erhält man

$$4x^3a^x\,l(a)+12a^xx^2+4x^2a^{2x}\,l(a)+4xa^{2x}+3+3l(x)-5\cos x$$

als gesuchten Werth, den man in der früheren Weise gleichfalls erhalten hätte.

Eben so kann man sich manchmal durch Umformungen helfen. Ist z. B. $\frac{\partial}{\partial x}x^x$ (§. 7. I) zu bestimmen, so setze man $x^x=y$ und hat $l(y)=x\,l(x)$, also (§. 3.) $\frac{1}{y}\frac{\partial y}{\partial x}=1+l(x)$, $\frac{\partial y}{\partial x}$ $=y\,[1+l(x)]$, d. h. $\frac{\partial}{\partial x}x^x=x^x\,[1+l(x)]$.

Man übersieht leicht, dass mittelst der gegebenen Regeln es möglich ist, alle, auch die zusammengesetztesten Funktionen von x zu differenziren. Hiebei ist es wohl unnöthig, zu bemerken, dass wenn nicht x die unabhängig Veränderliche ist, sondern etwa s, und p, q, r,... Funktionen von s sind, man eben so hat:

$$\frac{\partial}{\partial s} f(p, q, r \ldots) = \frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial s} + \ldots$$

Wollte man endlich die bereits in der Anmerkung zu §. 3. berührte Bezeichnung der Differentiale einführen, so wäre

$$\frac{\partial}{\partial x} f(y, z, u, v, ..) dx = d f(y, z, u, v, \ldots), \quad \frac{\partial y}{\partial x} dx = dy, \quad \frac{\partial z}{\partial x} dx = dz, \quad \frac{\partial u}{\partial x} dx = du, \ldots,$$

so dass also: $d.f(y, z, u, v, ..) = \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv + \ldots,$

und es wäre wieder $d.f(y, z, u, v, ..)$ die unendlich kleine Zunahme, welche $f(y, z, u, v, ..)$ erleidet, wenn $y, z, \ldots$ um die unendlich kleinen Grössen $dy, dz, \ldots$ zunehmen, und zwar in Folge dessen, dass x um die unendlich kleine Grösse dx sich ändert.

§. 8.

Im Seitherigen haben wir vorausgesetzt, die zu differenzirenden Funktionen seyen geradezu, oder, wie man sagt, entwickelt gegeben. Es kann sich aber ereignen, dass man eine Gleichung zwischen zwei Veränderlichen hat, die im Allgemeinen durch

$$f(x, y) = 0 \qquad (14)$$

dargestellt werden kann. Ist in (14) der Werth von x z. B. gegeben, so folgt daraus der Werth von y, d. h. vermöge (14) ist y eine Funktion von x, die durch eben diese Gleichung unentwickelt gegeben ist. Es ist klar, dass man eben so gut sagen könnte x sey eine Funktion von y. Aus der Gleichung

$$5x^2y + 3x\sin y - 12\sin y + 8 = 0$$

folgt also, dass y eine Funktion von x ist, die in einzelnen Fällen wohl entwickelt werden kann, meistens aber eine Entwicklung nicht zulässt, wie gerade im vorliegenden Beispiele. Soll man nun dennoch $\frac{\partial y}{\partial x}$ bestimmen, so wird man beachten, dass nach (14) die zusammengehörigen Werthe von x und y immer so beschaffen sind, dass $f(x, y)$ Null, mithin konstant wird. Daraus folgt, dass $\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \frac{\partial . 0}{\partial x} = 0$ (§. 4. I), d. h. (§. 7. Gl. (12)):

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} = 0, \qquad (14')$$

aus welcher Gleichung nun $\frac{\partial y}{\partial x}$ gefunden wird.

Aus $\quad y^3 + x^3 - 3axy = 0$

folgt $\quad \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3ay, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 3ax,$

also $\quad 3x^2 - 3ay + (3y^2 - 3ax)\frac{\partial y}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{ay - x^2}{y^2 - ax}.$

Eben so aus: $y^4 + 2x^2y^2 + x^4 - 8axy^2 = 0: \quad \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{2ay^2 - xy^2 - x^3}{y^3 + x^2y - 4axy};$

$$y^x - x^y = 0: \quad \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{y^2 - xy\,l(y)}{x^2 - xy\,l(x)},$$

$$\sin 2x - l(x+y) + y^2x^3 = 0: \quad \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1 - (3x^2y^2 + 2\cos 2x)(x+y)}{-1 + 2x^3y(x+y)}.$$

Anmerkung. Es versteht sich von selbst, dass man, statt die Gleichung (14') in der

hier vorgeschriebenen Form zu bilden, ganz direkt nach den früheren Regeln die Gleichung (14) differenziren könnte. So erhielte man aus $\sin 2x + y^2x^3 - l(x+y) = 0$:

$$2\cos 2x + 2yx^3 \frac{\partial y}{\partial x} + 3y^2x^2 - \frac{1}{x+y}\left(1 + \frac{\partial y}{\partial x}\right) = 0,$$

d. h.
$$\left(2yx^3 - \frac{1}{x+y}\right)\frac{\partial y}{\partial x} = -2\cos 2x - 3y^2x^2 + \frac{1}{x+y},$$

woraus derselbe Werth wie oben folgt.

Eben so kann die Gleichung (14) nach den ursprünglichen Regeln abgeleitet werden. Geht nämlich x in $x + \Delta x$ über, so muss y in $y + \Delta y$ übergehen und $x + \Delta x$, $y + \Delta y$ müssen nothwendig wieder der Gleichung (14) genügen, d. h. man muss haben:

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) = 0.$$

Aus dieser Gleichung und (14) folgt durch Subtraktion und Division mit Δx:

$$\frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta x} = 0,$$

also auch
$$\text{Gr.}\ \frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta x} = 0,$$

d. h.
$$\text{Gr.}\left[\frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)}{\Delta x} + \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}\frac{\Delta y}{\Delta x}\right] = 0$$

oder (§. 7.)
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} = 0.$$

Gesetzt man habe zwischen den drei Veränderlichen x, y, z die zwei Gleichungen

$$f(x, y, z) = 0, \quad F(x, y, z) = 0, \qquad (15)$$

so folgt daraus, dass zwei dieser Veränderlichen Funktionen der dritten sind, z. B. y und z Funktionen von x, indem, wenn eine der drei Grössen bekannt ist, die zwei andern mittelst der Gleichungen (15) bestimmt werden können. Um dann $\frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial x}$ zu erhalten, wird man gemäss §. 7. Gl. (13) und §. 4, I aus (15) ziehen:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \qquad (15')$$

aus welchen zwei Gleichungen die Werthe von $\frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial x}$ leicht gefunden werden.

Man sieht leicht, dass wenn überhaupt zwischen n Veränderlichen $x, y, z, u, \ldots$, $n-1$ Gleichungen gegeben sind, $n-1$ der Veränderlichen als Funktionen der n^{ten} (z. B. x) zu betrachten sind, und dass man durch Differentiation der $n-1$ Gleichungen nach den Regeln des §. 7. die zur Bestimmung der Differentialquotienten dieser abhängigen Veränderlichen hinreichenden Gleichungen erhalten wird.

Anmerkung. Auch hier versteht es sich ganz von selbst, dass statt die durch (15') gegebene Form der zur Bestimmung von $\frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial x}$ nöthigen Formeln anzuwenden, man durch direkte Differenzirung nach den früheren Regeln Gleichungen erhalten könnte, die zu demselben Zwecke verwendet werden können.

Die Gleichung (14'), in der $x, y, \frac{\partial y}{\partial x}$ vorkommen, bildet eine Differentialgleichung von (14). Man kann oft aber durch Verbindung von (14) und (14') noch eine weitere Differentialgleichung herstellen. Kommt nämlich in (14) eine gewisse Konstante vor, die auch noch in (14') enthalten

ist, so kann man dieselbe zwischen beiden Gleichungen eliminiren und erhält dann eine Gleichung zwischen $x, y, \frac{\partial y}{\partial x}$, die aus (14) folgt, aber jene Konstante nicht enthält. Die Gleichung (14) heisst die Integralgleichung oder ursprüngliche Gleichung von (14′) sowohl, als der wie eben angegeben erhaltenen. Es folgt hieraus offenbar, dass man sich zu letzterer eine ursprüngliche Gleichung gehörend denken könne, die eine Konstante, die in der Differentialgleichung nicht vorkommt, enthält.

Sey z. B. die ursprüngliche Gleichung:

$$y^2+ax^2+3x+5=0,$$

so folgt daraus zunächst: $2y\frac{\partial y}{\partial x}+2ax+3=0,$

und wenn man a zwischen beiden Gleichungen eliminirt:

$$2y^2-2xy\frac{\partial y}{\partial x}+3x+10=0,$$

eine Differentialgleichung, die ebenfalls zur angegebenen Gleichung gehört, die Konstante a aber nicht mehr enthält.

Zweiter Abschnitt.

Differentialquotienten höherer Ordnung. Vertauschung der unabhängig Veränderlichen. Bedeutung gewisser Differentialquotienten.

§. 9.

Im ersten Abschnitt wurde gezeigt, wie man in allen Fällen den Differentialquotienten irgend einer Funktion zu bestimmen im Stande ist. Derselbe ist dabei im Allgemeinen wieder als Funktion der unabhängig Veränderlichen erschienen, so dass man abermals nach dem Differentialquotienten dieser neuen Funktion fragen kann. Bildet man denselben, so sagt man, man habe den zweiten Differentialquotienten der ursprünglichen Funktion bestimmt. Dieser ist selbst wieder eine Funktion der unabhängig Veränderlichen, deren Differentialquotient dann den dritten Differentialquotienten der ursprünglichen Funktion bildet. Wie man hier weiter gehen kann, ist klar, und man erhält so die Differentialquotienten höherer Ordnung, während man den früher kurzweg „Differentialquotient" geheissenen, nunmehr ersten Differentialquotient nennen kann. Was die Bezeichnung anbelangt, so sind für f (x):

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x}, \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2}, \frac{\partial^3 f(x)}{\partial x^3}, \ldots\ldots, \frac{\partial^n f(x)}{\partial x^n}$$

der erste, zweite, ..., n^{te} Differentialquotient, die man zuweilen auch durch

$$f'(x), f''(x), f^3(x), \ldots\ldots, f^n(x),$$

bezeichnet. Eben so sind $\frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}, \ldots\ldots, \frac{\partial^n y}{\partial x^n}$ der erste, zweite, ..., n^{te} Differentialquotient von y.

Es ist nun leicht, die höheren Differentialquotienten zu bilden, da man eben blos nach den früheren Regeln zu differenziren hat. So ist

$\frac{\partial x^m}{\partial x} = m x^{m-1}$ (§. 5. I), $\frac{\partial^2 x^m}{\partial x^2} = m \frac{\partial x^{m-1}}{\partial x} = m(m-1)x^{m-2}$ (§. 4. III), $\frac{\partial^3 x^m}{\partial x^3} = m(m-1)(m-2)x^{m-3}$, ...

allgemein offenbar $\frac{\partial^n x^m}{\partial x^n} = m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)x^{m-n}$.

Ist dabei m = n (also m eine ganze positive Zahl), so ist $\frac{\partial^n x^n}{\partial x^n} = n(n-1)\ldots 1$; ist m positiv und ganz, aber $< n$, so ist $\frac{\partial^n x^m}{\partial x^n} = 0$.

$\frac{\partial l(x)}{\partial x} = \frac{1}{x} = x^{-1}$, $\frac{\partial^2 l(x)}{\partial x^2} = -1 x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$, $\frac{\partial^3 l(x)}{\partial x^3} = 2x^{-3} = \frac{2}{x^3}$, $\frac{\partial^4 l(x)}{\partial x^4} = -2.3x^{-4} = -\frac{2.3}{x^4}$, ..., $\frac{\partial^n l(x)}{\partial x^n} = \pm\frac{2.3.4\ldots(n-1)}{x^n}$,

wo das obere Zeichen gilt, wenn n ungerade, das untere, wenn n gerade ist.

$$\frac{\partial e^x}{\partial x} = e^x, \quad \frac{\partial^2 e^x}{\partial x^2} = e^x, \ldots\ldots\ldots, \frac{\partial^n e^x}{\partial x^n} = e^x$$

$$\frac{\partial a^x}{\partial x} = a^x l(a), \quad \frac{\partial^2 a^x}{\partial x^2} = a^x (l(a))^2, \quad \frac{\partial^3 a^x}{\partial x^3} = a^x (l(a))^3, \ldots\ldots, \frac{\partial^n a^x}{\partial x^n} = a^x (l(a))^n.$$

Es ist ferner $\frac{\partial \sin x}{\partial x} = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, also da immer (§. 5.) $\frac{\partial \sin(x+a)}{\partial x} = \cos(x+a) = \sin\left(x + a + \frac{\pi}{2}\right)$:

$\frac{\partial \sin x}{\partial x} = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, $\frac{\partial^2 \sin x}{\partial x^2} = \frac{\partial \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}{\partial x} = \sin\left(x + \frac{2\pi}{2}\right)$, $\frac{\partial^3 \sin x}{\partial x^3} = \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)$ ...., $\frac{\partial^n \sin x}{\partial x^n} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$,

welche letztere Grösse $= \sin x$ ist, wenn sich n durch 4 dividiren lässt; $= \cos x$, wenn bei der Division durch 4 noch 1 als Rest bleibt; $= -\sin x$, wenn 2 als Rest bleibt; $= -\cos x$, wenn 3 als Rest bleibt. Ganz eben so

$\frac{\partial \cos x}{\partial x} = -\sin x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, $\frac{\partial^2 \cos x}{\partial x^2} = \cos\left(x + \frac{2\pi}{2}\right)$, ..., $\frac{\partial^n \cos x}{\partial x^n} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$.

Sey $y = arc(tg = x)$, so ist $\frac{\partial y}{\partial x} = \cos^2 y$ (§. 5. V); demnach $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial \cos^2 y}{\partial x} = \frac{\partial \cos^2 y}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} = -2\cos y \sin y \frac{\partial y}{\partial x}$ (§. 5.) $= -2\cos^3 y \sin y = -2\sin y \cos y \cos^2 y$

$$=-\sin 2y\cos^2 y=\sin\left(2y+\frac{2\pi}{2}\right)\cos^2 y.$$

Dann ist $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}=-\frac{\partial(\sin 2y\cos^2 y)}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}=-[2\cos 2y\cos^2 y-2\sin 2y\cos y\sin y]\cos^2 y=-2[\cos 2y\cos y-\sin 2y\sin y]\cos^3 y=-2\cos 3y\cos^3 y=2\sin\left(3y+\frac{3\pi}{2}\right)\cos^3 y.$

Man vermuthet daraus, dass allgemein für $y=\operatorname{arc}(\operatorname{tg}=x)$:

$$\frac{\partial^n y}{\partial x^n}=2.3\ldots(n-1)\sin\left(ny+\frac{n\pi}{2}\right)\cos^n y$$

seyn werde. Um diesen Satz zu beweisen, wenden wir diejenige Beweisform an, die man den „Schluss von n auf n+1" nennt. * Nun folgt aber aus dieser Formel

$$\frac{\partial^{n+1} y}{\partial x^{n+1}}=2.3\ldots(n-1)\frac{\partial}{\partial x}\left[\sin\left(ny+\frac{n\pi}{2}\right)\cos^n y\right]=2.3\ldots(n-1)\frac{\partial}{\partial y}\left[\sin\left(ny+\frac{n\pi}{2}\right)\cos^n y\right]\frac{\partial y}{\partial x}$$

$$=2.3\ldots(n-1)\left[n\cos\left(ny+\frac{n\pi}{2}\right)\cos^n y-n\sin\left(ny+\frac{n\pi}{2}\right)\cos^{n-1} y\sin y\right]\cos^2 y$$

$$=2.3\ldots n\cdot\left[\cos\left(ny+\frac{n\pi}{2}\right)\cos y-\sin\left(ny+\frac{n\pi}{2}\right)\sin y\right]\cos^{n+1} y$$

$$=2.3\ldots n\cos\left(ny+y+\frac{n\pi}{2}\right)\cos^{n+1} y=2.3\ldots n\sin\left[(n+1)y+(n+1)\frac{\pi}{2}\right]\cos^{n+1} y.$$

Da diese Formel aus der obigen folgt, wenn man $n+1$ für n setzt, und letztere für $n=2,3$ bewiesen ist, so gilt sie also auch für $n=4$, ... d. h. für alle n. (Man vergleiche wegen dieses Schlusses den Beweis des Satzes (16) in §. 10.)

Man wird nun auch leicht folgende allgemeine Sätze für richtig erkennen:

$\frac{\partial^n y}{\partial x^n}$ ist der n^{te} Differentialquotient von y, der $n-1^{te}$ von $\frac{\partial y}{\partial x}$, der $n-2^{te}$ von $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, ..., der erste von $\frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}}$.

$$\frac{\partial^n(y\pm z\pm u\ldots)}{\partial x^n}=\frac{\partial^n y}{\partial x^n}\pm\frac{\partial^n z}{\partial x^n}\pm\frac{\partial^n u}{\partial x^n}\ldots\quad \frac{\partial^n(y+C)}{\partial x^n}=\frac{\partial^n y}{\partial x^n},\ \frac{\partial^n(Cy)}{\partial x^n}=C\frac{\partial^n y}{\partial x^n}.$$

§. 10.

Nach §. 4. V ist

$$\frac{\partial}{\partial x}(yz)=y\frac{\partial z}{\partial x}+z\frac{\partial y}{\partial x}.$$

* Diese Beweisform besteht darin, anzunehmen, es sey die behauptete Gleichung wahr für alle n bis zu einem bestimmten Werthe r (also für $n=1,2,\ldots r$), wie denn in unserem Falle dies für $n=2,3$ wahr ist. Alsdann weist man nach, dass dieselbe Formel, unter dieser Voraussetzung, auch noch gilt, wenn $n=r+1$, und hat dann den Satz bewiesen. Für unsern Fall wäre also die Behauptung bewiesen für $n=3$, folglich wäre sie nach dem eben Gesagten auch wahr für $n=4$; mithin da sie für $n=4$ jetzt wahr ist, so ist sie auch richtig für $n=5$ u. s. w. für alle n.

Differenzirt man nochmals, so ist

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(yz)=\frac{\partial}{\partial x}\left(y\frac{\partial z}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(z\frac{\partial y}{\partial x}\right)=y\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial x}+z\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=y\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}z.$$

Ich behaupte nun, es sey allgemein

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n}(yz)=y\frac{\partial^n z}{\partial x^n}+\frac{n}{1}\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial^{n-1} z}{\partial x^{n-1}}+\frac{n(n-1)}{1.2}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\frac{\partial^{n-2} z}{\partial x^{n-2}}+\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\frac{\partial^{n-3} z}{\partial x^{n-3}}+\ldots$$
$$\ldots\ldots+\frac{\partial^n y}{\partial x^n}z, \qquad (16)$$

in welcher Gleichung das Fortschreitungsgesetz für y und z wohl klar ist, und in der die Koeffizienten sind:

$$1,\ \frac{n}{1},\ \frac{n(n-1)}{1.2},\ \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3},\ldots\ldots\ldots\ldots 1, \qquad (16')$$

der Anzahl nach $n+1$, wobei der letzte auch $=\frac{n(n-1)\ldots\ldots1}{1.2\ldots\ldots n}$ seyn würde, wenn man das zu Anfang ausgesprochene Bildungsgesetz beibehält. Die Koeffizienten (16′) haben die Eigenschaft, dass diese Reihe vor- oder rückwärts gelesen dieselbe ist;* bekanntlich heissen sie die **Binomialkoeffizienten**. Um die allgemeine Giltigkeit des Satzes (16) zu beweisen, beachten wir, dass für $n=2$ aus demselben folgen würde

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(yz)=y\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\frac{\partial y}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}z,$$

was wir bereits als richtig erkannt haben. Wir wollen also annehmen, der Satz (16) gelte für $n=r$ und fragen, ob er dann auch noch gilt für $n=r+1$. Man hat also (als richtig bekannt):

$$\frac{\partial^r}{\partial x^r}(yz)=y\frac{\partial^r z}{\partial x^r}+\frac{r}{1}\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial^{r-1} z}{\partial x^{r-1}}+\frac{r(r-1)}{1.2}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\frac{\partial^{r-2} z}{\partial x^{r-2}}+\ldots\ldots\ldots+\frac{\partial^r y}{\partial x^r}z.$$

Differenzirt man nochmals, so erhält man (§. 4. III, IV, V):

$$\frac{\partial^{r+1}}{\partial x^{r+1}}(yz)=y\frac{\partial^{r+1} z}{\partial x^{r+1}}+\frac{r}{1}\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial^r z}{\partial x^r}+\frac{r(r-1)}{1.2}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\frac{\partial^{r-1} z}{\partial x^{r-1}}+\ldots+\frac{\partial^r y}{\partial x^r}\frac{\partial z}{\partial x}$$
$$+\frac{\partial y}{\partial z}\frac{\partial^r z}{\partial x^r}+\frac{r}{1}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\frac{\partial^{r-1} z}{\partial x^{r-1}}+\ldots+\frac{r}{1}\frac{\partial^r y}{\partial x^r}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial^{r+1} y}{\partial x^{r+1}}z.$$

Addirt man nun, so erhält man wegen:

$$\frac{r(r-1)}{1.2}+\frac{r}{1}=\frac{r}{1}\left(\frac{r-1}{2}+1\right)=\frac{r}{1}\frac{r+1}{2}=\frac{(r+1)r}{1.2},$$

---

* Das $r+1^{te}$ Glied der Reihe, von Anfang her, ist $=\frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{1.2\ldots\ldots\ldots r}$, das $r+1^{te}$, von Ende her $=\frac{n(n-1)\ldots(r+1)}{1.2\ldots\ldots(n-r)}$. Aber es ist $\frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{1.2\ldots\ldots\ldots r}=\frac{n(n-1)\ldots\ldots}{1.2\ldots\ldots\ldots}$ $\frac{\ldots(n-r+1)(n-r)\ldots.1}{\ldots\ldots r\ .\ (n-r)\ldots.1}$, also wenn man im Zähler und Nenner $1-2\ldots r$ weglässt: $\frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{1.2\ldots\ldots\ldots r}=\frac{n(n-1)\ldots(r+1)}{(n-r)\ldots\ldots1}=\frac{n(n-1)\ldots(r+1)}{1.2\ldots\ldots(n-r)}$, was die Behauptung beweist.

$$\frac{r(r-1)(r-2)}{1.2.3}+\frac{r(r-1)}{1.2}=\frac{r(r-1)}{1.2}\left(\frac{r-2}{3}+1\right)=\frac{r(r-1)}{1.2}\cdot\frac{r+1}{3}=\frac{(r+1)r(r-1)}{1.2.3},$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$\frac{\partial^{r+1}}{\partial x^{r+1}}(yz)=y\frac{\partial^{r+1}z}{\partial x^{r+1}}+\frac{(r+1)}{1}\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial^r z}{\partial x^r}+\frac{(r+1)r}{1.2}\frac{\partial^2 y}{\partial y^2}\frac{\partial^{r-1}z}{\partial x^{r-1}}+\ldots\ldots+\frac{\partial^{r+1}y}{\partial x^{r+1}}z.$$

Da diese Gleichung aus (16) folgt, wenn man $n=r+1$ setzt, so ist damit bewiesen, dass wenn (16) gilt für $n=r$, sie auch noch giltig ist für $n=r+1$. Nun gilt (16) für $n=2$, also auch für $n=3$; mithin nunmehr auch für $n=4$, da sie ja für $n=3$ gilt; eben so jetzt für $n=5$ u. s. w. für alle ganzen positiven n. Wie schon in §. 9. gesagt, heisst man diese Beweisart den „Schluss von n auf $n+1$."

Wir wollen nun von dem Satze (16) einige Anwendungen machen.

I. Da $\frac{\partial e^{ax}}{\partial x}=ae^{ax}$, $\frac{\partial^2 e^{ax}}{\partial x^2}=a^2e^{ax}, \ldots\ldots, \frac{\partial^n e^{ax}}{\partial x^n}=a^n e^{ax}$, so sey in (16) $y=e^{bx}$, $z=e^{ax}$, also $yz=e^{(a+b)x}$, $\frac{\partial^n(yz)}{\partial x^n}=(a+b)^n e^{(a+b)x}$, und man hat:

$$(a+b)^n e^{(a+b)x}=e^{bx}a^n e^{ax}+\frac{n}{1}be^{bx}a^{n-1}e^{ax}+\frac{n(n-1)}{1.2}b^2e^{bx}a^{n-2}e^{ax}+\ldots+b^n e^{bx}e^{ax}.$$

Da der Faktor $e^{(a+b)x}=e^{bx}e^{ax}$ beiderseitig vorhanden ist, so kann man durch ihn dividiren und hat:

$$(a+b)^n=a^n+\frac{n}{1}a^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{1.2}a^{n-2}b^2+\ldots\ldots+b^n, \qquad (17)$$

was auch immer a und b seyen. Dies ist der binomische Satz für ein ganzes positives n.

II. Man setze $y=x^a$, $z=x^b$ und beachte, dass $\frac{\partial^n x^m}{\partial x^n}=m(m-1)\ldots(m-n+1)x^{m-n}$, so folgt aus (16), indem $yz=x^a x^b=x^{a+b}$, $\frac{\partial^n x^{a+b}}{\partial x^n}=(a+b)(a+b-1)\ldots\ldots(a+b-n+1)x^{a+b-n}$:

$$\begin{aligned}(a+b)(a+b-1)\ldots(a+b-n+1)x^{a+b-n}&=x^a\,.\,b(b-1)\ldots(b-n+1)x^{b-n}\\ &+\frac{n}{1}ax^{a-1}b(b-1)\ldots(b-n+2)x^{b-n+1}+\frac{n(n-1)}{1.2}a(a-1)x^{a-2}b(b-1)\ldots\\ &\ldots(b-n+3)x^{b-n+2}+\ldots\ldots+a(a-1)\ldots(a-n+1)x^{a-n}x^b.\end{aligned}$$

Man sieht leicht, dass x^{a+b-n} beiderseitig Faktor ist; lässt man ihn weg, so ist

$$(a+b)(a+b-1)\ldots(a+b-n+1)=b(b-1)\ldots(b-n+1)+\frac{n}{1}ab(b-1)\ldots(b-n+2)$$
$$+\frac{n(n-1)}{1.2}a(a-1)b(b-1)\ldots(b-n+3)+\ldots\ldots+a(a-1)\ldots(a-n+1).$$

Dividirt man endlich beiderseitig durch $1.2\ldots.n$, so findet sich leicht:

$$\frac{(a+b)(a+b-1)\ldots(a+b-n+1)}{1\ldots..2\ldots\ldots\ldots\ldots n}=\frac{b(b-1)\ldots(b-n+1)}{1.2\ldots\ldots n}+\frac{a}{1}\cdot\frac{b(b-1)\ldots(b-n+2)}{1.2\ldots.(n-1)}$$
$$+\frac{a(a-1)}{1.2}\cdot\frac{b(b-1)\ldots(b-n+3)}{1.2\ldots..(n-2)}+\ldots\ldots\ldots+\frac{a(a-1)\ldots(a-n+1)}{1.2\ldots\ldots\ldots n}, \qquad (18)$$

a und b mögen seyn, was sie wollen. (Ein anderer Beweis dieses Satzes findet sich in meinen „Grundzügen" S. 3 ff., so wie der Satz (17) in S. 1 bewiesen ist.)

III. Man soll den Werth von

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n}\left[(x-a)^m \varphi(x)\right]$$

ermitteln, wenn $x=a$ und m eine positive ganze Zahl ist, wobei vorausgesetzt ist, dass $\varphi(x)$, $\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x}, \ldots\ldots, \frac{\partial^n \varphi(x)}{\partial x^n}$ für $x=a$ nicht unendlich gross werden.

Man hat aus (16):

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n}[(x-a)^m \varphi(x)] = (x-a)^m \varphi^n(x) + \frac{n\,m}{1}(x-a)^{m-1}\varphi^{n-1}(x) + \frac{n(n-1)}{1.2}\,m\,(m-1)$$
$$(x-a)^{m-2}\varphi^{n-2}(x) + \ldots + m(m-1)\ldots(m-n+1)(x-a)^{m-n}\varphi(x),$$

wenn man die Differentialquotienten von $\varphi(x)$ mit $\varphi'(x), \ldots, \varphi^n(x)$ bezeichnet.

Die oben angegebene Gleichung setzt allerdings stillschweigend voraus, dass $m>n$ sey, da sonst die letzten Glieder bereits weggefallen wären; ist nämlich $m<n$, so ist $\frac{\partial^m (x-a)^m}{\partial x^m} = m(m-1)\ldots 1$, $\frac{\partial^{m+1}(x-a)^m}{\partial x^{m+1}} = 0$ u. s. w.,

also schliesst dann die Reihe mit dem $m+1^{ten}$ Gliede, d. h. mit $\frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{1.2\ldots\ldots m}$

$. \, m(m-1)\ldots 1\, \varphi^{n-m}(x) = n(n-1)\ldots(n-m+1)\,\varphi^{n-m}(x)$.

Bezeichnen wir nun durch $\varphi^r(a)$ den Werth von $\varphi^r(x)$ für $x=a$, so folgt offenbar aus obiger Gleichung: Es ist für $x=a$

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n}[(x-a)^m \varphi(x)] = \left\{\begin{array}{l} 0, \text{ wenn } m>n, \\ m(m-1)\ldots 1\,\varphi(a), \text{ wenn } m=n. \\ n(n-1)\ldots(n-m+1)\,\varphi^{n-m}(a), \text{ wenn } m<n. \end{array}\right\} \quad (19)$$

IV. Setzt man in (19) $\varphi(x) = \frac{\psi(x)^n}{\psi(x)^m} = \psi(x)^{n-m}$, wobei wir $\psi(a)$ nicht $=0$ voraussetzen wollen, so ist:

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n}\left[\left(\frac{x-a}{\psi(x)}\right)^m \psi(x)^n\right]_{x=a} = \left\{\begin{array}{l} 0, \text{ wenn } m>n, \\ m(m-1)\ldots 1, \text{ wenn } m=n, \\ n(n-1)\ldots(n-m+1)\frac{\partial^{n-m}}{\partial x^{n-m}}\left[\psi(x)^{n-m}\right]_{x=a}, m<n \end{array}\right. \quad (20)$$

wobei die Anhängung von $x=a$ bedeutet, man solle nach vollzogener Differentiation $x=a$ setzen und beachtet wird, dass für $n=m$: $\frac{\psi(a)^n}{\psi(a)^m}=1$ ist.

Setzt man endlich in (19): $\varphi(x) = \frac{1}{\psi(x)^m}\frac{\partial}{\partial x}[\psi(x)^n] = n\,\psi(x)^{n-m-1}\,\psi'(x)$, setzt $\psi(a)$ nicht $=0$ voraus, nimmt aber nur den $n-1^{ten}$ Differentialquotienten, so hat man:

$$\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}\left[\left(\frac{x-a}{\psi(x)}\right)^m \frac{\partial}{\partial x}\left(\psi(x)\right)^n\right]_{x=a} = \begin{cases} 0, \text{ wenn } m > n-1, \\ m(m-1)\ldots 1.n\,\psi(a)^{n-m-1}\psi'(a), \text{ wenn } m = n-1, \\ (n-1)(n-2)\ldots(n-m)\dfrac{\partial^{n-m-1}}{\partial x^{n-m-1}}\Big[n\,\psi(x)^{n-m-1} \\ \qquad \psi'(x)\Big]_{x=a}, \text{ wenn } m < n-1. \end{cases}$$

Aber für $m = n-1$ ist $m(m-1)\ldots 1.n\psi(a)^{n-m-1}\psi'(a) = n(n-1)\ldots 1\,\psi'(a)$; ferner ist

$$(n-1)\ldots(n-m)\frac{\partial^{n-m-1}}{\partial x^{n-m-1}}\left[n\,\psi(x)^{n-m-1}\psi'(x)\right] = n(n-1)\ldots\ldots(n-m)\frac{\partial^{n-m-1}}{\partial x^{n-m-1}}$$

$$\left[\frac{1}{n-m}\frac{\partial}{\partial x}\left(\psi(x)\right)^{n-m}\right] = n(n-1)\ldots(n-m+1)\frac{\partial^{n-m-1}}{\partial x^{n-m-1}}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\psi(x)\right)^{n-m}\right]$$

$$= n(n-1)\ldots(n-m+1)\frac{\partial^{n-m}}{\partial x^{n-m}}\left(\psi(x)\right)^{n-m},$$

so dass endlich

$$\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}\left[\left(\frac{x-a}{\psi(x)}\right)^m \frac{\partial}{\partial x}\left(\psi(x)\right)^n\right]_{x=a} = \begin{cases} 0, \text{ wenn } m > n-1, \\ n(n-1)\ldots 1\,\psi'(a), \text{ wenn } m = n-1, \\ n(n-1)\ldots(n-m+1)\dfrac{\partial^{n-m}}{\partial x^{n-m}}\left[\psi(x)^{n-m}\right]_{x=a}, \\ \qquad \text{wenn } m < n-1. \end{cases} \quad (21)$$

V. Sey $y = \text{arc}(\sin = x)$, also $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}$ $(-2x) = \frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$, so ist offenbar $(1-x^2)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = x\frac{\partial y}{\partial x}$.

Daraus folgt: $\frac{\partial^{n-2}}{\partial x^{n-2}}\left[(1-x^2)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right] = \frac{\partial^{n-2}}{\partial x^{n-2}}\left[x\frac{\partial y}{\partial x}\right]$.

Nun ist $\frac{\partial}{\partial x}(1-x^2) = -2x$, $\frac{\partial^2}{\partial x^2}(1-x^2) = -2$, alle höheren Differentialquotienten davon $= 0$, mithin hat man:

$$(1-x^2)\frac{\partial^n y}{\partial x^n} + \frac{n-2}{1}\frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}}(-2x) + \frac{(n-2)(n-3)}{1.2}\frac{\partial^{n-2} y}{\partial x^{n-2}}(-2) = x\frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}} + \frac{n-2}{1}\frac{\partial^{n-2} y}{\partial x^{n-2}},$$

woraus folgt:
$$(1-x^2)\frac{\partial^n y}{\partial x^n} = (2n-3)x\frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}} + (n-2)^2\frac{\partial^{n-2} y}{\partial x^{n-2}},$$

eine Formel, die $\frac{\partial^n y}{\partial x^n}$ aus $\frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}}$, $\frac{\partial^{n-2} y}{\partial x^{n-2}}$ finden lehrt. Sie gibt:

$$(1-x^2)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = x\frac{\partial y}{\partial x},$$

$$(1-x^2)\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = 3x\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial y}{\partial x},$$

$$(1-x^2)\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 5x\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + 4\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \text{ u. s. w.}$$

VI. Sey $y = \text{arc}(\text{tg} = x)$, also $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{1+x^2} = (1+x^2)^{-1}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -(1+x^2)^{-2}(2x)$ $= -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$, so ist $(1+x^2)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -2x\frac{\partial y}{\partial x}$, woraus ganz wie oben folgt:

$$(1+x^2)\frac{\partial^n y}{\partial x^n} + \frac{n-2}{1}.2x\frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}} + \frac{(n-2)(n-3)}{1.2}2\frac{\partial^{n-2} y}{\partial x^{n-2}} = -2x\frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}} - \frac{n-2}{1}2\frac{\partial^{n-2} y}{\partial x^{n-2}},$$

d. h. $$(1+x^2)\frac{\partial^n y}{\partial x^n} = -2(n-1)x\frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}} - (n-2)(n-1)\frac{\partial^{n-2} y}{\partial x^{n-2}},$$

welche Formel ganz eben so benützt werden kann, wie die entsprechende in V.

§. 11.

Ehe wir weiter gehen, müssen wir noch einer zweiten Darstellungsweise der höheren Differentialquotienten gedenken.

Ist $y = f(x)$, also $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$, so ist (§. 3.)

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \text{Gr.}\,\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Nun ist Δy selbst im Allgemeinen eine Funktion von x, so dass man in ihr auch wieder x in $x+\Delta x$ übergehen lassen und die Aenderung, die dadurch entsteht, untersuchen kann. Dieselbe ist nun mit $\Delta.\Delta y$, oder abkürzungsweise mit $\Delta^2 y$ zu bezeichnen. Da Δx unveränderlich ist, so ist offenbar $\Delta\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = \frac{\Delta^2 y}{\Delta x}$, mithin $\frac{\Delta\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)}{\Delta x} = \frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}$, und also

$$\text{Gr.}\,\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} = \text{Gr.}\,\frac{\Delta\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)}{\Delta x}.$$

Lässt man hier Δx mehr und mehr abnehmen, so nähert sich $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ immer mehr der Grösse $\frac{\partial y}{\partial x}$, also $\frac{\Delta\left(\frac{\Delta y}{\Delta y}\right)}{\Delta x}$ der Grösse $\frac{\partial\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)}{\partial x} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, d. h. man hat

$$\text{Gr.}\,\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

Da auch $\Delta^2 y$ wieder eine Funktion von x seyn wird, so wird man auch die Aenderung dieser Grösse, d. h. $\Delta(\Delta^2 y)$ oder $\Delta^3 y$ bilden können; alsdann ist, wie man leicht sieht:

$$\text{Gr.}\,\frac{\Delta^3 y}{\Delta x^3} = \text{Gr.}\,\frac{\Delta\left(\frac{\Delta^2 y}{\Delta x^2}\right)}{\Delta x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}.$$

Allgemein folgt hieraus

$$\text{Gr.}\,\frac{\Delta^n y}{\Delta x^n} = \frac{\partial^n y}{\partial x^n}. \qquad (22)$$

Ist nun $y = f(x)$ und man bildet für $f(x)$, $f(x+\Delta x)$, $f(x+2\Delta x)$, ..., welche Grössen mit y, y_1, y_2, ... bezeichnet werden sollen, die Differenzenreihen nach folgendem Schema:

	1te Differenz	2te Diff.	3te Diff.	4te Diff.	5te Diff.
y					
y_1	$\Delta y = y_1 - y$				
y_2	$\Delta y_1 = y_2 - y_1$	$\Delta^2 y = \Delta y_1 - \Delta y$			
y_3	$\Delta y_2 = y_3 - y_2$	$\Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1$	$\Delta^3 y = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y$		
y_4	$\Delta y_3 = y_4 - y_3$	$\Delta^2 y_2 = \Delta y_3 - \Delta y_2$	$\Delta^3 y_1 = \Delta^2 y_2 - \Delta^2 y_1$	$\Delta^4 y = \Delta^3 y_1 - \Delta^3 y$	
y_5	$\Delta y_4 = y_5 - y_4$	$\Delta^2 y_3 = \Delta y_4 - \Delta y_3$	$\Delta^3 y_2 = \Delta^2 y_3 - \Delta^2 y_2$	$\Delta^4 y_1 = \Delta^3 y_2 - \Delta^3 y_1$	$\Delta^5 y = \Delta^4 y_1 - \Delta^4 y,$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

so findet man leicht:

$$\Delta y = y_1 - y, \quad \Delta^2 y = \Delta y_1 - \Delta y = y_2 - y_1 - (y_1 - y) = y_2 - 2y_1 + y,$$
$$\Delta^3 y = \Delta^2 y_1 - \Delta^2 y = y_3 - 2y_2 + y_1 - (y_2 - 2y_1 + y) = y_3 - 3y_2 + 3y_1 - y, \ldots$$

allgemein
$$\Delta^n y = y_n - \frac{n}{1} y_{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} y_{n-2} - \ldots\ldots \pm y, \text{*}$$

wo die Reihe mit abwechselnden Zeichen fortschreitet. (Vergl. „Grundzüge" S. 81.) Da $y = f(x)$ u. s. w.; so ist also auch

$$\Delta^n f(x) = f(x + n\Delta x) - \frac{n}{1} f(x + \overline{n-1}\,\Delta x) + \frac{n(n-1)}{1.2} f(x + \overline{n-2}\,\Delta x) - \ldots \pm f(x),$$

und der Satz (22) heisst auch:

$$\text{Gr.} \frac{f(x+n\Delta x) - \frac{n}{1} f(x + \overline{n-1}\,\Delta x) + \frac{n(n-1)}{1.2} f(x + \overline{n-2}\,\Delta x) - \ldots \pm f(x)}{(\Delta x)^n} = \frac{\partial^n f(x)}{\partial x^n}. \quad (22')$$

Speziell erhält man hieraus:

$$\text{Gr.} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x),$$
$$\text{Gr.} \frac{f(x+2\Delta x) - 2f(x+\Delta x) + f(x)}{(\Delta x)^2} = f''(x),$$
$$\text{Gr.} \frac{f(x+3\Delta x) - 3f(x+2\Delta x) + 3f(x+\Delta x) - f(x)}{(\Delta x)^3} = f^3(x), \text{ u. s. w.}$$

Aus (22) folgt allgemein, dass

$$\frac{\Delta^n y}{(\Delta x)^n} = \frac{\partial^n y}{\partial x^n} + \alpha \qquad (23)$$

gesetzt werden könne, wo α mit unendlich abnehmendem Δx ebenfalls unendlich abnimmt, so dass also Gr. $\alpha = 0$. Man kann diese Gleichung auch schreiben:

$$\Delta^n y = \frac{\partial^n y}{\partial x^n} (\Delta x)^n + \alpha (\Delta x)^n, \qquad (23')$$

wo wieder Gr. $\alpha = 0$. So ist also

$$\Delta y = \frac{\partial y}{\partial x} \Delta x + \alpha_1 \Delta x, \quad \Delta^2 y = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} (\Delta x)^2 + \alpha_2 (\Delta x)^2, \ldots,$$

wo Gr. $\alpha_1 = 0$, Gr. $\alpha_2 = 0, \ldots$

§. 12.

Seyen y, z Funktionen von x, $f(y, z)$ eine Funktion beider Grössen, so ist (§. 7. I)

* Welcher Satz leicht durch den Schluss von n auf n + 1 bewiesen werden kann.

$$\frac{\partial}{\partial x} f(y,z) = \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}.$$

Demnach (§. 4. V, IV):

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(y,z) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$$

Nun sind $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$ im Allgemeinen wieder Funktionen von y und z, so dass wieder (§. 7. I):

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial \frac{\partial f}{\partial y}}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial \frac{\partial f}{\partial y}}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}\frac{\partial z}{\partial x},$$

wo nun $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ bedeutet, man solle f(y, z) zweimal blos nach y differenziren, wobei also z als konstant angesehen wird; $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}$, man solle f(y, z) zuerst partiell nach y, dann das Resultat partiell nach z differenziren. Eben so ist

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\frac{\partial z}{\partial x}.$$

Was nun die hier vorkommenden Grössen anbelangt, so ist

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y},$$

d. h. es ist gleichgültig, ob man zuerst nach y und dann nach z, oder in umgekehrter Ordnung differenzirt. Es ist nämlich $\frac{\partial f}{\partial y}$ der Werth, dem $\frac{f(y+\varDelta y, z) - f(y,z)}{\varDelta y}$ mit unendlich abnehmendem $\varDelta y$ sich nähert; ebenso $\frac{\partial f}{\partial z}$ der Gränzwerth von $\frac{f(y, z+\varDelta z) - f(y,z)}{\varDelta z}$ für ein unendlich kleines $\varDelta z$. Daraus folgt sodann, dass $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}$ der Gränzwerth von

$$\frac{\frac{f(y+\varDelta y, z+\varDelta z) - f(y, z+\varDelta z)}{\varDelta y} - \frac{f(y+\varDelta y, z) - f(y,z)}{\varDelta y}}{\varDelta z}$$

für unendlich abnehmende $\varDelta z$ und $\varDelta y$ ist; eben so ist $\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}$ der Gränzwerth von

$$\frac{\frac{f(y+\varDelta y, z+\varDelta z) - f(y+\varDelta y, z)}{\varDelta z} - \frac{f(y, z+\varDelta z) - f(y,z)}{\varDelta z}}{\varDelta y}$$

für unendlich abnehmende $\varDelta y$ und $\varDelta z$. Da aber diese beiden Ausdrücke gleich sind, so sind es auch ihre Gränzwerthe und die Behauptung ist somit gerechtfertigt. Also ist

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(y,z) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$$

Es ist leicht zu übersehen, wie man hier weiter gehen kann, und dass man, um $\frac{\partial^3}{\partial x^3} f(y,z)$ zu bilden, beachten müsste, dass $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial z}\frac{\partial z}{\partial x}, \ldots\ldots, \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 = 2\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ (§. 5.)....

So erhält man

$$\frac{\partial^3}{\partial x^3}f(y,z)=\left[\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial^3 f}{\partial y^2\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right]\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+2\left[\frac{\partial^3 f}{\partial y\partial z\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial^3 f}{\partial y\partial z^2}\frac{\partial z}{\partial x}\right]$$
$$\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial x}+2\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\frac{\partial z}{\partial x}+2\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\left[\frac{\partial^3 f}{\partial z^2\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial^3 f}{\partial z^3}\frac{\partial z}{\partial x}\right]\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$
$$+\left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right]\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}+\left[\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\frac{\partial z}{\partial x}\right]\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}.$$

Da nun, dem Obigen gemäss, bei zwei Differentiationen, die aufeinander folgen, die Ordnung der Differentiation gleichgültig ist, so ist auch

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y\partial z\partial y}=\frac{\partial^3 f}{\partial y\partial y\partial z}=\frac{\partial^3 f}{\partial y^2\partial z},\quad \frac{\partial^3 f}{\partial z^2\partial y}=\frac{\partial^3 f}{\partial z\partial y\partial z}=\frac{\partial^3 f}{\partial y\partial z^2},\text{ u. s. w.},$$

so dass

$$\frac{\partial^3}{\partial x^3}f(y,z)=\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^3+3\frac{\partial^3 f}{\partial y^2\partial z}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\frac{\partial z}{\partial x}+3\frac{\partial^3 f}{\partial y\partial z^2}\frac{\partial y}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial^3 f}{\partial z^3}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^3$$
$$+3\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+3\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\frac{\partial z}{\partial x}+3\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+3\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}.$$

Wie man hier weiter gehen kann, ist wohl klar; ebenso, wie man sich zu benehmen hat, wenn man eine Funktion von mehr als zwei Funktionen von x hat.

Die direkte Rechnung nach den früheren Regeln führt gemeiniglich rascher zum Ziele.

So z. B. um $\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[x^2 y\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^2\right]$ zu finden, hat man (§§. 4. 5):

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[x^2 y\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^2\right]=2xy\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^2+x^2\frac{\partial y}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^2+2x^2 y\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\frac{\partial^3 y}{\partial x^3};$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[x^2 y\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^2\right]=2y\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^2+2x\frac{\partial y}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^2+4xy\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}+2x\frac{\partial y}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^2$$
$$+x^2\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^3+2x^2\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}+4xy\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}+2x^2\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}+2x^2 y\left(\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\right)^2$$
$$+2x^2 y\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}=2y\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^2+4x\frac{\partial y}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^2+8xy\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}+x^2\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^3+4x^2\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$$
$$+2x^2 y\left(\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\right)^2+2x^2 y\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}.$$

Ist eine Gleichung $f(x,y)=0$ gegeben und man soll $\frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\ldots$ daraus bestimmen, so hat man, indem man diese Gleichung nacheinander mehrmals differenzirt (§. 8):

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}=0,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}+\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial x}\right)\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=0,$$

d. h.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=0 \text{ u. s. w.},$$

woraus $\frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2},\ldots$ folgen, indem man zuerst $\frac{\partial y}{\partial x}$ aus der ersten Gleichung bestimmt, und dann diesen Werth in die zweite einsetzt, u. s. w. Im speziellen Falle wird man durch direkte Differenzirung den Zweck eben so leicht erreichen.

Hat man z. B. die Gleichung

$$x e^y + 3x\sin y - 22 = 0,$$

so folgt daraus $\quad e^y + x e^y \frac{\partial y}{\partial x} + 3\sin y + 3x\cos y \frac{\partial y}{\partial x} = 0;$

$$e^y \frac{\partial y}{\partial x} + e^y \frac{\partial y}{\partial x} + x e^y \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + x e^y \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + 3\cos y \frac{\partial y}{\partial x} + 3\cos y \frac{\partial y}{\partial x} - 3x\sin y \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$$
$$+ 3x\cos y \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0,$$

oder $\quad 2e^y \frac{\partial y}{\partial x} + x e^y \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + 6\cos y \frac{\partial y}{\partial x} - 3x\sin y \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + x e^y \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + 3x\cos y \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$, etc.

Anmerkung. Aus dem bisher Dargestellten geht wohl zur Genüge hervor, dass mit Hülfe der Regeln, die im ersten Abschnitt gegeben wurden, die Bildung eines jeden Differentialquotienten möglich ist und einem Anstande wohl nicht unterliegt. Gewöhnlich ist die direkte Differenzirung der nach §. 12 vollzogenen vorzuziehen, da sie natürlich dasselbe Resultat gibt und gewiss leichter im Gedächtniss zu behalten ist. Zur Uebung wollen wir nun noch einige Differentialquotienten vorlegen.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^5 = 5\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^4 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}; \quad \frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 y}{\partial y^2}\right] = 2\frac{\partial y}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^3 y}{\partial x^3};$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[2x^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + x\frac{\partial y}{\partial x}\right] = 5x\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial y}{\partial x} + 2x^2 \frac{\partial^3 y}{\partial x^3};$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{3xy\frac{\partial y}{\partial x}}{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}\right] = \frac{3\left[y\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + x\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + xy\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^2 - xy\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\right]}{\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^2};$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}{x}\right] = \frac{x\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^2 + x\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} - \frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}{x^2};$$

$$\frac{\partial}{\partial x} l\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right) = \frac{\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}}{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}; \quad \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{arc}\left(tg = \frac{\partial y}{\partial x}\right) = \frac{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}.$$

§. 13.

Bereits in §. 3 haben wir auf die geometrische Bedeutung der Grösse $\frac{\partial y}{\partial x}$ aufmerksam gemacht. Wir wollen hier nun noch einige verwandte Untersuchungen über Bedeutung von Differentialquotienten zufügen.

I. Sey y eine stetige Funktion von x, und es nehme x um das positive Δx zu, werde also zu $x + \Delta x$, so wird y zu $y + \Delta y$ werden, und wenn nun Δy positiv ist, so hat y zugenommen; ist dagegen Δy negativ, so hat y abgenommen. Da wir Δx positiv voraussetzen, so werden wir offenbar auch sagen können: Wenn $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ positiv ist, so hat y zugenommen; dagegen abgenommen, wenn dieser Bruch negativ ist. Denken wir uns nun Δx sehr klein, so wird natürlich das Gesagte ganz eben so gelten, und immer wahr seyn, wie klein auch Δx seyn mag. Da aber (§. 11)

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\partial y}{\partial x} + \alpha,$$

und α sehr klein ist, wenn Δx es ist, so wird für ein Δx, das klein genug

ist, die Grösse $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ dasselbe Zeichen haben, wie $\frac{\partial y}{\partial x}$, indem letztere Grösse einen bestimmten endlichen Werth hat, also schliesslich immer gegen α überwiegen wird, wenn nicht etwa für den speziellen Fall $\frac{\partial y}{\partial x}=0$ wäre, was wir nicht voraussetzen. Hieraus folgt der nachstehende Satz: Ist (für einen bestimmten Werth von x) $\frac{\partial y}{\partial x}$ positiv, so wächst y mit wachsendem x und nimmt also auch ab mit abnehmendem x; ist dagegen $\frac{\partial y}{\partial x}$ negativ, so nimmt y ab mit wachsendem x, nimmt also zu mit abnehmendem x.

Da z. B. $\frac{\partial \sin x}{\partial x}=\cos x$, und $\cos x$ positiv ist von $x=0$ bis $x=\frac{\pi}{2}$, $x=\frac{3}{2}\pi$ bis 2π, aber negativ von $x=\frac{\pi}{2}$ bis $x=\frac{3\pi}{2}$; so wird also $\sin x$ wachsen von $x=0$ bis $x=\frac{\pi}{2}$ und $x=\frac{3}{2}\pi$ bis $x=2\pi$, dagegen abnehmen von $x=\frac{\pi}{2}$ bis $x=\frac{3\pi}{2}$.

Da ja auch

$$\Delta y=\frac{\partial y}{\partial x}\Delta x+\alpha\Delta x,$$

und für ein sehr kleines Δx auch α schon sehr klein ist, so schliesst man hieraus leicht noch, dass y um so bedeutender sich ändern wird, je grösser der Werth von $\frac{\partial y}{\partial x}$ ist.

Natürlich wird man ebenso auch sagen können, dass $\frac{\partial y}{\partial x}$ mit wachsendem x zu- oder abnehme, wenn $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ positiv oder negativ ist; dessgleichen $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ mit solchem x zu- oder abnehme, wenn $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$ positiv oder negativ ist, u. s. w.

II. Seyen $f(x)$, $F(x)$ zwei stetige Funktionen von x, die beide Null sind für $x=0$; sey ferner von $x=0$ bis $x=h$ die Grösse $F'(x)$ immer von demselben Zeichen, also immer positiv oder immer negativ; endlich seyen A und B bezüglich der grösste und kleinste Werth, den der Bruch $\frac{f'(x)}{F'(x)}$ annimmt, wenn man x von 0 bis h gehen lässt, wobei wir A und B als endliche Werthe voraussetzen wollen, so hat man also für alle diese Werthe von x:

$$\frac{f'(x)}{F'(x)}-A<0,\ \frac{f'(x)}{F'(x)}-B>0,$$

so dass da $F'(x)$ für alle diese Werthe dasselbe Zeichen hat, von den Grössen

$$F'(x)\left[\frac{f'(x)}{F'(x)}-A\right]=f'(x)-AF'(x) \text{ und } F'(x)\left[\frac{f'(x)}{F'(x)}-B\right]=f'(x)-BF'(x)$$

immer jede für sich dasselbe Zeichen beibehalten wird, jede aber ein anderes, so dass immer von $x=0$ bis $x=h$ entweder:

$$f'(x)-AF'(x)>0 \text{ und } f'(x)-BF'(x)<0, \text{ oder } f'(x)-AF'(x)<0 \text{ und } f'(x)-BF'(x)>0.$$

Da aber

$$f'(x)-AF'(x)=\frac{\partial}{\partial x}[f(x)-AF(x)],\ f'(x)-BF'(x)=\frac{\partial}{\partial x}[f(x)-BF(x)],$$

so werden also nach Nr. I die Grössen $f(x)-AF(x)$, $f(x)-BF(x)$ so

beschaffen seyn, dass die eine beständig wächst, die andere beständig abnimmt von $x=0$ bis $x=h$. Da für $x=0$ beide Null sind, indem $f(x)$, $F(x)$ es sind, so wird also die eine immer positiv, die andere immer negativ seyn, d. h. die Grössen

$$f(x)-AF(x),\ f(x-BF(x)$$

haben immer verschiedenes Zeichen von $x=0$ bis $x=h$. Da $F'(x)$ immer von demselben Zeichen bleibt, so wird $F(x)$ nur beständig zu- oder abnehmen, also da $F(0)=0$, von $x=0$ bis $x=h$ immer dasselbe Zeichen haben, so dass auch von den Grössen

$$\frac{f(x)-AF(x)}{F(x)}=\frac{f(x)}{F(x)}-A \text{ und } \frac{f(x)-BF(x)}{F(x)}=\frac{f(x)}{F(x)}-B$$

immer jede dasselbe Zeichen beibehalten wird, die eine immer negativ, die andere immer positiv. Also liegt auch $\frac{f(x)}{F(x)}$ von $x=0$ bis $x=h$ zwischen A und B, d. h. auch $\frac{f(h)}{F(h)}$ liegt zwischen A und B. Da A und B die äussersten Werthe von $\frac{f'(x)}{F'(x)}$ sind, so wird eine jede Grösse, die zwischen A und B liegt, als ein Werth von $\frac{f'(x)}{F'(x)}$ angesehen werden können für einen Werth von x, der zwischen 0 und h ist. * Daraus folgt, dass man setzen dürfe:

$$\frac{f(h)}{F(h)}=\frac{f'(h_1)}{F'(h_1)},\ h_1 \text{ zwischen 0 und h.} \qquad (a)$$

Diese Gleichung setzt voraus, dass $f(x)$ und $F(x)$ endlich seyen von $x=0$ bis $x=h$; dass $F(0)=0$, $f(0)=0$; $F'(x)$ immer dasselbe Zeichen habe von $x=0$ bis $x=h$ und $\frac{f'(x)}{F'(x)}$ endlich bleibe von $x=0$ bis $x=h$.

Damit wäre der Fall, dass $F'(0)=0$ wäre, scheinbar ausgeschlossen. Ist aber dann auch zugleich $f'(0)=0$, so ist $\frac{f'(x)}{F'(x)}$ für $x=0$ desswegen nicht unendlich, so dass also der Fall $F'(0)=0$, $f'(0)=0$ immer noch zur Formel (a) führt.

Gesetzt nun, es seyen $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, ..., $f^n(x)$ Null für $x=0$; dessgleichen auch $F(x)$, $F'(x)$, ..., $F^n(x)$; es behalte ferner $F^{n+1}(x)$ von $x=0$ bis $x=h$ dasselbe Zeichen und sey $\frac{f^{n+1}(x)}{F^{n+1}(x)}$ endlich von $x=0$ bis $x=h$, so wird $F^n(x)$ von $x=0$ bis $x=h$ beständig wachsen oder abnehmen, also da $F^n(0)=0$, so wird $F^n(x)$ von $x=0$ bis $x=h$ immer dasselbe Zeichen haben (N. I); dessgleichen nun auch $F^{n-1}(x)$, ..., $F(x)$. Man hat also, gemäss (a), wie man leicht übersieht:

$$\frac{f(h)}{F(h)}=\frac{f'(h_1)}{F'(h_1)};\ \frac{f'(h_1)}{F'(h_1)}=\frac{f''(h_2)}{F''(h_2)};\ \frac{f''(h_2)}{F''(h_2)}=\frac{f^3(h_3)}{F^3(h_3)}, \ldots;\ \frac{f^n(h_n)}{F^n(h_n)}=\frac{f^{n+1}(h_{n+1})}{F^{n+1}(h_{n+1})},$$

* Denkt man sich in $\frac{f'(x)}{F'(x)}$ die Grösse x stetig von 0 bis h fortschreitend, so wird dieser Bruch, der stetig ist, alle möglichen Werthe zwischen A und B annehmen. Jeder Zahlwerth C, zwischen A und B, wird demnach einer der Werthe jenes Bruchs seyn können.

wo h_1 zwischen 0 und h; h_2 zwischen 0 und h_1; ...., h_{n+1} zwischen 0 und h_n liegt, mithin jede der Grössen $h_1, h_2, \ldots, h_{n+1}$ auch zwischen 0 und h. Daraus folgt also

$$\frac{f(h)}{F(h)}=\frac{f^{n+1}(h')}{F^{n+1}(h')},\ h' \text{ zwischen 0 und h.} \qquad (A)$$

Diese Gleichung setzt voraus, dass $f(0)=f'(0)=f''(0)=\ldots=f^n(0)=F(0)=F'(0)=\ldots=F^n(0)=0$; dass $F^{n+1}(x)$ von $x=0$ bis $x=h$ immer dasselbe Zeichen habe; dass nicht $F^{n+1}(0)=0$ wenn nicht auch $f^{n+1}(0)=0$; dass endlich $\frac{f^{n+1}(x)}{F^{n+1}(x)}$ stetig sey von $x=0$ bis $x=h$, eben so $\frac{f^n(x)}{F^n(x)}, \ldots, \frac{f'(x)}{F'(x)}, \frac{f(x)}{F(x)}$. Da übrigens die Grössen $F^n(x), F^{n-1}(x), \ldots, F(x)$ sämmtlich nicht Null werden zwischen $x=0$ und $x=h$, mit Ausnahme des Werthes $x=0$, für den aber auch $f^n(x), \ldots, f'(x), f(x)$ Null sind, so wird diese letzte Bedingung erfüllt seyn, wenn nur die Zähler nicht unendlich werden.

III. Sey $F'(x)$ endlich, wenn man x alle Werthe, von $x=z$ bis $x=z+h$ beilegt, so ist, wenn Δx dieselbe Bedeutung wie früher, hat

$$F(x+\Delta x)-F(x)=F'(x)\Delta x+\alpha\Delta x \text{ (§. 11)},$$

wo α mit unendlich klein werdendem Δx selbst unendlich klein wird. Sey nun $\Delta x=\frac{h}{n}$, also $h=n\Delta x$, so ist hieraus, indem man nach einander $x=z, z+\Delta x, z+2\Delta x \ldots, z+(n-1)\Delta x$ setzt:

$$\begin{aligned}
&F(z+\Delta x)-F(z)=F'(z).\Delta x+\alpha_1\Delta x,\\
&F(z+2\Delta x)-F(z+\Delta x)=F'(z+\Delta x).\Delta x+\alpha_2\Delta x,\\
&F(z+3\Delta x)-F(z+2\Delta x)=F'(z+2\Delta x)\Delta x+\alpha_3\Delta x.\\
&\qquad\vdots\\
&F(z+n\Delta x)-F(z+\overline{n-1}\,\Delta x)=F'(z+\overline{n-1}\,\Delta x)\Delta x+\alpha_n\Delta x,
\end{aligned}$$

worin die Grössen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sämmtlich unendlich klein werden, wenn Δx es ist. Addirt man nun diese Gleichungen und beachtet, dass $n\Delta x=h$, so hat man

$$\begin{aligned}F(z+h)-F(z)=\Delta x\,[F'(z)+F'(z+\Delta x)+F'(z+2\Delta x)+\ldots+F'(z+h-\Delta x)]\\
+\Delta x\,[\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n],\end{aligned}$$

oder da $\Delta x=\frac{h}{n}$:

$$F(z+h)-F(z)=\frac{h}{n}\left[F'(z)+F'\left(z+\frac{h}{n}\right)+\ldots+F'\left(z+h-\frac{h}{n}\right)\right]+\frac{h}{n}(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n).$$

Lässt man hier n immer grösser werden, so werden $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ immer kleiner, weil Δx es wird; was ferner die Summe $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n$ anbelangt, so ist sie sicherlich kleiner als $n\alpha_r$, wenn α_r die grösste der einzelnen Grössen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ ist, und grösser als $n\alpha_s$, wenn α_s die kleinste ist.

Demnach ist
$$\frac{h}{n}(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n)\begin{matrix}<h\alpha_r\\>h\alpha_s.\end{matrix}$$

und da mit zunehmendem n die beiden Grössen $h\alpha_r$, $h\alpha_s$ fortwährend abnehmen, so wird also

$$\text{Gr.}\,\frac{h}{n}(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n)=0$$

seyn, wenn das Zeichen Gr. sich auf ein unendlich zunehmendes n bezieht (§. 2. III). Daraus folgt von selbst:

$$\left.\begin{array}{l}\text{Gr.}\,\frac{h}{n}\left[F'(z)+F'\left(z+\frac{h}{n}\right)+\ldots+F'\left(z+h-\frac{h}{n}\right)\right]=F(z+h)-F(z),\\ \text{d. h. Gr.}\,\Delta x[F'(z)+F'(z+\Delta x)+F'(z+2\Delta x)+\ldots+F'(z+h-\Delta x)]=F(z+h)-F(z).\end{array}\right\}(24)$$

Was aber die erste Seite der Gleichung (24) anbelangt, so lässt sich dieselbe noch etwas anders ausdrücken. Die Grössen $F'(z)$, $F'\left(z+\frac{h}{n}\right)$, ..., $F'\left(z+h-\frac{h}{n}\right)$ werden, wenn n sehr gross ist, die Werthe von $F'(x)$ vorstellen, die man erhält, wenn man x von z bis $z+h$, mit Ausschluss des letzten Werthes, gehen lässt. Je grösser n ist, desto weniger werden zwei unmittelbar auf einander folgende Werthe sich unterscheiden, und man kann somit n sich immer gross genug denken, damit dieser Unterschied beliebig klein sey. Die Grösse

$$\frac{1}{n}\left[F'(z)+F'\left(z+\frac{h}{n}\right)+\ldots F'\left(z+h-\frac{h}{n}\right)\right]$$

liegt nun immer ihrem Werthe nach zwischen der grössten und kleinsten der Grössen $F'(z), \ldots, F'\left(z+h-\frac{h}{n}\right)$, * d. h. zwischen dem grössten und kleinsten der Werthe, die $F'(x)$ annimmt, wenn x von z bis $z+h$ geht. Somit kann dieselbe einem dieser Zwischenwerthe, den man allgemein durch $F'(z+\Theta h)$ bezeichnen kann, wo Θ eine Grösse ist, deren Werth zwischen 0 und 1 liegt, gleich gesetzt werden, so dass

$$F(z+h)-F(z)=h\,F'(z+\Theta h); \qquad (25)$$

worin also nur vorausgesetzt ist, dass $F'(x)$ nicht unstetig werde, wenn x geht von z bis $z+h$. Dieser Satz lässt sich übrigens leicht aus der Gleichung (a) in Nr. II ableiten. Setzt man dort $F(x)=x$, so ist $F'(x)=1$ und behält immer dasselbe Zeichen, so dass

$$\frac{f(h)}{h}=f'(h_1),$$

oder da h_1 zwischen 0 und h, also $=\Theta h$:

$$f(h)=h\,f'(\Theta h).$$

Setzt man hier $\qquad f(h)=F(z+h)-F(z),$

so ist $f(h)$ Null für $h=0$, und $f'(h)=F'(z+h)$, $f'(\Theta h)=F'(z+\Theta h)$, woraus dann sofort (25) folgt.

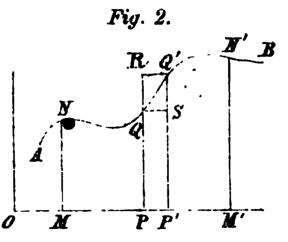
IV. Sey AB eine beliebige krumme Linie (Fig. 2), deren Gleichung für rechtwinklige Koordinatenaxen man kenne; MN die zur Abszisse $OM=a$ gehörige Ordinate, eben so PQ die zu $OP=x$ gehörige Ordinate y, die Fläche $MNQP=u$, so wird u eine Funktion von x seyn, da sicher diese Grösse sich ändert, wenn x sich ändert. Sey also $PP'=\Delta x$, mithin $MNQ'P'=u+\Delta u$,

---

* Da nämlich $F'(z)+\ldots+F'\left(z+h-\frac{h}{n}\right)$ kleiner ist, als das nfache der grössten, und grösser ist als das nfache der kleinsten dieser Grössen.

d. h. $PP'Q'Q = \Delta u$, und man soll $\frac{\partial u}{\partial x}$ ermitteln. Man wird offenbar Δx immer klein genug annehmen können, so dass die krumme Linie zwischen Q und Q' nur steigt oder nur fällt (d. h. dass die Ordinaten zwischen PQ und P'Q' alle wachsen, oder alle abnehmen). Zieht man nun QS, Q'R parallel mit der Abszissenaxe OP, so wird das Rechteck PP'Q'R grösser seyn als Δu, während PP'SQ kleiner ist als Δu. (Würde die Kurve zwischen Q und Q' fallen, so wäre das Umgekehrte richtig; wie man aber leicht sieht, ergibt dies dasselbe Resultat). Da nun $P'Q' = y + \Delta y$, so ist das Rechteck $PP'SQ = y\Delta x$, $PP'Q'R = (y+\Delta y)\Delta x$, so dass also Δu enthalten ist zwischen $y\Delta x$ und $(y+\Delta y)\Delta x$, mithin $\frac{\Delta u}{\Delta x}$ zwischen y und $y+\Delta y$. Lässt man nun Δx unbegränzt abnehmen, so wird auch Δy unendlich abnehmen, so dass y und $y+\Delta y$ mehr und mehr sich nähern. Daraus folgt (§. 2. III), dass Gr. $\frac{\Delta u}{\Delta x} = y$, d. h.

Fig. 2.



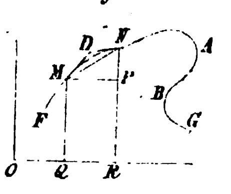
$$\frac{\partial u}{\partial x} = y \text{ (u wachsend mit x und } y > 0).$$

Da (§. 11) $\quad \Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \alpha\Delta x = y\Delta x + \alpha\Delta x$

und α mit unendlich kleinem Δx selbst verschwindend klein wird, so kann man auch sagen, dass für ein unendlich kleines Δx das Flächenstück PP'Q'Q als ein Rechteck von der Grundlinie Δx und der Höhe y anzusehen sey. Wir werden später ein solches (unendlich kleines) Flächenstück ein **Element** der Fläche nennen.

V. Sey FG (Fig. 3) eine beliebige Kurve, $OQ = x$, $QM = y$, $QR = \Delta x$, $RN = y + \Delta y$, ferner der Bogen FM, von dem (beliebigen) Punkte F aus gezählt, gleich s, so ist s eine Funktion von x, also $MN = \Delta s$. Man ziehe nun die Sehne MN, und denke sich an den Punkten M und N die berührenden Geraden MD, DN an die Kurve gezogen. Da man Δx immer klein genug wird annehmen können, dass der Bogen MN seine erhabene Seite immer nach derselben Richtung hin wendet, so ist die Summe der Geraden MD + DN grösser als der Bogen MN, während letzterer grösser ist als die Sehne MN, wie man in der Elementargeometrie beweist (vergl. etwa Legendre, Geometrie, Buch IV, Satz IX).

Fig. 3.



Also ist $\quad MD + DN > \text{Bog. } MN > \text{Sehne } MN,$

woraus auch $\quad \frac{MD + DN}{\text{Sehne } MN} > \frac{\text{Bog. } MN}{\text{Sehne } MN} > 1.$

Je näher aber N und M zusammenrücken, desto mehr fallen MD und DN zusammen, und wird auch MN desto mehr sich MD nähern (§. 3), also wird Gr. $\frac{MD + DN}{\text{Sehne } MN} = 1$, woraus folgt (§. 2. III), dass auch

$$\text{Gr.}\ \frac{\text{Bog. MN}}{\text{Sehne MN}} = 1.$$

Nun ist Sehne $MN = \sqrt{MP^2 + PN^2} = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \Delta x \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}$, wenn wir Δx positiv voraussetzen; ferner $MN = \Delta s$, wenn wir, wie in der Figur, annehmen, es wachse s mit x. Demnach

$$\text{Gr.}\ \frac{\Delta s}{\Delta x \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}} = 1,\ \text{Gr.}\ \frac{\frac{\Delta s}{\Delta x}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}} = 1,\ \frac{\frac{\partial s}{\partial x}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}} = 1,$$

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}.$$

Würde s abnehmen mit wachsendem x, oder, was dasselbe ist, s zunehmen mit abnehmendem x, so wäre $\frac{\Delta s}{\Delta x}$ negativ, und eben so $\frac{\partial s}{\partial x}$ (N. I.), mithin hätte man $\frac{\partial s}{\partial x} = -\sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}$, und also allgemein

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \pm \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2},$$

in welcher Formel das obere Zeichen gilt, wenn s mit x wächst, das untere im entgegengesetzen Falle. Für unsere Figur, wenn s von F aus gerechnet wird, gilt das obere Zeichen von F bis A, und B bis G, dagegen das untere von A bis B. Würde man s von G aus rechnen, so gälte das obere Zeichen von B bis A, das untere von G bis B und von A bis F.

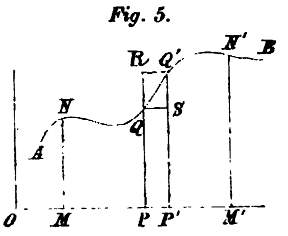
Es folgt hieraus, dass für ein unendlich kleines Δx man das Dreieck, gebildet von $MP = \Delta x$, $PN = \Delta y$ und Bog. $MN = \Delta s$ als geradlinig ansehen darf; denn alsdann folgt $\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2$, $\left(\frac{\Delta s}{\Delta x}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2$, $\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$, was ja richtig ist.

VI. Sey AM (Fig. 4) eine beliebige Kurve, welche auf Polarkoordinaten bezogen sey; O der Pol, OA die Polaraxe. OB sey ein bestimmter Fahrstrahl, $MO = r$ ein zweiter, der zum Winkel $MOA = \omega$ gehöre; u sey der Ausschnitt BOM. Lässt man ω um $MON = \Delta\omega$ wachsen, so nimmt u um den Ausschnitt $MON = \Delta u$ zu, und man wird wieder $\Delta\omega$ klein genug nehmen können, damit zwischen M und N die Fahrstrahlen beständig zu- oder abnehmen. (Für unsere Figur hat das Letztere Statt.) Man ziehe alsdann mit den Halbmessern $OM = r$ und $ON = r + \Delta r$ um O die Kreisbögen MM′, NN′, deren Längen also $r\Delta\omega$, $(r + \Delta r)\Delta\omega$ seyn werden, so ist Δu enthalten zwischen den Kreisausschnitten MOM′, NON′, deren Flächen sind $\frac{r^2 \Delta\omega}{2}$, $\frac{(r + \Delta r)^2 \Delta\omega}{2}$, d. h. $\frac{\Delta u}{\Delta\omega}$ ist enthalten zwischen $\frac{r^2}{2}$ und $\frac{(r + \Delta r)^2}{2} = \frac{r^2}{2} + r\Delta r + \frac{1}{2}(\Delta r)^2$. Lässt man $\Delta\omega$ unendlich klein werden, so werden auch $r\Delta r$, $\frac{1}{2}(\Delta r)^2$ es werden, mithin wird man wie in IV haben:

Fig. 4.

$$\frac{\partial u}{\partial \omega} = \tfrac{1}{2} r^2 \text{ (u wachsend mit } \omega).$$

Man kann also hier sagen, dass das unendlich kleine Element MON als Kreisausschnitt anzusehen sey.



VII. Die krumme Linie NQ (Fig. 5) drehe sich um die Abszissenaxe OP und es beschreibe dadurch die Fläche MPQN einen Körper, dessen Inhalt $= v$ sey; sey ferner $OP = x$, so wird, da MN fest ist, v eine Funktion von x seyn. Sey $PP' = \Delta x$, so wird die Fläche PQP'Q' das Körperstück Δv beschreiben, und dasselbe ist immer zwischen den zwei von PP'QS und PP'RQ' beschriebenen Zylindern enthalten, deren Inhalte sind $y^2 \pi \Delta x$ und $(y + \Delta y)^2 \pi \Delta x$; mithin ist $\frac{\Delta v}{\Delta x}$ enthalten zwischen $y^2 \pi$ und $(y + \Delta y)^2 \pi$, und da mit unendlich abnehmendem Δx, also auch solchem Δy, diese letzeren Grössen sich unbegränzt nähern, so ist (§. 2. III):

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \pi y^2 \text{ (v wachsend mit x).}$$

wo y die zu x gehörige Ordinate der beschreibenden krummen Linie ist.

VIII. Dieselbe Kurve beschreibt bei der Drehung eine krumme Oberfläche und sey z der Inhalt der von NQ beschriebenen Oberfläche, so wird z eine Funktion von x und Δz die von QQ' beschriebene Oberfläche seyn. Zieht man die Sehne $QQ' = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$, so ist die von ihr beschriebene Oberfläche (Mantel eines abgekürzten Kegels, dessen Halbmesser y und $y + \Delta y$ sind) gleich

$$2(y + \tfrac{1}{2}\Delta y)\pi \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}.$$

Ist s der Bogen NQ, also Δs der Bogen QQ', so werden Δs und die Sehne QQ' sich mehr und mehr nähern, also auch die von ihnen beschriebenen Oberflächen, oder mit andern Worten, es ist

$$\text{Gr.} \frac{\Delta z}{2(y + \frac{1}{2}\Delta y)\pi \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} = 1,$$

d. h.

$$\text{Gr.} \frac{\frac{\Delta z}{\Delta x}}{2(y + \frac{1}{2}\Delta y)\pi \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}} = \pm 1,$$

oder

$$\frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{2y\pi \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}} = \pm 1, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \pm 2y\pi \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2},$$

worin das Zeichen immer gemäss den Unterscheidungen in Nr. I zu wählen ist.

IX. Denken wir uns einen Körper geradlinig und gleichförmig bewegt, so heisst man den in der Zeiteinheit (gewöhnlich eine Sekunde) zurückgelegten Weg die Geschwindigkeit desselben.* Gesetzt nun aber, der gerad-

* Ist also x der in der Zeit t zurückgelegte Weg, v die Geschwindigkeit, so hat man $x = vt$, woraus auch $v = \frac{x}{t}$.

linig bewegte Körper bewege sich ungleichförmig, so wird man unter Geschwindigkeit desselben in einem bestimmten Zeitmomente den Weg verstehen, den er in der darauf folgenden Zeiteinheit zurücklegen würde, wenn er sich während derselben genau eben so bewegen würde, wie er sich in dem betreffenden Augenblicke bewegt. Sey also AM (Fig. 6) der Weg x, den

Fig. 6.

A M N

der Körper in der Zeit t zurückgelegt hat, so wird x eine Funktion von t seyn; sey weiter MN der Weg Δx, den der Körper in der darauf folgenden Zeit Δt zurücklegen wird. Die (so eben näher erklärte) Geschwindigkeit des Körpers in M sey v, also da v eine Funktion von t seyn wird, $v+\Delta v$ die Geschwindigkeit in N nach der Zeit $t+\Delta t$; man wird alsdann Δt immer klein genug annehmen können, damit die Geschwindigkeit v, die sich ändert, während dieser Zeit beständig wachse oder abnehme. Es finde nun zunächst das Erstere Statt, d. h. v wachse während der Zeit Δt; alsdann ist sicher MN oder $\Delta x > v\Delta t$, da $v\Delta t$ der Weg wäre, den der Körper in der Zeit Δt zurücklegen würde, wenn die Geschwindigkeit v bliebe; eben so ist $\Delta x < (v+\Delta v)\Delta t$. Daraus folgt, dass $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ immer zwischen v und $v+\Delta v$ enthalten ist, und da diese beiden Grössen sich unbegränzt nähern, wenn Δt (also auch Δv) unbegränzt abnimmt, so hat man

$$v = \frac{\partial x}{\partial t},$$

so dass also $\frac{\partial x}{\partial t}$ die gesuchte Geschwindigkeit ausdrückt. Würde v während der Zeit Δt beständig abnehmen, so wäre $\Delta x < v\Delta t$ und $> (v+\Delta v)\Delta t$, so dass wieder $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ zwischen v und $v+\Delta v$ läge, und man dasselbe Resultat erhielte.

X. Ein Körper, auf den eine sich immer gleich bleibende Kraft fortwährend in derselben Richtung wirkt, bewegt sich geradlinig und so, dass in gleichen Zeiten die Geschwindigkeit um gleich viel vermehrt wird, wenn die Kraft fördernd auf die Bewegung wirkt, oder um gleich viel abnimmt, wenn sie der Bewegung hemmend entgegenwirkt. Diese Aenderung ist überdies der wirkenden Kraft proportional. Gesetzt nun eine mit der Zeit veränderliche Kraft wirke auf einen Körper in immer derselben Richtung ein und sey x der in der Zeit t zurückgelegte Weg, v die am Ende desselben erlangte Geschwindigkeit, also Δx der in der Zeit Δt zurückgelegte Weg, $v+\Delta v$ die nach der Zeit $t+\Delta t$ erlangte Geschwindigkeit; ferner sey φ die am Ende der Zeit t wirksame Kraft, also $\varphi+\Delta\varphi$ die zur Zeit $t+\Delta t$, p das Gewicht des Körpers. Man wird nun wieder Δt klein genug annehmen können, dass φ während der Zeit Δt immer wächst, oder immer abnimmt. Hat zunächst Ersteres Statt, so wird Δv grösser seyn, als die durch eine φ gleich bleibende Kraft während Δt hervorgerufene Zunahme der Geschwindigkeit, und kleiner als die durch $\varphi+\Delta\varphi$ während Δt hervorgebrachte. Was nun die eine oder andere anbelangt, so weiss man, dass der Körper, wenn er unter dem Einflusse seines eigenen Gewichts p (beim freien Falle) steht, in

jeder Sekunde seine Geschwindigkeit um $g(=9{\cdot}80896$ mètres) vermehrt, also in der Zeit Δt um $g\Delta t$, und man würde also die durch φ hervorgebrachte Aenderung z finden aus

$$p:g\Delta t=\varphi:z,\ z=\frac{g\varphi\Delta t}{p},$$

eben so die durch $\varphi+\Delta\varphi$ hervorgebrachte Aenderung $\frac{g(\varphi+\Delta\varphi)\Delta t}{p}$, so dass also $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ immer zwischen $\frac{g\varphi}{p}$ und $\frac{g(\varphi+\Delta\varphi)}{p}$ liegt. Da mit unendlich abnehmendem Δt auch $\Delta\varphi$ unendlich abnimmt, so folgt hieraus

$$\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{g\varphi}{p},\ \varphi=\frac{p}{g}\frac{\partial v}{\partial t},$$

und da (nach IX) $v=\frac{\partial x}{\partial t}$, so ist auch

$$\varphi=\frac{p}{g}\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}.\ *$$

Man sieht leicht, dass dasselbe Resultat noch gilt, wenn die Kraft fortwährend abnimmt.

XI. Man soll einen Kreis durch drei unendlich nahe Punkte einer ebenen krummen Linie legen. Seyen α, β die Koordinaten des Mittelpunkts desselben, ϱ sein Halbmesser, so dass seine Gleichung ist

$$(\xi-\alpha)^2+(v-\beta)^2=\varrho^2,$$

und seyen ferner x, y; x', y'; x'', y'' die Koordinaten der drei Punkte, durch welche derselbe gehen soll, so muss also

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\varrho^2,\ (x'-\alpha)^2+(y'-\beta)^2=\varrho^2,\ (x''-\alpha)^2+(y''-\beta)^2=\varrho^2$$

seyn, aus welchen Gleichungen α, β, ϱ zu bestimmen sind. Zugleich liegen die drei Punkte in einer gegebenen Kurve, deren Gleichung man kennt, und welcher also die Koordinaten jener Punkte genügen müssen. Es ist also y eine Funktion von x, y' dieselbe Funktion von x', und eben so y'' von x''; ist ferner $x'=x+\Delta x$, $x''=x+2\Delta x$, so muss Δx unendlich klein seyn, und wenn nun $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-\varrho^2=X$, so ist $(x'-\alpha)^2+(y'-\beta)^2-\varrho^2=X'$ das, was aus X folgt, indem man x in $x+\Delta x$ übergehen lässt, während y eine Funktion von x ist, gegeben durch die Gleichung der Kurve; eben so $(x''-\alpha)^2+(y''-\beta)^2-\varrho^2=X''$ das, was aus dem nunmehrigen X' hervorgeht, indem man nochmals x in $x+\Delta x$ übergehen lässt.

Also hat man $$X=0,\ X'=0,\ X''=0,$$

woraus auch $$X=0,\ \frac{X'-X}{\Delta x}=0,\ \frac{X''-2X'+X}{(\Delta x)^2}=0,$$

und wenn man hier Δx unendlich klein werden lässt (§. 11):

$$X=0,\ \frac{\partial X}{\partial x}=0,\ \frac{\partial^2 X}{\partial x^2}=0,$$

d. h. $$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\varrho^2,\ x-\alpha+(y-\beta)\frac{\partial y}{\partial x}=0,\ 1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+(y-\beta)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=0,$$

wo $y, \frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ als Funktionen von x aus der Gleichung der gegebenen Kurve folgen. Hieraus:

* v, x und g sind in demselben Maasse auszudrücken; eben so φ und p; t in Sekunden.

$$\beta - y = \frac{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}, \quad \alpha - x = -\frac{\left[1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right]\frac{\partial y}{\partial x}}{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}, \quad \varrho = \pm\frac{\left[1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}.$$

Der Kreis, dessen Mittelpunkt und Halbmesser hiedurch bestimmt sind, heisst der Krümmungskreis der Kurve in dem Punkte, dessen Koordinaten x, y sind. Er ist also derjenige Kreis, dem sich die durch drei Punkte der Kurve gelegten Kreise immer mehr nähern, wenn diese drei Punkte selbst immer näher zusammenrücken. Er misst offenbar die Krümmung der Kurve in dem betreffenden Punkte, und es wird dieselbe desto bedeutender seyn, je kleiner ϱ ist.

Für eine Ellipse etwa wäre $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$, woraus $b^2x+a^2y\frac{\partial y}{\partial x}=0$, $b^2+a^2\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+a^2y\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=0$, und also

$$\frac{\partial y}{\partial x}=-\frac{b^2x}{a^2y}, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=-\frac{b^2(a^2y^2+b^2x^2)}{a^4y^3}=-\frac{a^2b^4}{a^4y^3}=-\frac{b^4}{a^2y^3},$$

$$\varrho=\frac{\left[1+\frac{b^4x^2}{a^4y^2}\right]^{\frac{3}{2}}y^3a^2}{b^4}=\frac{(a^4y^2+b^4x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4},$$

welche Formel für jeden Punkt der Ellipse den Krümmungshalbmesser gibt. Im Scheitel der grossen Axe ist $x=a$, $y=0$, also dann $\varrho=\frac{b^2}{a}$; im Scheitel der kleinen Axe aber $y=b$, $x=0$, also $\varrho=\frac{a^2}{b}$.

§. 14.

Es kann sich ereignen, dass, nachdem y als Funktion von x angesehen worden, man es zweckmässiger findet, statt x eine andere unabhängig Veränderliche u einzuführen, von der x selbst abhängt, oder als abhängig anzusehen ist. Da nun (§. 5)

$$\frac{\partial y}{\partial u}=\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}, \text{ also } \frac{\partial y}{\partial x}=\frac{\frac{\partial y}{\partial u}}{\frac{\partial x}{\partial u}},$$

so folgt also, dass man $\frac{\partial y}{\partial x}$ werde ersetzen durch den ihm gleichen Werth $\frac{\frac{\partial y}{\partial u}}{\frac{\partial x}{\partial u}}$, in dem blos Differentialquotienten nach u vorkommen. Ist überhaupt ϱ irgend eine von x, also auch von u abhängige Grösse, so ist hiernach

$$\frac{\partial \varrho}{\partial x}=\frac{\frac{\partial \varrho}{\partial u}}{\frac{\partial x}{\partial u}}$$

Also auch, wenn $\varrho=\frac{\partial y}{\partial x}$:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)}{\frac{\partial x}{\partial u}}=\frac{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\frac{\partial y}{\partial u}}{\frac{\partial x}{\partial u}}\right)}{\frac{\partial x}{\partial u}}=\frac{\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}-\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\frac{\partial y}{\partial u}}{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^3} \quad (\S. 4. \mathrm{VI}).$$

so dass $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ durch diese letztere Grösse zu ersetzen ist. Eben so:

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)=\frac{\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}-\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\frac{\partial y}{\partial u}}{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^3}\right]}{\frac{\partial x}{\partial u}}=\frac{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2\frac{\partial^3 y}{\partial u^3}-3\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}+3\frac{\partial y}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\right)^2-\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial^3 x}{\partial u^3}}{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^5}$$

Man sieht leicht, dass man diese Umformungen in folgender Weise andeuten kann:

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{\frac{\partial y}{\partial u}}{\frac{\partial x}{\partial u}},\quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)}{\frac{\partial x}{\partial u}},\quad \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}=\frac{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)}{\frac{\partial x}{\partial u}},\ \ldots,\quad \frac{\partial^n y}{\partial x^n}=\frac{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}}\right)}{\frac{\partial x}{\partial u}},$$

worin jeweils für $\frac{\partial y}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}}$ der vorhergehende ausgerechnete Werth zu setzen ist. Hiemit ist die allgemeine Aufgabe der **Vertauschung der unabhängig Veränderlichen** gelöst und wir wenden uns zu den folgenden besonderen Betrachtungen.

I. Soll y als neue unabhängig Veränderliche, x als abhängig von y angesehen werden, was man immer kann, so ist oben $u=y$, also $\frac{\partial y}{\partial y}=1$, (§. 3. I), mithin $\frac{\partial^2 y}{\partial y^2}=0$ (§. 4. I), $\frac{\partial^3 y}{\partial y^3}=0, \ldots$, also

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{1}{\frac{\partial x}{\partial y}},\quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=-\frac{\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}}{\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^3},\quad \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}=\frac{3\left(\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}\right)^2-\frac{\partial x}{\partial y}\frac{\partial^3 x}{\partial y^3}}{\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^5},\ldots$$

Soll z. B. in dem Ausdruck (§. 13, XI)

$$\varrho=+\frac{\left[1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}},$$

in dem y als Funktion von x angesehen ist, umgekehrt x als Funktion von y betrachtet werden, so ist

$$\varrho=\pm\frac{\left[1+\frac{1}{\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2}\right]^{\frac{3}{2}}}{-\frac{\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}}{\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^3}}=\pm\frac{\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^3\left[\frac{\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2+1}{\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2}\right]^{\frac{3}{2}}}{-\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}}=\mp\frac{\left[1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{\partial^2 x}{\partial y^2}}.$$

II. Der Zusammenhang zwischen x und u ist durch eine Gleichung $f(x, u) = 0$ gegeben. Alsdann zieht man hieraus (§. 12) $x, \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}, \ldots$ in u und ersetzt $\frac{\partial y}{\partial x}, \ldots$ wie angegeben.

Soll z. B. in der Gleichung

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + x\frac{\partial y}{\partial x} + a y = 0$$

für x die neue unabhängige Veränderliche ω eingeführt werden, so dass $x = \cos\omega$, so ist $\frac{\partial x}{\partial \omega} = -\sin\omega\ \frac{\partial^2 x}{\partial \omega^2} = -\cos\omega$, also

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial y}{\partial \omega}}{\sin\omega}, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\sin\omega\frac{\partial^2 y}{\partial \omega^2} - \cos\omega\frac{\partial y}{\partial \omega}}{\sin^3\omega},$$

also hat man, wenn man sogleich mit $\sin^3\omega$ multiplizirt:

$$\sin\omega\frac{\partial^2 y}{\partial \omega^2} - \cos\omega\frac{\partial y}{\partial \omega} - \cos\omega\sin^2\omega\frac{\partial y}{\partial \omega} + a y \sin^3\omega = 0,$$

d. h.

$$\frac{\partial^2 y}{\partial \omega^2} - \operatorname{cotg}\omega(1 + \sin^2\omega)\frac{\partial y}{\partial \omega} + a y \sin^2\omega = 0.$$

III. Ist der Zusammenhang zwischen x und u vermittelt durch eine Gleichung, die auch y enthält, also der Form nach durch

$$f(y, x, u) = 0$$

bezeichnet werden kann, so zieht man hieraus, indem man nach u differenzirt und x, y als Funktionen von u ansieht, eine Reihe Gleichungen, vermöge welcher $x, \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}, \ldots$ durch $u, y, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial^2 y}{\partial u^2}, \ldots$ ausgedrückt und in die vorgelegte Form substituirt werden können. Es kann sich dabei auch zutragen, dass die Gleichung, welche den Zusammenhang zwischen x und u geben soll, Differentialquotienten von y und x nach u enthält. Alsdann kann man vielleicht einige der ersten Grössen $x, \frac{\partial x}{\partial u}, \ldots$ nicht ermitteln, die übrigen jedoch durch diese ersten ausdrücken. Besteht z. B. die Gleichung

$$\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2 = 1\,^* \quad \text{(a)}$$

zwischen x, y und der neuen unabhängig Veränderlichen s, so folgt hieraus durch Differentiation (nach s):

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial^2 x}{\partial s^2} + \frac{\partial y}{\partial s}\frac{\partial^2 y}{\partial s^2} = 0, \\ \left(\frac{\partial^2 x}{\partial s^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 y}{\partial s^2}\right)^2 + \frac{\partial x}{\partial s}\frac{\partial^3 x}{\partial s^3} + \frac{\partial y}{\partial s}\frac{\partial^3 y}{\partial s^3} = 0, \text{ u. s. w.} \end{array}\right\} \text{(a')}$$

---

* Betrachtet man in der Gleichung §. 13. V: $\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$, s als neue unabhängig Veränderliche, so erhält man gemäss Nr. I:

$$\frac{1}{\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2} = 1 + \frac{\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2}{\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2}, \quad 1 = \left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)^2,$$

so dass die Gleichung (a) eine leicht auszusprechende geometrische Bedeutung hat.

und vermöge der Gleichungen (a) und (a′) kann man $\frac{\partial x}{\partial s}, \frac{\partial^2 x}{\partial s^2}, \frac{\partial^3 x}{\partial s^3}, \ldots\ldots$ durch $\frac{\partial y}{\partial s}, \frac{\partial^2 y}{\partial s^2}, \frac{\partial^3 y}{\partial s^3}, \ldots\ldots$ ausdrücken.

IV. Endlich ist es möglich, dass man statt y selbst eine neue abhängig Veränderliche einführen will. Dadurch ist jedoch der Gang der Rechnung keineswegs erschwert, wie wir an folgendem Beispiele sehen werden.

Man soll statt x und y die Grössen r und ω einführen, so dass

$$x = r\cos\omega,\quad y = r\sin\omega,$$

und r als abhängig von ω angesehen werde. Man hat hieraus:

$$\frac{\partial x}{\partial\omega} = \frac{\partial r}{\partial\omega}\cos\omega - r\sin\omega,\quad \frac{\partial^2 x}{\partial\omega^2} = \frac{\partial^2 r}{\partial\omega^2}\cos\omega - 2\frac{\partial r}{\partial\omega}\sin\omega - r\cos\omega, \ldots\ldots,$$

$$\frac{\partial y}{\partial\omega} = \frac{\partial r}{\partial\omega}\sin\omega + r\cos\omega,\quad \frac{\partial^2 y}{\partial\omega^2} = \frac{\partial^2 r}{\partial\omega^2}\sin\omega + 2\frac{\partial r}{\partial\omega}\cos\omega - r\sin\omega, \ldots\ldots,$$

so dass

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\frac{\partial r}{\partial\omega}\sin\omega + r\cos\omega}{\frac{\partial r}{\partial\omega}\cos\omega - r\sin\omega},$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\left(\frac{\partial r}{\partial\omega}\cos\omega - r\sin\omega\right)\left(\frac{\partial^2 r}{\partial\omega^2}\sin\omega + 2\frac{\partial r}{\partial\omega}\cos\omega - r\sin\omega\right) - \left(\frac{\partial r}{\partial\omega}\sin\omega + r\cos\omega\right)\left(\frac{\partial^2 r}{\partial\omega^2}\cos\omega - 2\frac{\partial r}{\partial\omega}\sin\omega - r\cos\omega\right)}{\left(\frac{\partial r}{\partial\omega}\cos\omega - r\sin\omega\right)^3}$$

$$= \frac{r^2 + 2\left(\frac{\partial r}{\partial\omega}\right)^2 - r\frac{\partial^2 r}{\partial\omega^2}}{\left(\frac{\partial r}{\partial\omega}\cos\omega - r\sin\omega\right)^3}, \ldots\ldots$$

Also wenn wieder in

$$\varrho = \pm\frac{\left[1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}$$

für x und y obige Grössen r und ω einzuführen sind:

$$\varrho = \pm\frac{\left[1 + \frac{\left(\frac{\partial r}{\partial\omega}\sin\omega + r\cos\omega\right)^2}{\left(\frac{\partial r}{\partial\omega}\cos\omega - r\sin\omega\right)^2}\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{r^2 + 2\left(\frac{\partial r}{\partial\omega}\right)^2 - r\frac{\partial^2 r}{\partial\omega^2}}{\left(\frac{\partial r}{\partial\omega}\cos\omega - r\sin\omega\right)^3}} = \pm\frac{\left[\left(\frac{\partial r}{\partial\omega}\right)^2 + r^2\right]^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2\left(\frac{\partial r}{\partial\omega}\right)^2 - r\frac{\partial^2 r}{\partial\omega^2}}.$$

Anm. In der analytischen Geometrie bilden r und ω bekanntlich die Polarkoordinaten, und der eben angegebene Ausdruck bestimmt also den Krümmungshalbmesser durch diese Koordinaten.

Dritter Abschnitt.

Die Theoreme von Taylor, Mac-Laurin, Bürmann und Lagrange.

§. 15.

Wir wollen in dem allgemeinen Satze (A) in §. 13. II. $F(x) = x^{n+1}$ setzen, so ist $F'(x) = (n+1)x^n$, $F''(x) = (n+1)\,n\,x^{n-1}, \ldots, F^n(x) = (n+1)\,n \ldots 2x$, $F^{n+1}(x) = (n+1)\,n \ldots 2.1$, so dass $F(0) = F'(0) = \ldots = F^n(0) = 0$, nicht aber $F^{n+1}(0) = 0$, ferner das konstante $F^{n+1}(x)$ immer dasselbe Zeichen hat (n ist positiv ganz). Ist also $f(0) = f'(0) = \ldots = f^n(0) = 0$, $f^{n+1}(x)$ stetig von $x = 0$ bis $x = h$, so ist

$$\frac{f(h)}{h^{n+1}} = \frac{f^{n+1}(h')}{1.2..(n+1)},\ f(h) = \frac{h^{n+1} f^{n+1}(h')}{1.2..(n+1)}.$$

Da hier h' zwischen 0 und h liegt, so kann man (wie in §. 13. III) $h' = \Theta h$ setzen, wo Θ zwischen 0 und 1, und hat also

$$f(h) = \frac{h^{n+1} f^{n+1}(\theta h)}{1.2 \ldots (n+1)},$$

oder wenn man x statt h schreibt:

$$f(x) = \frac{x^{n+1} f^{n+1}(\theta x)}{1.2 \ldots (n+1)},$$

immer unter der Voraussetzung, es seyen $f(0) = f'(0) = \ldots . = f^n(0) = 0$, und $f^{n+1}(z)$ stetig von $z = 0$ bis $z = x$. Man setze nun, wenn $\varphi(x)$ eine beliebige Funktion von x, so dass $\varphi(0), \varphi'(0), \ldots, \varphi^n(0)$ endlich und $\varphi^{n+1}(z)$ dessgleichen endlich und stetig von $z = 0$ bis $z = x$:

$$f(x) = \varphi(x) - \varphi(0) - \frac{x}{1}\varphi'(0) - \frac{x^2}{1.2}\varphi''(0) - \ldots\ldots\ldots - \frac{x^n}{1.2..n}\varphi^n(0),$$

also

$$f'(x) = \varphi'(x) - \varphi'(0) - \frac{x}{1}\varphi''(0) - \ldots\ldots\ldots - \frac{x^{n-1}}{1.2..n-1}\varphi^n(0),$$

$$f''(x) = \varphi''(x) - \varphi''(0) - \frac{x}{1}\varphi^3(0) - \ldots . - \frac{x^{n-2}}{1.2..n-2}\varphi^n(0),$$

$$\vdots$$

$$f^n(x) = \varphi^n(x) - \varphi^n(0),$$

endlich

$$f^{n+1}(x) = \varphi^{n+1}(x),$$

so wird f(x) alle obigen Bedingungen erfüllen und man hat also

$$\varphi(x) - \varphi(0) - \frac{x}{1}\varphi'(0) - \frac{x^2}{1.2}\varphi''(0) - \ldots . - \frac{x^n}{1.2..n}\varphi^n(0) = \frac{x^{n+1}\varphi^{n+1}(\Theta x)}{1.2 \ldots n+1},$$

oder wenn man für φ das gebräuchlichere Funktionszeichen f wieder einführt:

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1}f'(0) + \frac{x^2}{1.2}f''(0) + \cdots + \frac{x^n}{1.2..n}f^n(0) + \frac{x^{n+1} f^{n+1}(\Theta x)}{1.2 \ldots (n+1)}, \qquad (26)$$

welcher Satz der von **Mac-Laurin** heisst. Man setzt also dabei voraus,

es seyen $f(0), f'(0), \ldots, f^n(0)$ endlich, und $f^{n+1}(z)$ endlich und stetig von $z=0$ bis $z=x$; Θ liegt zwischen 0 und 1.

Man setze hier $f(x)=F(a+x)$, so ist, wenn $a+x=u$, also $\frac{\partial u}{\partial x}=1$: $f'(x) = \frac{\partial F(a+x)}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} = F'(u)=F'(a+x), \ldots, \frac{\partial^n f(x)}{\partial x^n}=f^n(x)=F^n(a+x)$; $f^{n+1}(\Theta x) = F^{n+1}(a+\Theta x)$, und $f(0)=F(a), f'(0)=F'(a), \ldots, f^n(0)=F^n(a)$, mithin:

$$F(a+x)=F(a)+\frac{x}{1}F'(a)+\frac{x^2}{1.2}F''(a)+\ldots+\frac{x^n}{1\ldots n}F^n(a)+\frac{x^{n+1}}{1.2..n+1}F^{n+1}(a+\theta x),$$

oder wenn man, wie dies so herkömmlich ist, x für a, h für x schreibt:

$$F(x+h)=F(x)+\frac{h}{1}F'(x)+\frac{h^2}{1.2}F''(x)+\ldots+\frac{h^n}{1.2..n}F^n(x)+\frac{h^{n+1}}{1.2..n+1}F^{n+1}(x+\Theta h), \quad (27)$$

wo vorausgesetzt ist, es seyen $F(x), \ldots, F^n(x)$ endlich, und $F^{n+1}(x+z)$ stetig von $z=0$ bis $z=h$.* Die Grösse Θ liegt zwischen 0 und 1, und $F^{n+1}(x+\Theta h)$ wird aus $F^{n+1}(x)$ erhalten, wenn man $x+\Theta h$ für x schreibt. (Vergleiche auch §. 50. XI.)

Dies ist Taylors Lehrsatz.

Es lassen sich diese Sätze auch unter etwas verschiedener Form darstellen. Man setze nämlich in der Gleichung (25) des §. 13: $h+z=a$, also $h=a-z$, so ist

$$F(a)=F(z)+(a-z)F'[z+\theta(a-z)],$$

wenn $F'(a+u)$ stetig ist von $u=0$ bis $u=a-z$. Man setze nun

$$F(z)=f(z)+(a-z)f'(z)+\frac{(a-z)^2}{1.2}f''(z)+\ldots+\frac{(a-z)^n}{1\ldots n}f^n(z),$$

so ist

$$F'(z)=f'(z)-f'(z)+(a-z)f''(z)-(a-z)f''(z)+\ldots+\frac{(a-z)^{n-1}}{1\ldots n-1}f^n(z)$$
$$-\frac{(a-z)^{n-1}}{1\ldots n-1}f^n(x)+\frac{(a-z)^n}{1\ldots n}f^{n+1}(z)=\frac{(a-z)^n}{1\ldots n}f^{n+1}(z),$$

und, damit $F'(z+u)$ stetig sey von $u=0$ bis $u=a-z$, genügt es, dass $f^{n+1}(z+u)$ in dieser Lage sey. Hieraus folgt:

$$F(a)=f(a),\ F'[z+\Theta(a-z)]=\frac{[a-z-\Theta(a-z)]^n}{1\ldots n}f^{n+1}[z+\Theta(a-z)]$$
$$=\frac{[(1-\Theta)(a-z)]^n}{1\ldots n}f^{n+1}[z+\Theta(a-z)],$$

und mithin

$$f(a)=f(z)+(a-z)f'(z)+\frac{(a-z)^2}{1.2}f''(z)+\ldots+\frac{(a-z)^n}{1..n}f^n(z)$$
$$+\frac{(a-z)[(1-\Theta)(a-z)]^n}{1\ldots n}f^{n+1}[z+\Theta(a-z)].$$

Setzt man $a=z+h$, so ist

$$f(z+h)=f(z)+hf'(z)+\frac{h^2}{1.2}f''(z)+\ldots+\frac{h^n}{1\ldots n}f^n(z)+\frac{(1-\Theta)^n h^{n+1}}{1\ldots n}f^{n+1}(z+\Theta h), \quad (27')$$

* Ist $F^{n+1}(x)$ stetig, so sind es auch $F^n(x), \ldots, F(x)$ (§. 1), so dass die letzte Bedingung genügt. Natürlich ist dabei eine stetige Funktion auch endlich.

worin $f^{n+1}(z+u)$ stetig seyn muss von $u=0$ bis $u=h$. Setzt man hier $z=0$, $h=x$, so ist:

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1}f'(0)+\frac{x^2}{1.2}f''(0)+\ldots+\frac{x^n}{1.2\ldots n}f^n(0)+\frac{(1-\Theta)^n x^{n+1}}{1.2\ldots n}f^{n+1}(\Theta x), \quad (26')$$

wenn $f^{n+1}(u)$ stetig ist von $u=0$ bis $u=x$.

Die Formeln (26)—(27′), in den Θ immer eine zwischen 0 und 1 enthaltene Grösse ist, unterscheiden sich nur durch die Form des letzten Gliedes — des sogenannten Ergänzungsgliedes. Gesetzt nun, dieses Ergänzungsglied verschwinde mit sehr grossem n, d. h. die Gränzwerthe von

$$\frac{h^{n+1}f^{n+1}(x+\Theta h)}{1.2\ldots n+1}, \frac{(1-\Theta)^n h^{n+1}f^{n+1}(x+\Theta h)}{1.2\ldots n}, \frac{x^{n+1}f^{n+1}(\Theta x)}{1.2\ldots n+1}, \frac{(1-\Theta)^n x^{n+1}f^{n+1}(\Theta x)}{1.2\ldots n}$$

seyen Null, so folgt aus (26) und (27), oder (26′) und (27′):

$$f(x+h)=f(x)+\frac{h}{1}f'(x)+\frac{h^2}{1.2}f''(x)+\frac{h^3}{1.2.3}f^3(x)+\ldots\ldots, \quad (28)$$

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1}f'(0)+\frac{x^2}{1.2}f''(0)+\frac{x^3}{1.2.3}f^3(0)+\ldots\ldots, \quad (29)$$

wenn beide Reihen ins Unendliche geführt werden.

§. 16.

Wir haben so eben gesehen, dass unter gewissen Voraussetzungen

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1}f'(0)+\frac{x^2}{1.2}f''(0)+\frac{x^3}{1.2.3}f^3(0)+\ldots\ldots$$

Betrachten wir nun aber die hier vorkommende unendliche Reihe, so hat sie die Form

$$a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots\ldots+a_nx^n+\ldots\ldots, \quad (a)$$

worin $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ gewisse endliche Koeffizienten sind. Diese Reihe ist bekanntlich konvergent, d. h. hat eine endliche Summe, wenn Gr. $\frac{a_{n+1}}{a_n}x$ für ein wachsendes n kleiner als 1 ist.* Bezeichnen wir diese Summe durch

* Gesetzt man habe die unendliche Reihe

$$u_0+u_1+u_2+\ldots\ldots+u_n+u_{n+1}+\ldots\ldots$$

und es sey der (positiv genommene) Werth von Gr. $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ kleiner als 1, so wird für ein grosses m also $\frac{u_{m+1}}{u_m}<\alpha$ sein können, wo noch $\alpha<1$; dessgleichen dann $\frac{u_{m+2}}{u_{m+1}}<\alpha$, $\frac{u_{m+3}}{u_{m+2}}<\alpha, \ldots,$ $\frac{u_{m+r+1}}{u_{m+r}}<\alpha$. Multiplizirt man alle diese Ungleichheiten, so ist $\frac{u_{m+r+1}}{u_m}<\alpha^{r+1}$, d. h. $u_{m+r}<\alpha^r u_m$. Demnach

$$u_0+u_1+\ldots<u_0+u_1+\ldots+u_m+u_m[\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\ldots\ldots]$$
$$<u_0+u_1+\ldots+u_m+\frac{u_m\alpha}{1-\alpha},$$

so dass also $u_0+u_1+\ldots$ eine endliche Summen hat. Wir haben dabei stillschweigend alle Glieder positiv vorausgesetzt. Wäre dies nicht der Fall, so würde die Behauptung dann nur um so eher richtig seyn.

Wäre Gr. $\frac{u_{n+1}}{u_n}>1$, so würden die Glieder der unendlichen Reihe schliesslich wachsen,

y, so ist natürlich y eine Funktion von x, und zwar eine **stetige** Funktion. Denn es sey Δx klein genug, dass auch noch Gr. $\frac{a_{n+1}}{a_n}(x+\Delta x) < 1$, was man sicherlich annehmen darf, so ist

$$y+\Delta y = a_0 + a_1(x+\Delta x) + a_2(x+\Delta x)^2 + \ldots + a_n(x+\Delta x)^n + \ldots,$$

mithin $$\Delta y = a_1[(x+\Delta x)-x] + a_2[(x+\Delta x)^2 - x^2] + \ldots + a_n[(x+\Delta x)^n - x^n] + \ldots,$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a_1\frac{[(x+\Delta x)-x]}{\Delta x} + a_2\frac{[(x+\Delta x)^2-x^2]}{\Delta x} + \ldots + a_n\frac{[(a+\Delta x)^n - x^n]}{\Delta x} + \ldots,$$

und da (§. 5. I):

$$\text{Gr.}\ \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} = n x^{n-1},$$

so ist hieraus bei abnehmendem Δx (§. 2):

$$\frac{\partial y}{\partial x} = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots\ldots + n a_n x^{n-1} + \ldots\ldots \qquad \text{(b)}$$

Nun ist aber

$$\text{Gr.}\ \frac{(n+1)a_{n+1}x^n}{n a_n x^{n-1}} = \text{Gr.}\ \frac{n+1}{n}\frac{a_{n+1}}{a_n}x = \text{Gr.}\left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{a_{n+1}}{a_n}x = \text{Gr.}\ \frac{a_{n+1}}{a_n}x,$$

da Gr. $\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1$; also da letztere Grösse < 1, so ist auch die Reihe (b) konvergent, d. h. $\frac{\partial y}{\partial x}$ endlich, mithin y eine stetige Funktion.

Haben wir aber für y eine Funktion F(x) von x gefunden, die stetig bleibt, so lange die Reihe (a) konvergent ist, oder eine Summe hat, so ist eben diese Funktion immer die Summe und es kann nicht z. B. von $x=0$ bis $x=\alpha$ die Summe $y=F(x)$ und von $x=\alpha$ bis $x=\beta$ die Summe $= f(x)$ seyn, wo f(x) eine andere Funktion von x ist (und die Reihe eine endliche Summe hat von $x=0$ bis β, $\beta > \alpha$). Es lässt sich dieser (wohl an und für sich klare) Satz in folgender Form beweisen. Sey also angenommen von $x=0$ bis $x=\alpha: y=F(x)$, so wäre F(x) der Werth, dem sich die Summe

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots\ldots + a_n x^n$$

mit wachsendem n nähert, während von $x=\alpha$ bis $x=\beta$ dieser Näherungswerth $= f(x)$ seyn müsste. Nun ist $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots\ldots + a_n x^n$, wo natürlich die Koeffizienten ein bestimmtes Bildungsgesetz befolgen, als eine endliche Reihe, immer dieselbe Funktion von x und auch n, was immer x sey, und wenn man in dieser sich immer gleich bleibenden Funktion n grösser werden lässt, so wird also auch immer dieselbe Funktion von x zum Vorschein kommen, wenn überhaupt ein endlicher Werth erscheint. Demnach können f(x) und F(x) nicht zwei verschiedene Funktionen seyn.

Legen wir uns nun die unendliche Reihe

$$f(0) + \frac{x}{1}f'(0) + \frac{x^2}{1.2}f''(0) + \frac{x^3}{1.2.3}f^3(0) + \ldots\ldots \qquad \text{(c)}$$

vor, und sey dieselbe konvergent von $x=0$ bis $x=k$, wo natürlich also $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$, ... endlich seyn müssen, so behaupte ich, die Summe

---

und es könnte also von einer endlichen Summe nicht die Rede seyn. (Vergl. „Grundzüge" S. 22 ff.)

dieser Reihe sey gleich $f(x)$ von $x=0$ bis $x=k$, immer unter der Voraussetzung, $f(x)$ sey eine stetige Funktion von $x=0$ bis $x=k$.

Denn für kleine x ist sicher $f^{n+1}(\theta x)$ nicht viel verschieden von $f^{n+1}(0)$, ist also endlich; mithin wird die Grösse $\frac{x^{n+1} f^{n+1}(\theta x)}{1.2\ldots n+1}$ für ein grosses n und kleines x selbst sehr klein seyn, so dass also

$$Gr. \frac{x^{n+1} f^{n+1}(\theta x)}{1.2\ldots n+1}=0, \text{ oder } Gr. \frac{(1-\theta)^n x^{n+1} f^{n+1}(\theta x)}{1.2\ldots n}=0 \quad (d)$$

und mithin nach (29)

$$f(0)+\frac{x}{1}f'(0)+\frac{x^2}{1.2}f''(0)+\ldots\ldots=f(x) \quad (30)$$

Diese Gleichung ist allerdings nur für kleine x bewiesen. Allein da die Reihe (c) konvergent ist von $x=0$ bis $x=k$, und also ihre Summe dieselbe Funktion von x ist von $x=0$ bis $x=k$, so muss, wenn sie einmal von $x=0$ an gleich $f(x)$ war, dieselbe immer $=f(x)$ bleiben. Es gilt demnach die Gleichung (30) so lange, als die vorkommende unendliche Reihe konvergirt.

Setzt man $f(x)=F(z+x)$, so ist (§. 15):

$$F(z)+\frac{x}{1}F'(z)+\frac{x^2}{1.2}F''(z)+\ldots\ldots=F(z+x),$$

oder wenn man x für z, h für x schreibt:

$$F(x)+\frac{h}{1}F'(x)+\frac{h^2}{1.2}F''(x)+\frac{h^3}{1.2.3}F^3(x)+\ldots\ldots=F(x+h), \quad (31)$$

ebenfalls so lange giltig, als die unendliche Reihe konvergirt.

Es folgt hiemit auch, dass die Gleichung (d) richtig seyn muss, für alle x, für die (c) konvergent ist, oder (30) gilt; eben so muss

$$Gr. \frac{h^{n+1} f^{n+1}(x+\theta h)}{1.2\ldots n+1}=0 \text{ oder } Gr. \frac{(1-\theta)^n h^{n+1}}{1.2.\ldots n} f^{n+1}(x+\theta h)=0 \quad (d')$$

seyn für alle x und h, für die die Gleichung (31) richtig ist.

Anm. Der wichtige Satz (30) ist vielfach bestritten, dennoch aber unzweifelhaft richtig. Cauchy namentlich glaubt ihn thatsächlich dadurch zu widerlegen, dass er $f(x)=e^{-\left(\frac{1}{x}\right)^2}$ setzt. Alsdann wäre (§. 5): $f'(x)=\frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}$, $f''(x)=\frac{2(1-3x^2)}{x^6}e^{-\frac{1}{x^2}}, \ldots$ und für $x=0$ werden diese Grössen dann, wegen $e^{-\frac{1}{0}}=0$ die Form $\frac{0}{0}$ annehmen, die zwar, wie wir §. 22 sehen werden, so lange Null ist, als in $f^n(x)$ die Zahl n es ist, aber nicht mehr, wenn n unendlich gross wird. Man kann also in diesem Falle die Reihe (30) gar nicht anwenden, und es folgt hieraus keineswegs, wie Cauchy meint, das unrichtige Resultat $e^{-\frac{1}{x^2}}=0$.

§. 17.

Die Resultate der vorhergehenden Untersuchungen setzen uns in Stande, beliebig viele unendliche Reihen zu summiren, wobei wir jeweils die Richtigheit der Gleichungen (d) und (d') thatsächlich nachweisen wollen, vorher jedoch noch das Folgende bemerken. Setzen wir eine der Grössen

$$\frac{x^{n+1} f^{n+1}(\Theta x)}{1.2\ldots n+1},\quad \frac{(1-\Theta)^n x^{n+1} f^{n+1}(\Theta x)}{1.2\ldots n},\quad \frac{h^{n+1} f^{n+1}(x+\Theta h)}{1.2\ldots n+1},\quad \frac{(1-\Theta)^n h^{n+1} f^{n+1}(x+\Theta h)}{1.2\ldots n}$$

gleich $\varphi(n)$, so wird

$$\text{Gr. } \varphi(n) = 0, \text{ wenn Gr. } \frac{\varphi(n+1)}{\varphi(n)} < 1. \qquad (e)$$

Denn dann bilden die (positiv genommenen) Grössen

$$\varphi(0), \varphi(1). \varphi(2), \ldots\ldots, \varphi(n), \varphi(n+1), \ldots\ldots$$

nothwendig eine konvergente Reihe (§. 16, Note), und es muss also, je weiter man in derselben vom Anfang geht, das betreffende Glied unbegränzt abnehmen ($\varphi(m+r) < \alpha^r \varphi(m)$ seyn), so dass Gr. $\varphi(n) = 0$.

I. Sey in (31) $F(x) = x^m$, so ist (§. 9) $F^n(x) = m(m-1)\ldots(m-n+1)x^{m-n}$.

$$\text{also} \quad x^m + \frac{m}{1}x^{m-1}h + \frac{m(m-1)}{1.2}x^{m-2}h^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^{m-3}h^3 + \ldots = (x+h)^m,$$

so lange die Reihe konvergirt. Verglichen mit den Formeln in §. 16 hat man desshalb zu suchen:

$$\text{Gr. } \frac{\frac{m(m-1)\ldots(m-n)}{1.2\ldots n+1} x^{m-(n+1)} h^{n+1}}{\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots n} x^{m-n} h^n} = \text{Gr. } \frac{m-n}{n+1}\frac{h}{x} = \text{Gr. } \left(\frac{m+1}{n+1} - 1\right)\frac{h}{x} = -\frac{h}{x},$$

so dass, so lange der (positiv genommene) Werth von $\frac{h}{x}$ unter 1 ist, obige Formel gilt. (Ist freilich m eine positive ganze Zahl, so ist die Reihe endlich und gilt die Formel unbedingt. Vergl. §. 10. I.)

Dasselbe Resultat kann man aus (27′) schliessen. Denn gemäss dem Satze zu Eingang dieses §. ist hier für $f(x) = x^n$

$$\text{Gr. } \frac{\varphi(n+1)}{\varphi(n)} = \text{Gr. } \frac{(1-\Theta)^{n+1} h^{n+2} f^{n+2}(x+\Theta h)}{(1-\Theta)^n h^{n+1} f^{n+1}(x+\Theta h)} \frac{1.2\ldots\ldots n}{1.2..n+1}$$

$$= \text{Gr. } \frac{(1-\Theta)h}{n+1} \cdot \frac{m(m-1)\ldots(m-n-1)(x+\Theta h)^{m-(n+2)}}{m(m-1)\ldots(m-n)(x+\Theta h)^{m-(n+1)}} = \text{Gr. } (1-\Theta)\frac{h}{x+\Theta h}\cdot\frac{m-n-1}{n+1}$$

$$= \text{Gr. } \frac{(1-\Theta)h}{x+\Theta h}\left(\frac{m}{n+1} - 1\right) = -\frac{(1-\Theta)h}{x+\Theta h} = -\frac{1-\Theta}{1+\Theta\frac{h}{x}}\frac{h}{x}.$$

Sey nun $\frac{h}{x} > 0$ und < 1, so ist $1 + \frac{\Theta h}{x} > 1 - \Theta$, also dieser Quotient < 1; ist aber $\frac{h}{x}$ zwischen 0 und -1, so ist immer noch $-\Theta\frac{h}{x}$ weniger als Θ, so dass $1 + \frac{\Theta h}{x}$ noch $> 1 - \Theta$ und mithin dasselbe gilt. Also wenn $\frac{h}{x}$ zwischen -1 und $+1$ liegt, gilt die Gleichung (28), d. h. unsere obige Formel.

II. Sey in (31) $F(x) = l(x)$, also §. 9: $F'(x) = \frac{1}{x}$, $F''(x) = -\frac{1}{x^2}, \ldots$ so ist

$$l(x) + \frac{h}{x} - \frac{1}{2}\frac{h^2}{x^2} + \frac{1}{3}\frac{h^3}{x^3} - \frac{1}{4}\frac{h^4}{x^4} + \ldots\ldots = l(x+h).$$

Was die Konvergenz dieser Reihe anbelangt, so ist

$$\text{Gr. } \frac{\frac{1}{n+1}\frac{h^{n+1}}{x^{n+1}}}{\frac{1}{n}\frac{h^n}{x^n}} = \text{Gr. } \frac{n}{n+1}\frac{h}{x} = \frac{h}{x},$$

also gilt obige Formel, wenn $\frac{h}{x}$ zwischen -1 und $+1$ liegt. Dasselbe ergibt sich aus (27'). Denn es ist $f^{n+1}(x+\Theta h)=\pm\frac{1.2\ldots n}{(x+\Theta h)^{n+1}}$, also nach Eingang dieses §.:

$$\text{Gr.}\frac{\varphi(n+1)}{\varphi(n)}=\text{Gr.}\frac{(1-\Theta)^{n+1}h^{n+2}}{(x+\Theta h)^{n+2}}\cdot\frac{(x+\Theta h)^{n+1}}{(1-\Theta)^n h^{n+1}}=\text{Gr.}\frac{(1-\Theta)}{x+\Theta h}h=\frac{(1-\Theta)h}{x+\Theta h},$$

woraus dasselbe wie in I. folgt.

Für $x=1$, $h=x$ ist hieraus

$$l(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\ldots\ldots,\ x^2<1.$$

III. Sey in (30) $f(x)=e^x$. so ist $f(0)=f'(0)=f''(0)=\ldots.=1$, also

$$\frac{x}{1}+\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^3}{1.2.3}+\ldots\ldots=e^x.$$

Da

$$\text{Gr.}\frac{\frac{x^{n+1}}{1\ldots n+1}}{\frac{x^n}{1.2..n}}=\text{Gr.}\frac{x}{n+1}=0,$$

so ist diese Reihe immer konvergent, gilt also für alle x. Dasselbe folgt aus (26), da $\frac{x^{n+1}e^{\Theta x}}{1.2..n+1}$ für $n=\infty$ sicher $=0$ ist

IV. Für $f(x)=\sin x$, $f(x)=\cos x$ zieht man eben so aus (30):

$$\frac{x}{1}-\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^5}{1.2\ .5}-\ldots\ldots\ldots=\sin x,$$

$$1-\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^4}{1.2.3.4}-\frac{x^6}{1\ldots6}+\ldots.=\cos x,$$

was auch x sey.

Aus III. folgt leicht, dass

$$e^{ax}=1+\frac{ax}{1}+\frac{a^2x^2}{1.2}+\frac{a^3x^3}{1.2.3}+\ldots\ldots$$

und wenn man hier $a=i=\sqrt{-1}$ setzt und beachtet, dass $i^2=-1$, $i^3=-i$, $i^4=+1,\ldots\ldots$:

$$e^{ix}=1-\frac{x^2}{1.2}+\frac{x^4}{1..4}-\ldots.+i\left(\frac{x}{1}-\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^5}{1\ldots5}-\ldots\right)=\cos x+i\sin x,$$

woraus

$$(\cos x+i\sin x)^n=\left(e^{ix}\right)^n=e^{nix}=\cos(nx)+i\sin(nx);\ (\cos x-i\sin x)^n=\cos(nx)-i\sin(nx).$$

V. Sey $y=\text{arc}(\sin=x)$, $\left(\frac{\partial^n y}{\partial x^n}\right)_0$ der Werth von $\frac{\partial^n y}{\partial x^n}$ für $x=0$; alsdann folgt aus §. 10. V für $x=0$:

$$\left(\frac{\partial^n y}{\partial x^n}\right)_0=(n-2)^2\left(\frac{\partial^{n-2}y}{\partial x^{n-2}}\right)_0.$$

Nun ist $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_0=1$, $\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)_0=0$; also für $n=4, 6, 8,\ldots$: $\left(\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}\right)_0=0$, $\left(\frac{\partial^6 y}{\partial x^6}\right)_0=0,\ldots,\left(\frac{\partial^{2n}y}{\partial x^{2n}}\right)_0=0$; ferner

$$\left(\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\right)_0=\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_0,\ \left(\frac{\partial^5 y}{\partial x^5}\right)_0=3^2\left(\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\right)_0,\ \left(\frac{\partial^7 y}{\partial x^7}\right)_0=5^2\left(\frac{\partial^5 y}{\partial x^5}\right)_0,\ldots\ldots$$

woraus

$$\left(\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\right)_0 = 1, \left(\frac{\partial^5 y}{\partial x^5}\right)_0 = 3^2, \left(\frac{\partial^7 y}{\partial x^7}\right)_0 = 3^2.5^2, \ldots, \left(\frac{\partial^{2n-1} y}{\partial x^{2n-1}}\right)_0 = 3^2.5^2 \ldots (2n-3)^2,$$

und mithin wenn in (30) $f(x) = y = \text{arc}(\sin = x)$:

$$\text{arc}(\sin = x) = \frac{x}{1} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{3^2.x^5}{1\ldots5} + \frac{3^2.5^2.x^7}{1\ldots7} + \ldots\ldots$$

$$= \frac{x}{1} + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{x^7}{7} + \ldots\ldots,$$

welche Reihe konvergirt für $x^2 < 1$.

Eben so ist aus §. 10. VI für $y = \text{arc}(\text{tg} = x)$:

$$\left(\frac{\partial^n y}{\partial x^n}\right)_0 = -(n-2)(n-1)\left(\frac{\partial^{n-2} y}{\partial x^{n-2}}\right)_0; \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_0 = 1, \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)_0 = 0,$$

woraus dann leicht folgt:

$$\text{arc}(\text{tg}\, x) = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots\ldots, \quad x^2 < 1.$$

(Weitere Untersuchungen über alle diese Reihen finden sich in meinen „Grundzügen".)

Wir führen schliesslich noch den folgenden Satz an:

Wenn die Summe der unendlichen konvergenten Reihe

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots\ldots$$

gleich $f(x)$ ist, so ist $a_0 = f(0)$, $a_1 = f'(0)$, $a_2 = \frac{f''(0)}{1.2}$, $a_3 = \frac{f^3(0)}{1.2.3}, \ldots$

Denn da

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots\ldots = f(x),$$

so ist

$$a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots\ldots = f'(x),$$
$$2.1a_2 + 3.2a_3 x + \ldots\ldots = f''(x),$$
$$3.2.1a_3 + \ldots\ldots = f^3(x),$$
$$\vdots$$

woraus für $x = 0$:

$$a_0 = f(0),\; a_1 = f'(0),\; 2.1a_2 = f''(0),\; 3.2.1a_3 = f^3(0), \ldots\ldots,$$

was unsere Behauptung rechtfertigt.

§. 18.

Die Formeln des §. 15 dienen nun noch zu einem andern wichtigen Zwecke. Man ist nämlich mittelst derselben im Stande, die **Fehlergränze** zu bestimmen, wenn man die dortigen Reihen bei einem bestimmten Gliede abbricht. Setzt man nämlich

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1}f'(x) + \frac{h^2}{1.2}f''(x) + \ldots + \frac{h^n}{1.2..n}f^n(x), \qquad (a)$$

so ist der begangene Fehler $= \frac{h^{n+1}}{1.2..n+1}f^{n+1}(x+\Theta h)$, und wenn man den grösstmöglichen Werth dieser letzteren Grösse ermittelt, oder überhaupt einen Werth, der grösser ist als dieselbe, so ist der begangene Fehler sicherlich kleiner als diese so erhaltene Grösse. Aehnlich verhält es sich mit $\frac{x^{n+1}}{1.2..n+1}f^{n+1}(\Theta x)$, wenn man

$$f(x)=f(0)+\frac{x}{1}f'(0)+\frac{x^2}{1.2}f''(0)+\ldots+\frac{x^n}{1.2\ldots n}f^n(0)\qquad\text{(b)}$$

setzt. Wir wollen dies an einigen Beispielen erläutern.

I. Sey in der Formel (a) $f(x)=x^m$, also $f^n(x)=m(m-1)\ldots(m-n+1)x^{m-n}$, $f^{n+1}(x+\Theta h)=m(m-1)\ldots(m-n)(x+\Theta h)^{m-n-1}$, so ist wenn man

$$(x+h)^m=x^m+\frac{m}{1}x^{m-1}h+\frac{m(m-1)}{1.2}x^{m-2}h^2+\ldots+\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots n}x^{m-n}h^n\qquad\text{(c)}$$

setzt, der begangene Fehler gleich

$$\frac{m(m-1)\ldots(m-n)}{1.2\ldots n+1}h^{n+1}(x+\Theta h)^{m-n-1}=\frac{m(m-1)(m-n)}{1.2\ldots n+1}(x+\Theta h)^m\left(\frac{h}{x+\Theta h}\right)^{n+1}.$$

In jedem einzelnen Falle wird es leicht seyn, Gränzen für diese letztere Grösse anzugeben.

Sey z. B. $m=-1$, $n=1$, also

$$\frac{1}{x+h}=\frac{1}{x}-\frac{h}{x^2},$$

so ist der begangene Fehler $=\frac{1}{x+\Theta h}\left(\frac{h}{x+\Theta h}\right)^2=\frac{h^2}{(x+\Theta h)^3}$, so dass, wenn x und h positiv sind, derselbe sicherlich kleiner als $\frac{h^2}{x^3}$ ist. Sind dagegen x und h von verschiedenen Zeichen, aber immer der Werth von h geringer als der von x, so ist der begangene Fehler kleiner als $\frac{h^2}{(x+h)^3}$. Für $x=1$ und $h>0$, ist der begangene Fehler also kleiner als h^2, d. h. wenn man

$$\frac{1}{1+h}=1-h$$

setzt, so fehlt man nicht um h^2. (Es wird von diesem Satze namentlich vielfache Anwendung gemacht.)

Sey $m=\frac{1}{r}$, $n=1$, so ist wenn man setzt

$$\sqrt[r]{x+h}=\sqrt[r]{x}+\frac{h}{r\sqrt[r]{x^{r-1}}},$$

der begangene Fehler gleich

$$\frac{\frac{1}{r}\left(\frac{1}{r}-1\right)}{1.2}(x+\Theta h)^{\frac{1}{r}}\left(\frac{h}{x+\Theta h}\right)^2=-\frac{r-1}{2r^2}\,\frac{h^2}{\sqrt[r]{(x+\Theta h)^{2r-1}}}.$$

Ist nun x sowohl als h positiv, so ist diese Grösse (ihrem absoluten Werthe nach) geringer als $\frac{r-1}{2r^2}\cdot\frac{h^2}{\sqrt[r]{x^{2r-1}}}$, so dass man also nicht um diesen Werth fehlt; ist aber $\frac{h}{x}<0$, jedoch seinem Werthe nach unter 1, so ist der Fehler geringer als $\frac{r-1}{2r^2}\,\frac{h^2}{\sqrt[r]{(x+h)^{2r-1}}}$.

Für $x=1$, $h>0$ ist also

$$\sqrt[r]{(1+h)}=1+\frac{h}{r}$$

und der dabei begangene Fehler ist kleiner als $\frac{r-1}{2r^2}h^2$ (wo übrigens $1+\frac{h}{r}$ zu gross ist). Für $r=2$ ist $\sqrt{(1+h)}=1+\frac{1}{2}h$ und der Fehler kleiner als $\frac{h^2}{8}$. Dar-

aus folgt bekanntlich die Regel, dass wenn man aus einer Zahl, die mit 1 als Ganze anfängt und dann halb so viele Nullen enthält, als man Dezimalstellen in der Wurzel haben will, die Quadratwurzel auszuziehen hat, man sie nach der obigen Regel finden kann. So ist z. B. auf 8 Dezimalstellen genau:

$$\sqrt{1 \cdot 00007346} = 1 + \tfrac{1}{2} 0 \cdot 00007346 = 1 \cdot 00003673.$$

Denn der hiebei begangene Fehler ist kleiner als

$$\frac{0 \cdot 00007346^2}{8} \text{ d. h.} < \frac{0 \cdot 0001^2}{8} < \frac{1}{8 \cdot 10^8},$$

und da dies kleiner als $\frac{1}{10^8}$, so ist also der Fehler kleiner als eine Einheit der achten Dezimale (in unserem Falle kleiner als eine Einheit der neunten Dezimale).

Für $r = 3$ ist $\sqrt[3]{1+h} = 1 + \frac{1}{3} h$ und der begangene Fehler kleiner als $\frac{1}{9} h^2$. Daraus folgt dieselbe Regel, wie so eben. So ist auf 6 Dezimalen genau

$$\sqrt[3]{1 \cdot 000628} = 1 + \frac{1}{3} 0 \cdot 000627 = 1 \cdot 000209,$$

denn der begangene Fehler ist kleiner als $\frac{1}{9} 0 \cdot 000628^2$ d. h. $< \frac{1}{9}\left(\frac{1}{10^3}\right)^2 < \frac{1}{9} \frac{1}{10^6} < \frac{1}{10^6}$. Eben so lassen sich sehr leicht die folgenden nützlichen Regeln beweisen:

Behält man von einer ganzen Zahl mehr als die Hälfte der ersten Ziffern und ersetzt die übrigen durch Nullen, so wird die Quadratwurzel aus letzterer Zahl nicht um 1 verschieden seyn von der Quadratwurzel der erstern.

Ganz dieselbe Regel gilt, wenn man „Hälfte“ und „Quadratwurzel“ durch „Drittel“ und „Kubikwurzel“ ersetzt.

Ist a die erste Zahl, α die zweite, so ist $a = \alpha + (a - \alpha)$ und wenn man in (c) $x = \alpha$, $h = a - \alpha$ setzt, ferner $m = \frac{1}{2}$, $n = 0$, so ist für $\sqrt{a} = \sqrt{\alpha}$ der begangene Fehler gleich $\frac{1}{2}[\alpha + \Theta(a-\alpha)]^{\frac{1}{2}} \left[\frac{a-\alpha}{\alpha + \Theta(a-\alpha)}\right]^1 = \frac{1}{2} \frac{a-\alpha}{\sqrt{[\alpha + \Theta(a-\alpha)]}}$ d. h. da $a - \alpha > 0$, dieser Fehler ist kleiner als $\frac{1}{2} \frac{a-\alpha}{\sqrt{\alpha}}$. Da nun $a - \alpha$ nicht die Hälfte der Ziffern von a, d. h. auch von α enthält, so ist immer $\frac{a-\alpha}{2\sqrt{\alpha}}$ unter 1, was unsere Behauptung rechtfertigt (da z. B. $\frac{9999}{2\sqrt{100000000}} < 1$).

Für den Fall der Kubikwurzel ist bei $\sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{\alpha}$ der Fehler gleich $\frac{1}{3}[\alpha + \Theta(a-\alpha)]^{\frac{1}{3}} \frac{a-\alpha}{\alpha + \Theta(a-\alpha)} = \frac{1}{3} \frac{a-\alpha}{\sqrt[3]{[\alpha+\Theta(a-\alpha)]^2}}$, also kleiner als $\frac{1}{3} \frac{a-\alpha}{\sqrt[3]{\alpha^2}}$ und da $a - \alpha$ nicht 2 Drittel der Ziffern von a oder α enthält, so ist diese Grösse unter 1 (zum Beispiel $\frac{99999}{3\sqrt[3]{10000000^2}} < 1$).

So werden $\sqrt{835472532}$ und $\sqrt{835470000}$ nicht um 1; $\sqrt{325 \cdot 734825}$ und $\sqrt{325 \cdot 730000}$ nicht um $0 \cdot 000001$ verschieden seyn u. s. w.* — Will man nach

---

* Daraus folgt, dass wenn man $\sqrt{\frac{13}{7}}$ auf 5 Dezimalen genau haben will, man $\frac{13}{7}$ blos auf 5 Dezimalen zu entwickeln brauche, und die übrigen durch Nullen ersetzen könne; dass um $\sqrt[3]{\frac{253}{6}}$ auf 5 Dezimalen zu erhalten, man $\frac{253}{6}$ blos bis auf 4 Dezimalen zu entwickeln brauche u. s. w. (Man vergleiche hierüber auch die Einleitung.)

diesen Formeln **genäherte** Werthe berechnen, so ist dies sehr leicht. Soll z. B. $\sqrt[3]{25}$ berechnet werden, so setze man in (c) $x=27$, $h=-2$, $m=\frac{1}{3}$, und hat

$$\sqrt[3]{25}=(27-2)^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{27}-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{27^2}}-\frac{1.2}{3.6}\cdot\frac{4}{\sqrt[3]{27^5}}-\frac{1.2.5}{3.6.9}\cdot\frac{8}{\sqrt[3]{27^8}}$$

$$=3-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{9}-\frac{1}{9}\cdot\frac{4}{243}-\frac{5}{81}\cdot\frac{8}{6561},$$

während der begangene Fehler ($m=\frac{1}{3}$, $n=3$, $x=27$, $h=-2$) gleich $-\frac{1.2.5.8}{3.6.9.12}\sqrt[3]{27-2\Theta}\left(\frac{-2}{27-2\Theta}\right)^4$, also negativ ist; derselbe ist sicher kleiner als $\frac{1.2.5.8}{3.6.9.12}\sqrt[3]{27}.\left(\frac{2}{25}\right)^4=0{\cdot}000006$. Nun ist

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{9}=0{\cdot}07407407$$

$$\frac{1}{9}\cdot\frac{4}{243}=0{\cdot}00182898 \qquad 3-0{\cdot}07597831=2{\cdot}9240217, \text{ während}$$

$$\frac{5}{81}\cdot\frac{8}{6561}=0{\cdot}00007526 \qquad \sqrt[3]{25}=2{\cdot}9240177, \text{ Differenz}=0{\cdot}000004<0{\cdot}000006.$$

$$\overline{0{\cdot}07597831}$$

II. Sey in der Formel (a) $f(x)=\log x$, wo wir unter dem Zeichen log die Logarithmen für die Grundzahl 10 verstehen wollen. Alsdann ist (§. 4. III) $f'(x)=\log e\,\frac{1}{x}$, $f''(x)=-\log e\,\frac{1}{x^2}$, ... $f^n(x)=\pm\frac{1.2\ldots(n-1)}{x^n}\log e$, so dass also, wenn

$$\log(x+h)=\log x+\log e\left[\frac{h}{x}-\frac{h^2}{2x^2}+\frac{h^3}{3x^3}-\ldots\ldots\pm\frac{h^n}{nx^n}\right] \qquad (d)$$

gesetzt wird, der begangene Fehler $=\mp\log e\,\frac{h^{n+1}}{(n+1)(x+\Theta h)^{n+1}}$ seyn wird. Für den Fall natürlicher Logarithmen ist

$$l(x+h)=l(x)+\frac{h}{x}-\frac{h^2}{2x^2}+\frac{h^3}{3x^3}-\ldots\pm\frac{h^n}{nx^n} \qquad (d')$$

mit dem Fehler $\mp\frac{h^{n+1}}{(n+1)(x+\Theta h)^{n+1}}$. Wir wollen hier nicht darthun, in welcher Weise mittelst dieser Formeln die Logarithmen berechnet werden können, sondern nur die Genauigkeit der gewöhnlichen Interpolation dadurch beweisen. Setzt man $x=a$ und nimmt $h<1$, so folgt aus (d) für $n=1$:

$$\log(a+h)-\log a=\log e\,.\,\frac{h}{a}-\frac{\log e}{2}\,\frac{h^2}{(a+\Theta h)^2},$$

$$\log(a+1)-\log a=\log e\,.\,\frac{1}{a}-\frac{\log e}{2}\,\frac{1}{(a+\Theta_1)^2},$$

wo Θ und Θ_1 zwischen 0 und 1 sind. Ist nun a eine ganze Zahl, so geben die Tafeln sowohl $\log a$ als $\log(a+1)$, also auch deren Differenz $=\Delta$; die Differenz $\log(a+h)-\log a=\delta$ findet sich sodann, wenn man $\delta=h\Delta$ setzt, vorausgesetzt, dass man das gewöhnliche Verfahren anwendet. Nun ist aber

$$\delta=\log e\,.\,\frac{h}{a}-\frac{\log e}{2}\,\frac{h^2}{(a+\Theta h)^2},\quad h\Delta=\log e\,\frac{h}{a}-\frac{\log e}{2}\,\frac{h}{(a+\Theta_1)^2},$$

also $$\delta - h\Delta = \frac{\log e}{2}\left[\frac{h}{(a+\Theta_1)^2} - \frac{h^2}{(a+\Theta h)^2}\right].$$

Die eingeklammerte Grösse, da $h < 1$ und > 0, ist sicher kleiner als $\frac{1}{a^2}$, und und da $\log e < \frac{1}{2}$, so ist also $\delta - h\Delta < \frac{1}{4a^2}$; ist mithin $a > 10,000$, so ist $\delta - h\Delta < \frac{1}{400,000,000}$, so dass, wenn man $\delta = h\Delta$ setzt, man nicht um $\frac{1}{400,000,000}$ fehlt, was bei 7stelligen Tafeln vollkommen scharf genug ist.

III. Sey in (b) $f(x) = e^x$, so wird also wenn

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \ldots + \frac{x^n}{1.2..n}, \qquad \text{(e)}$$

der begangene Fehler $= \frac{x^{n+1}}{1.2..n+1} e^{\Theta x}$ seyn. Diese Grösse ist bei positivem x kleiner als $\frac{x^{n+1} e^x}{1.2..n+1}$, bei negativem x dagegen kleiner als $\frac{x^{n+1}}{1.2..n+1}$. So ist für

$x = 1$: $$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \ldots\ldots + \frac{1}{1.2..n}, \qquad \text{(e')}$$

und der begangene Fehler kleiner als $\frac{e}{1.2..n+1}$, d. h. da $e < 4$ (§. 2), derselbe ist kleiner als $\frac{4}{1.2..n+1}$. Daraus lässt sich leicht ableiten, wie viele Glieder man beibehalten müsse, um z. B. e auf 8 Dezimalen genau zu erhalten; es muss dann $\frac{4}{1.2..n+1}$ gleich oder kleiner als $\frac{1}{10^9}$ seyn. Man findet leicht, dass dies für $n = 12$ Statt findet, so dass man also 13 Glieder der Reihe (e') zu beachten hat. Dabei hat man, um beim Addiren keinen Fehler in der 8ten Dezimale zu erhalten, bis auf die 10te Dezimale zu entwickeln. Es ist

$$\begin{aligned}
2 &= 2{\cdot}000\,000\,0000 \\
\frac{1}{1.2} &= 0{\cdot}500\,000\,0000 \\
\frac{1}{1.2.3} &= 0{\cdot}166\,666\,6666 \\
\frac{1}{1.2.3..4} &= 0{\cdot}041\,666\,6666 \\
\frac{1}{1\ldots\ldots 5} &= 0{\cdot}008\,333\,3333 \\
\frac{1}{1\ldots\ldots 6} &= 0{\cdot}001\,388\,8888 \\
\frac{1}{1\ldots\ldots 7} &= 0{\cdot}000\,198\,4126 \\
\frac{1}{1\ldots\ldots 8} &= 0{\cdot}000\,024\,8016 \\
\frac{1}{1\ldots\ldots 9} &= 0{\cdot}000\,002\,7557 \\
\frac{1}{1\ldots\ldots 10} &= 0{\cdot}000\,000\,2755 \\
\frac{1}{1\ldots\ldots 11} &= 0\,000\,000\,0250 \\
\frac{1}{1\ldots\ldots 12} &= \underline{0{\cdot}000\,000\,0020} \\
&\ 2{\cdot}718\,281\,8277
\end{aligned}$$

welche Zahl auf 8 Dezimalen genau ist. Wirklich ist $e = 2{\cdot}718\,281\,8284$.

IV. Sey $f(x)=\sin x$, so ist aus (b), wenn man $2n$ für n setzt:

$$\sin x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots \pm \frac{x^{2n-1}}{1.2\ldots 2n-1}$$

mit dem Fehler $\mp \frac{x^{2n+1}\sin\left(\Theta x + \frac{2n+1}{2}\pi\right)}{1.2\ldots\ldots 2n+1}$ (§. 9), welche Grösse immer kleiner als $\frac{x^{2n+1}}{1\ldots\ldots 2n+1}$ ist. Eben so ist, wenn

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1..4} - \ldots \pm \frac{x^{2n}}{1\ldots 2n}$$

gesetzt wird, der Fehler kleiner als $\frac{x^{2n+2}}{1\ldots 2n+2}$. (Man vergleiche mein „theoretisch-praktisches Handbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie", erste Abth. §. 16.)

§. 19.

Aus §. 16 ist uns bekannt, dass so lange die unendliche Reihe

$$f(0) + \frac{z}{1} f'(0) + \frac{z^2}{1.2} f''(0) + \ldots\ldots \qquad (c)$$

konvergirt, ihre Summe $= f(z)$ ist. Setzen wir nun hier $z = \frac{x-a}{\varphi(x)}$, wobei $\varphi(x)$ eine beliebige Funktion von x ist, die wir stetig voraussetzen und der Art, dass nicht $\varphi(a)=0$, so dass für $z=0$ jedenfalls $x=a$, so haben wir den folgenden Satz: Wenn die unendliche Reihe

$$f(0) + \frac{x-a}{\varphi(x)}\frac{f'(0)}{1} + \left(\frac{x-a}{\varphi(x)}\right)^2 \frac{f''(0)}{1.2} + \left(\frac{x-a}{\varphi(x)}\right)^3 \frac{f^3(0)}{1.2.3} + \ldots \qquad (c')$$

von $x=a$ bis $x=b$ konvergirt, so ist ihre Summe (innerhalb derselben Gränzen von x) $= f\left(\frac{x-a}{\varphi(x)}\right)$. Dabei wollen wir, wie sich von selbst versteht, nicht annehmen, dass etwa $\varphi(x)=0$ werden könnte von $x=a$ bis $x=b$, da sonst sicher die Reihe (c') nicht konvergent seyn würde von $x=a$ bis $x=b$; eben so soll $\varphi(x)$ endlich seyn von $x=a$ bis $x=b$; mit andern Worten, $\varphi(x)$ muss nothwendig innerhalb der Gränzen der Konvergenz, immer dasselbe Zeichen haben, und da von $x=a$ bis $x=b$ ebenfalls $x-a$ dasselbe Zeichen beibehält, so hat also auch $\frac{x-a}{\varphi(x)}$ nothwendig immer dasselbe Zeichen. Damit endlich wirklich $\frac{x-a}{\varphi(x)}=z$ gesetzt werden könne, wollen wir voraussetzen, es wachse $\frac{x-a}{\varphi(x)}$ beständig von $x=a$ bis $x=b$, oder nehme diese Grösse beständig ab zwischen diesen Gränzen, so dass einem bestimmten Werthe von x ein einziger bestimmter Werth von z und umgekehrt zukomme. Gesetzt nämlich, es sey $z=0$ für $x=a$, und es könne $\frac{x-a}{\varphi(x)}$ bald wachsen, bald abnehmen, wenn x von a bis b geht, so würde, wenn man x diese Werthe durchlaufen liesse, zwei oder mehrere Werthe von $\frac{x-a}{\varphi(x)}$ je einander gleich werden können, was gegen die Annahme streitet,

in (c) gehe z von 0 an stetig fort. Ohnehin wäre man in diesem Falle offenbar in Verlegenheit zu sagen, welcher Werth von x einem bestimmten Werthe von z zugehört, und umgekehrt. Allem diesem wird ausgewichen, wenn wir die angegebene Annahme machen, die wir nun stets festhalten wollen.

Wir wollen nun $f\left(\frac{x-a}{\varphi(x)}\right)=F(x)$ setzen und unter dieser Voraussetzung $f(0)$, $f'(0)$,.... zu bestimmen suchen. Es sind dabei $f(0)$, $f'(0)$,.... die Werthe von $f(z)$, $f'(z)$,.... für $z=0$, d. h. $x=a$. Somit ist zunächst

$$f(0)=F(a).$$

Allgemein ist aber nach (c'):

$$F(x)=f(0)+\frac{x-a}{\varphi(x)}f'(0)+\left(\frac{x-a}{\varphi(x)}\right)^2\frac{f''(0)}{1.2}+\ldots+\left(\frac{x-a}{\varphi(x)}\right)^{n-1}\frac{f^{n-1}(0)}{1..n-1}$$
$$+\left(\frac{x-a}{\varphi(x)}\right)^n\frac{f^n(0)}{1\ldots n}+\left(\frac{x-a}{\varphi(x)}\right)^{n+1}\frac{f^{n+1}(0)}{1..n+1}+\ldots\ldots;$$

multiplizirt man diese Gleichung beiderseitig mit $[\varphi(x)]^n$ und nimmt die n^{ten} Differentialquotienten, so hat man, freilich nur in so ferne, als die Reihe zweiter Seite noch konvergirt:

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n}\left[F(x)\varphi(x)^n\right]=f(0)\frac{\partial^n}{\partial x^n}\left(\varphi(x)^n\right)+\frac{f'(0)}{1}\frac{\partial^n}{\partial x^n}\left[\frac{x-a}{\varphi(x)}\varphi(x)^n\right]+\ldots\ldots$$
$$+\frac{f^n(0)}{1..n}\frac{\partial^n}{\partial x^n}\left[\left(\frac{x-a}{\varphi(x)}\right)^n\varphi(x)^n\right]+\frac{f^{n+1}(0)}{1..n+1}\frac{\partial^{n+1}}{\partial x^{n+1}}\left[\left(\frac{x-a}{\varphi(x)}\right)^{n+1}\varphi(x)^n\right]+\ldots\ldots$$

Setzt man hier $x=a$, so erhält man nach Gleichung (20) in §. 10:

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n}\left[F(x)\varphi(x)^n\right]_a=f(0)\left[\frac{\partial^n}{\partial x^n}\varphi(x)^n\right]_a+\frac{n}{1}f'(0)\left[\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}\varphi(x)^{n-1}\right]_a+\ldots\ldots$$
$$+\frac{n(n-1)..1}{1.2..n-1}f^{n-1}(0)\left[\frac{\partial}{\partial x}\varphi(x)\right]_a+\frac{n(n-1)..1}{1.2..n}f^n(0),$$

welche Gleichung vollkommen richtig ist, da die Reihe zweiter Seite eine endliche ist. Man kann sie auch schreiben:

$$\left[\frac{\partial^n}{\partial x^n}\left(F(x)\varphi(x)^n\right)\right]_a=f(0)\left[\frac{\partial^n\varphi(x)^n}{\partial x^n}\right]_a+\frac{n}{1}f'(0)\left[\frac{\partial^{n-1}\varphi(x)^{n-1}}{\partial x^{n-1}}\right]_a+\ldots\ldots$$
$$+\frac{n}{1}f^{n-1}(0)\left[\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x}\right]_a+f^n(0).$$

Ganz eben so erhält man, wenn man die Gleichung (21) in §. 10 beachtet:

$$\left[\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}\left(F(x)\frac{\partial\varphi(x)^n}{\partial x}\right)\right]_a=f(0)\left[\frac{\partial^n\varphi(x)^n}{\partial x^n}\right]_a+\frac{n}{1}f'(0)\left[\frac{\partial^{n-1}\varphi(x)^{n-1}}{\partial x^{n-1}}\right]_a+\ldots.$$
$$+\frac{n}{1}f^{n-1}(0)\left[\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x}\right]_a.$$

Subtrahirt man beide Resultate, so ergibt sich

$$f^n(0)=\left[\frac{\partial^n}{\partial x^n}\left(F(x)\varphi(x)^n\right)\right]_a-\left[\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}\left(F(x)\frac{\partial\varphi(x)^n}{\partial x}\right)\right]_a.$$

Nun ist aber

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n}\left(F(x)\varphi(x)^n\right)-\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}\left(F(x)\frac{\partial\varphi(x)^n}{\partial x}\right)=\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}\left[\frac{\partial[F(x)\varphi(x)^n]}{\partial x}-F(x)\frac{\partial\varphi(x)^n}{\partial x}\right]$$

$$=\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}\left[\frac{\partial F(x)}{\partial x}.\varphi(x)^n+F(x)\frac{\partial\varphi(x)^n}{\partial x}-F(x)\frac{\partial\varphi(x)^n}{\partial x}\right]=\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}\left[\varphi(x)^n F'(x)\right].$$

Daraus folgt also, dass allgemein

$$f^n(0)=\left[\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}\left(\varphi(x)^n F'(x)\right)\right]_a$$

ist. Für $n=1$ würde man eben so finden

$$f'(0)=[\varphi(x)F'(x)]_a.$$

Man hätte nämlich

$$f'(0)=\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(F(x)\varphi(x)\right)\right]_a-\left[F(x)\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x}\right]_a,$$

was ganz unmittelbar die angegebene Formel gibt. Fasst man alles Bisherige zusammen, so erhält man folgenden Satz:

Konvergirt die unendliche Reihe

$$F(a)+\left[F'(x)\,\varphi(x)\right]_a\frac{x-a}{\varphi(x)}+\frac{1}{1.2}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(F'(x)\varphi(x)^2\right)\right]_a\left(\frac{x-a}{\varphi(x)}\right)^2$$
$$+\frac{1}{1.2.3}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(F'(x)\varphi(x)^3\right)\right]_a\left(\frac{x-a}{\varphi(x)}\right)^3+\ldots\ldots \quad (32)$$

von $x=a$ bis $x=b$, so ist ihre Summe $=F(x)$.

Dabei muss die Grösse $\frac{x-a}{\varphi(x)}$ Null seyn für $x=a$ und von $x=a$ bis $x=b$ beständig wachsen oder beständig abnehmen, woraus dann von selbst folgt, dass sie immer dasselbe Zeichen hat und endlich ist.

Setzt man $\frac{x-a}{\varphi(x)}=\psi(x)$, so hat man auch folgenden Satz:

Konvergirt die unendliche Reihe

$$F(a)+\left[F'(x)\frac{x-a}{\psi(x)}\right]_a\psi(x)+\frac{1}{1.2}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left\{F'(x)\left(\frac{x-a}{\psi(x)}\right)^2\right\}\right]_a\psi(x)^2$$
$$+\frac{1}{1.2.3}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left\{F'(x)\left(\frac{x-a}{\psi(x)}\right)^3\right\}\right]_a\psi(x)^3+\ldots\ldots \quad (32')$$

von $x=a$ bis $x=b$, so ist ihre Summe $=F(x)$. Dabei muss $\psi(x)$ nur wachsen oder nur abnehmen von $x=a$ bis $x=b$; ferner muss $\psi(a)=0$, aber $\frac{x-a}{\psi(x)}$ für $x=a$ einen bestimmten Werth haben. Was diesen letzteren anbelangt, so erhält man ihn leicht aus §. 13. II. Setzt man dort nämlich $f(z)=z$, $F(z)=\psi(z+a)$, so ist

$$\frac{h}{\psi(h+a)}=\frac{1}{\psi'(h'+a)},\ h' \text{ zwischen 0 und } h$$

wenn $\psi(a)=0$. Setzt man hier $h=x-a$, so ist

$$\frac{x-a}{\psi(x)}=\frac{1}{\psi'(a+x')},\ x' \text{ zwischen 0 und } x-a,$$

also für $x=a$, wo auch $x'=0$:

$$\left(\frac{x-a}{\psi(x)}\right)_a=\frac{1}{\psi'(a)},$$

so dass nicht $\psi'(a)=0$ seyn darf.

Die Reihe (32') pflegt die **Bürmann**'sche zu heissen. Für uns ist jedoch die Form (32) die wichtigere. Sie setzt nothwendig $\varphi(x)$ von demselben Zeichen innerhalb der Gränzen der Konvergenz voraus und lässt $\varphi(a)=0$ nicht zu, so dass $\varphi(x)$ immer dasselbe Zeichen hat wie $\varphi(a)$, dabei immer stetig bleibt, und auch nicht Null wird innerhalb derselben Gränzen.

Gesetzt nun, es gebe innerhalb der Gränzen der Konvergenz der Reihe (32), also zwischen a und b, einen Werth α von x, für den

$$\frac{x-a}{\varphi(x)}=1, \text{ d. h. } x=a+\varphi(x),$$

so ist für denselben die Summe der unendlichen Reihe

$$F(a)+\left[F'(x)\varphi(x)\right]_a+\frac{1}{1.2}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left\{F'(x)\varphi(x)^2\right\}\right]_a+\frac{1}{1.2.3}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left\{F'(x)\varphi(x)^3\right\}\right]_a+\ldots \quad (33)$$

gleich $F(\alpha)$. Man wird also sagen können: Konvergirt die unendliche Reihe (33), so ist ihre Summe $=F(\alpha)$, wobei α so beschaffen ist, dass $\frac{\alpha-a}{\varphi(\alpha)}=1$, d. h. α ist eine Wurzel der Gleichung $x=a+\varphi(x)$. Was α selbst anbelangt, so bestimmt man diese Grösse dadurch, dass man in (33) $F(x)=x$ setzt. Alsdann ist

$$\alpha=a+\varphi(a)+\frac{1}{1.2}\left[\frac{\partial}{\partial x}\varphi(x)^2\right]_a+\frac{1}{1.2.3}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi(x)^3\right]_a+\ldots, \quad (34)$$

wenn die unendliche Reihe konvergirt. $\frac{x-a}{\varphi(x)}$ muss dabei von $x=a$ bis $x=\alpha$ immer dasselbe Zeichen haben und es darf nicht $\varphi(x)=0$ seyn, zugleich muss auch $\frac{x-a}{\varphi(x)}$ blos wachsen oder blos abnehmen von $x=a$ bis $x=\alpha$.

Wir setzen voraus, $\frac{x-a}{\varphi(x)}$, das $=0$ ist für $x=a$, sey innerhalb der Gränzen a und b blos wachsend oder blos abnehmend. Man kann dies gemäss §. 13. I auch dadurch ausdrücken, dass man sagt $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x-a}{\varphi(x)}\right)=\frac{\varphi(x)-(x-a)\varphi'(x)}{\varphi(x)^2}$ sey innerhalb derselben Gränzen immer von demselben Zeichen. Da $\varphi(x)^2$ immer positiv ist, so braucht es blos $\varphi(x)-(x-a)\varphi'(x)$ zu seyn. Wird nun $\varphi(x)-(x-a)\varphi'(x)$ zwischen $x=a$ und $x=b$ nie $=0$ oder ∞, so ist diese Grösse offenbar immer von demselben Zeichen, so dass man die nothwendige Voraussetzung auch in dieser Form aussprechen kann.

Fasst man das zuletzt Gesagte zusammen, so kann man die letzten Sätze auch so aussprechen: Ist die unendliche Reihe

$$a+\varphi(a)+\frac{1}{1.2}\left[\frac{\partial}{\partial x}\varphi(x)^2\right]_a+\frac{1}{1.2.3}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi(x)^3\right]_a+\ldots \quad (34')$$

konvergent und α ihre Summe, so ist die Summe der unendlichen Reihe (33), in so ferne diese Reihe konvergent ist, gleich $F(\alpha)$. Dabei aber muss vorausgesetzt werden, dass nicht $\varphi(x)$ Null oder ∞ seyn könne von $x=a$ bis $x=\alpha$, also dass auch nicht $\varphi(a)=0$; ferner dass $\varphi(x)-(x-a)\varphi'(x)$ immer dasselbe Zeichen habe von $x=a$ bis $x=\alpha$ (was der Fall seyn wird, wenn diese Grösse nicht 0 oder ∞ wird). Alsdann ist auch α eine Wurzel der Gleichung $x=a+\varphi(x)$. Dies ist der Satz von **Lagrange**.

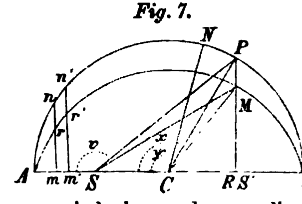
Da $\frac{x-a}{\varphi(x)}$ Null ist für $x=a$ und von da an beständig wächst oder abnimmt, für $x=\alpha$ aber zu 1 geworden ist; ferner $\varphi(x)-(x-a)\varphi'(x)$ gleich $\varphi(a)$ ist für $x=a$ und immer dasselbe Zeichen behält, so wird also $\frac{x-a}{\varphi(x)}$ wachsen mit wachsendem x, wenn $\varphi(a)>0$, dagegen abnehmen mit wachsendem x, wenn $\varphi(a)<0$. Von 0 zu 1, d. h. wenn x von a zu α geht, ist aber $\frac{x-a}{\varphi(x)}$ sicherlich gewachsen; somit muss, wenn $\varphi(a)>0$ ist, nothwendig $\alpha>a$ seyn, damit auch x wachse mit wachsendem $\frac{x-a}{\varphi(x)}$; ist dagegen $\varphi(a)<0$, so wird $\alpha<a$ seyn. Weiter wird zwischen a und α keine Wurzel der Gleichung $x=a+\varphi(x)$ mehr liegen, da sonst zwischen a und α ein Werth von x liegen würde, für den $\frac{x-a}{\varphi(x)}=1$ wäre, so dass, da für $x=\alpha$ auch $\frac{x-a}{\varphi(x)}=1$ ist, von jenem Werthe bis zu $x=\alpha$ letztere Grösse nicht beständig gewachsen wäre. Endlich ist $x=\alpha$ eine einfache Wurzel der Gleichung $x=a+\varphi(x)$. Denn sonst müsste $\frac{\partial}{\partial x}[a+\varphi(x)-x]$ Null seyn für $x=\alpha$,* d. h. man müsste haben $\varphi'(\alpha)-1=0$, und da $\alpha=a+\varphi(\alpha)$, d. h. $\frac{\varphi(\alpha)}{\alpha-a}=1$, so wäre $\frac{\varphi(\alpha)}{\alpha-a}=\varphi'(\alpha)$, $\varphi(\alpha)-(\alpha-a)\varphi'(\alpha)=0$, was damit in Widerspruch ist, dass nicht $\varphi(x)-(x-a)\varphi'(x)=0$ sey.

§. 20.

Als Beispiele der Anwendung des Lagrange'schen Satzes wollen wir die folgenden wählen.

I. Die Planeten bewegen sich in Ellipsen, in deren einem Brennpunkte S (Fig. 7) sich die Sonne befindet. Sey AB die grosse Axe der Ellipse $=2a$, S und S' ihre Brennpunkte, $CS=CS'$ $=e$, wenn C der Mittelpunkt. Alsdann ist A das Perihelium (Sonnennähe), B das Aphelium (Sonnenferne). Der Planet selbst bewegt sich ungleichförmig um die Sonne, schneller in der Nähe des Periheliums, langsamer in der des Apheliums. Immerhin ist die Bewegung jedoch so, dass er die Hälfte von A bis B in derselben Zeit zurücklegt als die zweite. Um nun die hieher gehörigen Bestimmungen leichter durchführen zu können,

Fig. 7.



* Ist überhaupt $f(x)=0$ eine Gleichung und es ist $x=\alpha$ eine Wurzel derselben, d. h. $f(\alpha)=0$, so ist allgemein (§. 15)

$$f(\alpha+h)=hf'(\alpha)+\frac{h^2}{1,2}f''(\alpha)+\ldots+\frac{h^n}{1..n}f^n(\alpha)+\frac{h^{n+1}}{1..n+1}f^{n+1}(\alpha+\Theta h),$$

also wenn $h=x-\alpha$:

$$f(x)=(x-\alpha)f'(\alpha)+\frac{(x-\alpha)^2}{1.2}f''(\alpha)+\ldots+\frac{(x-\alpha)^n}{1..n}f^n(\alpha)+\frac{(x-\alpha)^{n+1}}{1..n+1}f^{n+1}(\alpha+\Theta(x-\alpha)).$$

Ist nun nicht $f'(\alpha)=0$, so lässt sich die zweite Seite, mithin auch die erste blos durch $x-\alpha$ dividiren; ist dagegen $f'(\alpha)=0$, durch $(x-\alpha)^2,\ldots$, so dass $f(x)$ im ersten Falle den Faktor $x-\alpha$, im zweiten $(x-\alpha)^2,\ldots$ enthält, d. h. $x=\alpha$ ist einfache, zweifache ... Wurzel.

denkt man sich einen (eingebildeten) Planeten, der mit dem wahren in demselben Augenblicke von A ausgeht, und in derselben Zeit nach B gelangt, als letzterer, jedoch mit gleichförmiger Geschwindigkeit den über AB beschriebenen Halbkreis durchläuft. Gesetzt nun, der wahre Planet sey in M, der scheinbare in N; man ziehe MR senkrecht auf AB, welche Linie den Kreis in P treffe; man ziehe ferner CM, CP, CN, SM, SP, so ist der Winkel ACN $=\psi$ die **mittlere Anomalie**, ACP $=$ x die **exzentrische Anomalie**, ASM $= v$ die **wahre Anomalie**, während SM $=$ r der Fahrstrahl ist. Kennt man v und r, so kennt man offenbar die Lage des Planeten vollständig. Sey nun τ die Umlaufszeit des Planeten; t die Zeit, welche verfliesst, bis er in M ist, so ist auch τ die Umlaufszeit des eingebildeten Planeten und man hat also

$$\tau : t = 2\pi : \psi,\ \psi = \frac{2\pi t}{\tau},$$

wodurch ψ bekannt ist.

Nun lässt sich ganz elementar beweisen, dass die Fläche des elliptischen Ausschnitts ARM zu der des Kreisausschnitts APR sich verhält, wie die kleine Axe der Ellipse zur grossen, d. h. wie $\sqrt{a^2-e^2}$ zu a. * Ferner verhalten sich die Dreiecke RSM und RSP wie RM zu RP, d. h. wie $\sqrt{a^2-e^2}$: a, also auch ASM : ASP $=\sqrt{a^2-e^2}$: a.

Nach einem Gesetze der Bewegung muss die vom Fahrstrahl beschriebene Fläche der Zeit proportional seyn, d. h. da $a\sqrt{a^2-e^2}\,\pi$ die Fläche der Ellipse ist:

$$ASM : a\sqrt{a^2-e^2}\,\pi = t : \tau,\ ASM = a\sqrt{a^2-e^2}\,\pi\frac{t}{\tau},$$

und da auch $\quad ACN : a^2\pi = t:\tau,\ ACN = a^2\pi\,\dfrac{t}{\tau},$

so folgt $\quad ASM : ACN = \sqrt{a^2-e^2} : a,$

und da weiter $\quad ASM : ASP = \sqrt{a^2-e^2} : a,$

so ist ACN $=$ ASP, mithin da ACN $=$ ACP $-$ NCP, ASP $=$ ACP $-$ SCP, ist auch NCP $=$ SCP. (a) Ferner ist NCP $=\frac{1}{2}$ NP.CN $=\frac{1}{2}a(x-\psi).a=\frac{1}{2}a^2(x-\psi)$, SCP $=\frac{1}{2}$ SC.PR $=\frac{1}{2}e\,.\,a\sin(180^0-x)=\frac{1}{2}ae\sin x$, so dass aus (a) folgt:

$$a(x-\psi) = e\sin x,\ x = \psi + \frac{e}{a}\sin x. \qquad (b)$$

Aus dieser Gleichung hat man x durch ψ zu finden. Kennt man dann x, so ergeben sich v und r. Es ist nämlich

$$CR = -a\cos x,\ SR = e - a\cos x,\ PR = a\sin x,\ MR:PR = \sqrt{a^2-e^2}:a,\ MR = \frac{a\sin x.\sqrt{a^2-e^2}}{a}$$
$$= \sqrt{a^2-e^2}\,.\sin x, \text{ also}$$
$$r^2 = (e-a\cos x)^2 + (a^2-e^2)\sin^2 x = a^2 - 2ae\cos x + e^2\cos^2 x = (a-e\cos x)^2,\ r = a - e\cos x.$$

Dann
$$\sin v = \frac{MR}{SM} = \frac{\sqrt{a^2-e^2}\sin x}{a-e\cos x},\ \cos v = -\frac{SR}{SM} = \frac{a\cos x - e}{a-e\cos x},\ \frac{\sin v}{1+\cos v}$$
$$= \frac{\sqrt{a^2-e^2}}{a-e}\,\frac{\sin x}{1+\cos x},$$

d. h.
$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}v = \sqrt{\frac{a+e}{a-e}}.\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}x.$$

---

* Sind mr, m'r' zwei unendlich nahe Ordinaten der Ellipse; mn, m'n' des Kreises, so muss (§. 13. IV) mm'r'r sowohl als mm'n'n als Rechteck betrachtet werden. Die Flächen verhalten sich dann wie mr zu mn und da diese sich wie $\sqrt{a^2-e^2}$ zu a verhalten, so verhalten sich auch die Flächen eben so. Durch Summirung ähnlicher Elemente entstehen die genannten Ausschnitte, so dass der Satz bewiesen ist. (Vergl. §. 54. II.)

Die Gleichung (b) (das Kepler'sche Problem) gehört nun zur Gattung der in §. 19 gelösten. Das dortige a ist hier ψ, $\varphi(x) = \frac{e}{a}\sin x$, also $\varphi'(x) = \frac{e}{a}\cos x$, $\varphi(x) - (x-a)\varphi'(x) = \frac{e}{a}\sin x - (x-\psi)\frac{e}{a}\cos x$. Bildet man also die unendl. Reihe

$$\psi + \frac{e}{a}\sin\psi + \frac{1}{1.2}\frac{e^2}{a^2}\frac{\partial}{\partial\psi}\sin^2\psi + \frac{1}{1.2.3}\frac{e^3}{a^3}\frac{\partial^2}{\partial\psi^2}\sin^3\psi + \frac{1}{1..4}\frac{e^4}{a^4}\frac{\partial^3}{\partial\psi^3}\sin^4\psi + \ldots.. \qquad (c)$$

und ist dieselbe konvergent, so ist ihre Summe gleich dem Werthe von x, der aus der Gleichung (b) folgt. Dabei darf nicht $\sin x = 0$, also $x = 0$ oder 180^0 seyn, natürlich, da für $\psi = 0$ auch $x = 0$, $\psi = 180^0$ auch $x = 180^0$ ist, man also die Reihe (c) nicht braucht. Ferner soll nicht $\frac{e}{a}\sin x - (x-\psi)\frac{e}{a}\cos x = 0$, d. h. $\operatorname{tg} x = x - \psi$ seyn. Setzen wir $\psi < \pi$ voraus, so ist $x - \psi > 0$ und von $x = 0$ bis $x = \frac{\pi}{2}$, $\operatorname{tg} x > x - \psi$, indem für $x = \psi = 0$ auch $\operatorname{tg} x = 0$ ist und letztere Grösse von da an ins Unendliche wächst; über $x = \frac{\pi}{2}$ ist dann $\operatorname{tg} x$ negativ, also $\operatorname{tg} x < x - \psi$, bis bei $x = \psi = \pi$ wieder $\operatorname{tg} x = x - \psi$ ist. (Dass überhaupt nicht $\operatorname{tg} x = x - \psi$ seyn könne, folgt schon aus der Gleichung (b), die sonst gäbe $\operatorname{tg} x = \frac{e}{a}\sin x$, $\frac{1}{\cos x} = \frac{e}{a}$, $\cos x = \frac{a}{e}$, was unmöglich ist, da $\frac{a}{e} > 1$. Für $x = 0$ und $x = \pi$ freilich ist die Gleichung möglich, da dann $\operatorname{tg} x = \sin x = 0$ ist.) Der aus (c) folgende Werth ist dann die offenbar einzige Wurzel der Gleichung (b) zwischen 0 und π (d. h. zwischen ψ und π). Da $\frac{e}{a}$ durchweg ein sehr kleiner Bruch ist, so konvergirt die Reihe (c) rasch.

Was die in (c) vorhandenen Differentialquotienten betrifft, so ist:

$$\frac{\partial \sin^n\psi}{\partial\psi} = n\sin^{n-1}\psi\cos\psi,$$

$$\frac{\partial^2 \sin^n\psi}{\partial\psi^2} = n(n-1)\sin^{n-2}\psi\cos^2\psi - n\sin^n\psi,$$

$$\frac{\partial^3 \sin^n\psi}{\partial\psi^3} = n(n-1)(n-2)\sin^{n-3}\psi\cos^3\psi - n(3n-2)\sin^{n-1}\psi\cos\psi,$$

$$\frac{\partial^4 \sin^n\psi}{\partial\psi^4} = n(n-1)(n-2)(n-3)\sin^{n-4}\psi\cos^4\psi - 2n(n-1)(3n-4)\sin^{n-2}\psi\cos^2\psi$$
$$+ n(3n-2)\sin^n\psi,$$ u. s. w., so dass

$$\frac{\partial\sin^2\psi}{\partial\psi} = 2\sin\psi\cos\psi,\quad \frac{\partial^2\sin^3\psi}{\partial\psi^2} = 6\sin\psi\cos^2\psi - 3\sin^3\psi,\quad \frac{\partial^3\sin^4\psi}{\partial\psi^3} = 24\sin\psi\cos^3\psi - 40\sin^3\psi\cos\psi,$$

$$\frac{\partial^4\sin^5\psi}{\partial\psi^4} = 120\sin\psi\cos^4\psi - 440\sin^3\psi\cos^2\psi + 65\sin^5\psi, \ldots..,$$ mithin endlich

$$x = \psi + \frac{e}{a}\sin\psi + \left(\frac{e}{a}\right)^2\sin\psi\cos\psi + \left(\frac{e}{a}\right)^3\left(\sin\psi\cos^2\psi - \frac{1}{2}\sin^3\psi\right) + \left(\frac{e}{a}\right)^4\left(\sin\psi\cos^3\psi - \frac{5}{3}\sin^3\psi\cos\psi\right) + \left(\frac{e}{a}\right)^5\left(\sin\psi\cos^4\psi - \frac{11}{3}\sin^3\psi\cos^2\psi + \frac{13}{24}\sin^5\psi\right) + \ldots..$$

Anm. Man kann $\frac{\partial^{n-1}\sin^n\psi}{\partial\psi^{n-1}}$ auch in anderer Weise ausdrücken. Gemäss §. 17. IV ist nämlich $e^{ix} = \cos x + i\sin x$, also auch $e^{-ix} = \cos x - i\sin x$, woraus $2\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{i}$

$= i(e^{-ix} - e^{ix})$ da $\frac{1}{i} = \frac{i}{i^2} = -i$; und $2\cos x = e^{ix} + e^{-ix}$. Daraus folgt für ein positives ganzes m:

$$(2\sin x)^{2m} = \left(e^{-ix} - e^{ix}\right)^{2m} i^{2m} = (i^2)^m \left[e^{-2mix} - \frac{2m}{1} e^{-(2m-2)ix} + \frac{2m(2m-1)}{1.2} e^{-(2m-4)ix} - \dots + e^{2mix}\right] \text{ (§. 10. 1).}$$

Aber $(i^2)^m = (-1)^m$; ferner sind in der Reihe die Koeffizienten von Anfang und Ende her gleich: also ist diese Reihe

$$= e^{2mix} + e^{-2mix} - \frac{2m}{1}[e^{(2m-2)ix} + e^{-(2m-2)ix}] + \frac{2m(2m-1)}{1.2}[e^{(2m-4)ix} + e^{-(2m-4)ix}] - \dots \pm \frac{2m(2m-1)\dots(m+1)}{1.2\dots m} = 2\cos 2mx - 2\frac{2m}{1}\cos(2m-2)x + 2\frac{2m(2m-1)}{1.2}\cos(2m-4)x - \dots \mp 2\frac{2m(2m-1)\dots(m+2)}{1.2\dots(m-1)}\cos 2x \pm \frac{2m(2m-1)\dots(m+1)}{1.2\dots m},$$

so dass also

$$(-1)^m 2^{2m-1}\sin^{2m}x = \cos 2mx - \frac{2m}{1}\cos(2m-2)x + \dots \mp \frac{2m(2m-1)\dots(m+2)}{1.2\dots m-1}\cos 2x \pm \frac{1}{2}\,\frac{2m(2m-1)\dots(m+1)}{1.2\dots m}.$$

Ferner ist

$$(2\sin x)^{2m+1} = (i)^{2m+1}(e^{-ix} - e^{+ix})^{2m+1} = (i)^{2m+1}[e^{-(2m+1)ix} - \frac{2m+1}{1} e^{-(2m-1)ix} + \dots - e^{(2m+1)ix}] = (i)^{2m}\, i\left[(e^{-(2m+1)ix} - e^{(2m+1)ix}) - \frac{2m+1}{1}\left(e^{-(2m-1)ix} - e^{(2m-1)ix}\right) + \dots \pm \frac{(2m+1)2m\dots m+2}{1.2\dots m}(e^{-ix} - e^{ix})\right],$$

d. h. da $i[e^{-aix} - e^{aix}] = 2\sin ax$, $(i)^{2m} = (-1)^m$:

$$(-1)^m e^{2m}\sin^{2m+1}x = \sin(2m+1)x - \frac{2m+1}{1}\sin(2m-1)x + \frac{(2m+1)2m}{1.2}\sin(2m-3)x - \dots \pm \frac{(2m+1)2m\dots(m+2)}{1.2\dots m}\sin x.$$

Daraus folgt nun nach §. 9:

$$(-1)^m 2^{2m-1}\frac{\partial^{2m-1}\sin^{2m}x}{\partial x^{2m-1}} = (2m)^{2m-1}\cos\left[2mx + \frac{2m-1}{2}\pi\right] - \frac{2m}{1}(2m-2)^{2m-1}\cos\left[(2m-2)x + \frac{2m-1}{2}\pi\right] + \dots \pm \frac{2m(2m-1)\dots(m+2)}{1.2\dots m-1}2^{2m-1}\cos\left[2x + \frac{2m-1}{2}\pi\right],$$

$$(-1)^m 2^{2m}\frac{\partial^{2m}\sin^{2m+1}x}{\partial x^{2m}} = (2m+1)^{2m}\sin\left[(2m+1)x + \frac{2m}{2}\pi\right] - \frac{2m+1}{1}(2m-1)^{2m}\sin\left[(2m-1)x + \frac{2m}{2}\pi\right] + \dots \pm \frac{(2m+1)2m\dots(m+2)}{1.2\dots m}\sin\left[x + \frac{2m}{2}\pi\right],$$

d. h. da $\cos\left[\alpha + \frac{2m-1}{2}\pi\right] = \cos\left[\alpha + m\pi - \frac{1}{2}\pi\right] = \cos\left(\alpha - \frac{1}{2}\pi\right)\cos m\pi = (-1)^m\sin\alpha$,
$\sin\left(\alpha + \frac{2m}{2}\pi\right) = \sin(\alpha + m\pi) = \sin\alpha\cos m\pi = (-1)^m\sin\alpha$:

$$2^{2m-1}\frac{\partial^{2m-1}\sin^{2m}x}{\partial x^{2m-1}} = (2m)^{2m-1}\sin 2mx - \frac{2m}{1}(2m-2)^{2m-1}\sin(2m-2)x + \dots \pm \frac{2m(2m-1)\dots(m+2)}{1.2\dots(m-1)}2^{2m-1}\sin 2x,$$

$$2^{2m}\frac{\partial^{2m}\sin^{2m+1}x}{\partial x^{2m+1}} = (2m+1)^{2m}\sin(2m+1)x - \frac{2m+1}{1}(2m-1)^{2m}\sin(2m-1)x + \dots$$
$$\pm \frac{(2m+1)2m\dots(m+2)}{1.2\dots m}1^{2m}\sin x.$$

Hieraus folgt nun:

$$\frac{\partial \sin^2\psi}{\partial\psi} = \sin 2\psi,\ \frac{\partial^2\sin^3\psi}{\partial\psi^2} = \frac{1}{2^2}[3^2\sin 3\psi - 3\sin\psi],\ \frac{\partial^3\sin^4\psi}{\partial\psi^3} = \frac{1}{2^3}[4^3\sin 4\psi - 4.2^3\sin 2\psi],$$
$$\frac{\partial^4\sin^5\psi}{\partial\psi^4} = \frac{1}{2^4}[5^4\sin 5\psi - 5.3^4\sin 3\psi + 10\sin\psi),\quad \frac{\partial^5\sin^6\psi}{\partial\psi^5} = \frac{1}{2^5}[6^5\sin 6\psi - 6.4^5\sin 4\psi$$
$$+ 15.2^5\sin 2\psi],\ \frac{\partial^6\sin^7\psi}{\partial\psi^6} = \frac{1}{2^6}[7^6\sin 7\psi - 7.5^6\sin 5\psi + 21.3^6\sin 3\psi - 35\sin\psi],\ \dots$$

woraus auch folgt:

$$x = \psi + \frac{e}{a}\sin\psi + \frac{1}{2}\left(\frac{e}{a}\right)^2\sin 2\psi + \frac{1}{8}\left(\frac{e}{a}\right)^3(3\sin 3\psi - \sin\psi) + \frac{1}{6}\left(\frac{e}{a}\right)^4(2\sin 4\psi$$
$$- \sin 2\psi) + \frac{1}{384}\left(\frac{e}{a}\right)^5(125\sin 5\psi - 81\sin 3\psi + 2\sin\psi) + \frac{1}{240}\left(\frac{e}{a}\right)^6[81\sin 6\psi - 64\sin 4\psi$$
$$+ 5\sin 2\psi] + \frac{1}{46080}\left(\frac{e}{a}\right)^7[16807\sin 7\psi - 15625\sin 5\psi + 2187\sin 3\psi - 5\sin\psi] + \dots$$

II. Man soll die Gleichung

$$x = a + bx^m$$

auflösen. Hier ist $\varphi(x) = bx^m$, $\frac{\partial^{n-1}\varphi(x)^n}{\partial x^{n-1}} = b^n mn(mn-1)\dots(mn-n+2)x^{mn-n+1}$, also ist die Summe der Reihe $a + ba^m + \frac{2m}{1.2}b^2a^{2m-1} + \frac{3m(3m-1)}{1.2.3}b^3a^{3m-2} + \dots$

$$+ \frac{mn(mn-1)\dots(mn-n+2)}{1.2\dots n}b^n a^{mn-n+1} + \dots,$$

falls diese Reihe konvergent ist, die a am nächsten liegende Wurzel jener Gleichung. Ist $ba^m > 0$, so ist diese Wurzel $> a$; ist $ba^m < 0$, so ist sie $< a$. Da $\varphi'(x) = mbx^{m-1}$, also $\varphi(x) - (x-a)\varphi'(x) = ambx^{m-1} + bx^m - mbx^m = bx^{m-1}[am - (m-1)x]$, so darf nicht 0 zwischen a und der Wurzel liegen, und auch nicht $\frac{ma}{m-1}$. Was die Konvergenz der Reihe anbelangt, so findet man als Quotienten zweier auf einander folgender Glieder:

$$\frac{(mn+m)(mn+m-1)\dots(mn+m-n+1)}{mn(mn-1)\dots(mn-n+2)(n+1)}ba^{m-1}$$
$$= \frac{(mn+m)(mn+m-1)\dots(mn+2)(mn+1)}{(mn-n+m)(mn\ \ n+m-1)\dots(mn-n+2)(n+1)}ba^{m-1}$$
$$= \frac{\left(m+\frac{m}{n}\right)\left(m+\frac{m-1}{n}\right)\dots\left(m+\frac{2}{n}\right)\left(m+\frac{1}{n}\right)}{\left(m-1+\frac{m}{n}\right)\left(m-1+\frac{m-1}{n}\right)\dots\left(m-1+\frac{2}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)}ba^{m-1},$$

was für $n = \infty$ zu $\frac{m^m}{(m-1)^{m-1}}ba^{m-1}$ wird. Somit muss $\pm\frac{m^m}{(m-1)^{m-1}}ba^{m-1} < 1$ seyn.

Anm. Für $m = 2$ ist die Reihe

$$a + ba^2 + 2b^2a^3 + 5b^3a^4 + \dots + \frac{2n(2n-1)\dots(n+2)}{1.2\dots n}b^n a^{n+1} + \dots,$$

und es muss $\pm 4ab < 1$ seyn. Dabei darf die Summe dieser Reihe nicht so liegen, dass zwischen ihr und a sich 0 oder 2a befinden kann.



Da hier die Gleichung $x=a+bx^2$ aufzulösen ist, so findet man $x=\frac{1}{2b}\pm\frac{1}{2b}\sqrt{1-4ab}$. Entwickelt man nun nach §. 17. I $\sqrt{1-4ab}$, wo $\pm 4ab<1$, so ist

$$\sqrt{1-4ab}=1-2ab-2a^2b^2-\ldots-\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n+2)}.4^{n+1}a^{n+1}b^{n+1}-\ldots,$$

also $$\frac{1}{2b}-\frac{1}{2b}\sqrt{1-4ab}=a+a^2b+\ldots+\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n+2)}.2.4^n a^{n+1}b^n+\ldots,$$

und da

$$\frac{1.3..(2n-1)}{2.4..(2n+2)}.2.4^n=\frac{1.3.5..(2n-1)}{1.2.3..(n+1)}2^n=\frac{1.2\ldots 2n}{1.2..(n+1).2.4..2n}2^n=\frac{(n+2)(n+3)..2n}{1.2\ldots n},$$

so sieht man, dass die durch obige Reihe ausgedrückte Wurzel $=\frac{1}{2b}-\frac{1}{2b}\sqrt{1-4ab}$ ist. Man wird sich nunmehr auch überzeugen, dass alle übrigen Bedingungen erfüllt sind. Sey nämlich:

1) $a>0$, $b>0$, also auch $ba^2>0$, so ist $1-4ab<1$, also die Wurzel >0, aber auch $>a$ und $<2a$. Denn für $x=a$ ist $x<a+bx^2$, für $x=2a$ aber $a+bx^2=a+4a^2b$ $=a(1+4ab)<2a$, mithin $x>a+bx^2$, so dass zwischen a und 2a ein Werth von x liegt, für den $x=a+bx^2$, und dieser eben ist die betreffende Wurzel.

2) $a<0$, $b>0$, also $ba^2>0$, so ist $1-4ab$ positiv und >1, also die Wurzel <0, aber $>a$. Denn für $x=0$ ist $x>a+bx^2$, für $x=a$ ist $a+bx^2=a+ba^2>a$, also ist $x<a+bx^2$, so dass eine Wurzel zwischen 0 und a liegt.

3) $a>0$, $b<0$, also $ba^2<0$; $1-4ab>1$, die Wurzel positiv, aber $<a$ und >0. Denn für $x=a: x>a+bx^2$; für $x=0: x<a+bx^2$, woraus die Behauptung folgt.

4) $a<0$, $b<0$, also $ba^2<0$; $1-4ab<1$, also die Wurzel negativ, jedoch $<a$ und $>2a$. Denn für $x=a: x>a+bx^2$; für $x=2a: a+bx^2=a(1+4ab)>2a$, also $x<a+bx^2$, woraus wieder unsere Behauptung folgt.

§. 21.

Wir haben in §. 19 gesehen, wie man unter gewissen Voraussetzungen eine Wurzel der Gleichung $x=a+\varphi(x)$ erhalten kann. Wollte man eben so eine Wurzel der Gleichung $\psi(x)+a=0$ erhalten, so hätte man blos $\varphi(x)=x+\psi(x)$ zu setzen und erhielte sofort folgenden Satz:

Ist die unendliche Reihe

$$a+[a+\psi(a)]+\frac{1}{1.2}\left[\frac{\partial(x+\psi(x))^2}{\partial x}\right]_a+\frac{1}{1.2.3}\left[\frac{\partial^2(x+\psi(x))^3}{\partial x^2}\right]_a+\ldots\ldots$$

konvergent und α ihre Summe, so ist α eine Wurzel der Gleichung $\psi(x)+a$ $=0$. Dabei muss vorausgesetzt werden, dass $x+\psi(x)-(x-a)(1+\psi'(x))$ $=\psi(x)-(x-a)\psi'(x)+a$ nicht 0 sey von $x=a$ bis $x=\alpha$. Alsdann ist auch α einfache Wurzel der Gleichung $\psi(x)+a=0$ und es liegt zwischen a und α keine andere Wurzel. Zugleich ist $\alpha>a$, wenn $a+\psi(a)>0$; $\alpha<a$, wenn $a+\psi(a)<0$; a selbst darf aber nicht Wurzel seyn, d. h. man darf nicht $a+\psi(a)=0$ haben.

Man kann jedoch eine andere, oft bequemere Form wählen. Setzt man nämlich in der Gleichung (34′) $\varphi(x)=k\frac{x-a}{f(x)}$, wo k eine beliebige Konstante, so hat man folgenden Satz:

Ist die unendliche Reihe

$$a+k\left(\frac{x-a}{f(x)}\right)_a+\frac{k^2}{1.2}\left[\frac{\partial\left(\frac{x-a}{f(x)}\right)^2}{\partial x}\right]_a+\frac{k^3}{1.2.3}\left[\frac{\partial^2\left(\frac{x-a}{f(x)}\right)^3}{\partial x^2}\right]_a+\ldots \quad (35)$$

konvergent und α ihre Summe, so ist α eine Wurzel der Gleichung $\frac{x-a}{\frac{k(x-a)}{f(x)}}=1$, d. h. $f(x)=k$, vorausgesetzt, dass nicht $\frac{x-a}{f(x)}$ Null oder ∞ ist von $x=a$ bis $x=\alpha$. Zugleich darf nicht $\varphi(x)-(x-a)\varphi'(x)=\frac{k(x-a)^2}{f(x)^2}f'(x)$ das Zeichen wechseln, d. h. $f'(x)$ muss immer dasselbe Zeichen haben und endlich seyn von $x=a$ bis $x=\alpha$. Alsdann ist α eine einfache Wurzel der Gleichung $f(x)=k$*, und zwischen a und α liegt keine andere Wurzel dieser Gleichung.

Da die hier vorkommenden Grössen in der Regel für $x=a$ die Form $\frac{0}{0}$ annehmen, so wird man, um sie berechnen zu können, zuerst die Auswerthung dieser und verwandter Formen kennen müssen, ehe man die wichtige Formel (35) anwenden kann. Wir wollen demnach ihre Anwendung noch zunächst aussetzen und uns zu den so eben genannten Formen wenden. (Siehe §. 23.)

Vierter Abschnitt.

Untersuchung der scheinbar unbestimmten Formen.

§. 22.

I. Gesetzt die Funktionen $f(x)$, $F(x)$ seyen beide Null für $x=a$, so wird der Bruch $\frac{f(x)}{F(x)}$ für $x=a$ die Form $\frac{0}{0}$ annehmen und man wird sich die Frage zu stellen haben, welches nun der wahre Werth dieser Grösse sey. Im Allgemeinen ist dieser Werth freilich unbestimmt, in so ferne man nämlich nicht wissen sollte, woher diese Form stammt; weiss man aber, dass sie aus $\frac{f(x)}{F(x)}$ entstanden ist, und setzt voraus, dieser Bruch bleibe stetig auch für $x=a$, so wird man ganz wohl den wahren Werth bestimmen können. Wie nämlich bereits angegeben, wird man die ganz natürliche Voraussetzung machen, es bleibe der Werth des Bruches $\frac{f(x)}{F(x)}$ in der Nähe von $x=a$ stetig, so dass, wenn man $x=a+h$ setzt und h gegen Null gehen lässt, der so erscheinende Gränzwerth eben der wahre Werth des Bruches $\frac{f(a)}{F(a)}$ sey. Nun ist aber (§. 15):

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a+\Theta h),\quad F(a+h)=F(a)+hF'(a+\Theta_1 h),$$

also da $f(a)=0$, $F(a)=0$:

$$\frac{f(a+h)}{F(a+h)}=\frac{f'(a+\Theta h)}{F'(a+\Theta_1 h)}.$$

---

* Wenn nämlich nicht $f'(\alpha)=0$ ist.

Lässt man hier h gegen Null gehen, so erhält man

$$\frac{f(a)}{F(a)} = \frac{f'(a)}{F'(a)},$$

wodurch der gesuchte Werth gefunden ist. Da die in dieser Gleichung ausgesprochene Regel leicht in Worten auszusprechen ist, so wollen wir dies dem Leser überlassen.

Wäre aber $f'(a)=0$, $F'(a)=0$ nebst $f(a)=0$, $F(a)=0$, so hätte man eben so

$$f(a+h) = \frac{h^2}{1.2} f''(a+\theta h), \quad F(a+h) = \frac{h^2}{1.2} F''(a+\theta_1 h),$$

also
$$\frac{f(a+h)}{F(a+h)} = \frac{f''(a+\theta h)}{F''(a+\theta_1 h)}, \quad \frac{f(a)}{F(a)} = \frac{f''(a)}{F''(a)}.$$

Wie man hier weiter geht ist klar. Ist allgemein:

$f(a)=f'(a)=0, \ldots, \overset{n}{f}(a)=0$, $F(a)=F'(a)=\ldots=\overset{n}{F}(a)=0$, nicht aber $\overset{n+1}{f}(a)$, $\overset{n+1}{F}(a)$, beide $=0$, so ist
$$\frac{f(a)}{F(a)} = \frac{\overset{n+1}{f}(a)}{\overset{n+1}{F}(a)}.$$

Als Beispiele hiezu mögen folgende dienen:

$\frac{1-x^n}{1-x}$ ist $\frac{0}{0}$ für $x=1$; aber $\frac{\partial(1-x^n)}{\partial x} = -nx^{n-1}$, $\frac{\partial(1-x)}{\partial x} = -1$; für $x=1$ sind diese Grössen $-n$ und -1, also ist $\frac{1-x^n}{1-x}$ für $x=1$: $\frac{-n}{-1}=n$.

$\frac{1-x^n}{1-x^2}$ ist eben so Null für $x=1$; $\frac{\partial(1-x^n)}{\partial x} = -nx^{n-1}$, $\frac{\partial(1-x^2)}{\partial x} = -2x$ geben für $x=1$: $-n$, -2, also ist für $x=1$: $\frac{1-x^n}{1-x^2} = \frac{n}{2}$. $\frac{1-\cos x}{x^2}$ ist $\frac{0}{0}$ für $x=0$; aber $\frac{\partial(1-\cos x)}{\partial x} = \sin x$, $\frac{\partial x^2}{\partial x} = 2x$ sind abermals 0 für $x=0$; $\frac{\partial^2(1-\cos x)}{\partial x^2} = \cos x$, $\frac{\partial^2(x^2)}{\partial x^2} = 2$ geben 1 und 2 für $x=0$, also ist $\frac{1-\cos x}{x^2}$ für $x=0$ gleich $\frac{1}{2}$. $\frac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$ für $x=0$ ist 2; $\frac{\sin x}{x}$ für $x=0$ ist 1; $\frac{1-(n+1)x^n+nx^{n+1}}{(1-x)^2}$ für $x=1$ ist $\frac{n(n+1)}{2}$; $\frac{l(x)}{x-1}$ für $x=1$ ist 1; $\frac{x-\sin x}{x^3}$ für $x=0$ ist $\frac{1}{6}$; $\frac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$ ist 2 für $x=0$; $\frac{x^4-4x+3}{x^4-x^3-x+1}$ für $x=1$ ist 2; $\frac{x^x-x}{1-x+l(x)}$ für $x=1$ ist -2; $\frac{\sqrt{x^3-1}+\sqrt{(x-1)^3}}{\sqrt{(x^2-1)^3}-x+1}$ für $x=1$ ist $-\frac{3}{2}$;

$\frac{x\sqrt[4]{3a^3x-2x^4}-ax\sqrt[5]{a^4x}}{a-\sqrt[3]{ax^3}}$ für $x=a$ ist $\frac{81}{20}a^2$.

II. Gesetzt es werden die beiden Grössen $f(x)$, $F(x)$ für $x=a$ unendlich gross, so erscheint alsdann der Bruch $\frac{f(x)}{F(x)}$ unter der Form $\frac{\infty}{\infty}$, deren wahren Werth man nun ebenfalls ermitteln soll. Unter der Voraussetzung $\frac{f(x)}{F(x)}$ bleibe stetig in der Nähe des Werthes $x=a$, wird man setzen

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{\frac{1}{F(x)}}{\frac{1}{f(x)}},$$

und beachten, dass für $x=a$ jetzt $\frac{1}{F(x)}$ und $\frac{1}{f(x)}$ Null werden. Daraus folgt (Nr. I.), dass der Werth $\frac{f(a)}{F(a)}$ gleich ist dem Werthe

$$\frac{-\frac{F'(a)}{F(a)^2}}{-\frac{f'(a)}{f(a)^2}}=\frac{F'(a)}{f'(a)}\cdot\frac{f(a)^2}{F(a)^2},$$

indem $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{f(x)}\right)=-\frac{f'(x)}{f(x)^2}$ ist. Man hat also

$$\frac{f(a)}{F(a)}=\frac{F'(a)}{f'(a)}\left(\frac{f(a)}{F(a)}\right)^2,\quad 1=\frac{F'(a)}{f'(a)}\cdot\frac{f(a)}{F(a)},$$

so dass
$$\frac{f(a)}{F(a)}=\frac{f'(a)}{F'(a)},$$

mithin ganz dieselbe Regel gilt, wie in Nr. I. Man wird jedoch hiebei beachten, dass weil $f(a)$, $F(a)$ unendlich sind für $x=a$, auch $f'(a)$, $F'(a)$ unendlich seyn werden; kann man aber den Werth von $\frac{f'(a)}{F'(a)}$ in irgend einer Weise ermitteln, so ist man durch diese Betrachtung dennoch zum Ziele gelangt.

So z. B. wird $\frac{l(x)}{\cot g\, x}$ für $x=0$ unter der Form $\frac{\infty}{\infty}$ erscheinen. Aber $\frac{\partial l(x)}{\partial x}=\frac{1}{x}$, $\frac{\partial \cot g\, x}{\partial x}=-\frac{1}{\sin^2 x}$ also hat man den Werth von $\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}}=-\frac{\sin^2 x}{x}$ für $x=0$ zu ermitteln. Nach Nr. I. ist derselbe $=0$, so dass $\frac{l(x)}{\cot g\, x}$ Null ist für $x=0$.

III. Wird in dem Produkte $f(x).\,F(x)$ für $x=a$: $f(a)=0, F(a)=\infty$, so erhält man die Form $0.\infty$. Da aber

$$f(x)\,F(x)=\frac{f(x)}{\frac{1}{F(x)}}=\frac{F(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

und diese letzten Formen auf $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ herauskommen, so kann man geradezu die früheren Regeln wieder in Anwendung bringen.

Aehnlich verhält es sich mit der Form $\infty-\infty$, wenn z. B. in $\frac{\varphi(x)}{f(x)}-\frac{\psi(x)}{F(x)}$ für $x=a$: $f(a)=F(a)=0$, aber $\varphi(a)$, $\psi(a)$ endlich und nicht 0 sind. Da zunächst
$$\frac{\varphi(x)}{f(x)}-\frac{\psi(x)}{F(x)}=\frac{\varphi(x)F(x)-\psi(x)f(x)}{f(x)F(x)},$$

so kommt diese Form auf $\frac{0}{0}$ zurück und wird also gemäss Nr. I. behandelt,

Z. B. $(a-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2a}$ wird $0.\infty$ für $x=a$. Aber $(a-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2a}=\frac{a-x}{\cot g\frac{\pi x}{2a}}$, und

$\frac{\partial(a-x)}{\partial x}=-1$, $\frac{\partial \operatorname{cotg}\frac{\pi x}{2a}}{\partial x}=-\frac{\pi}{2a}\cdot\frac{1}{\sin^2\frac{\pi x}{2a}}$, welche Grösse für $x=a$ gleich $-\frac{\pi}{2a}$ ist; mithin ist $(a-x)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2a}$ für $x=a$ gleich $\frac{-1}{-\frac{\pi}{2a}}=\frac{2a}{\pi}$. $\frac{1}{l(x)}-\frac{1}{x-1}$ wird $\infty-\infty$ für $x=1$; aber $\frac{1}{l(x)}-\frac{1}{x-1}=\frac{x-1-l(x)}{(x-1)l(x)}$, $\frac{\partial(x-1-l(x))}{\partial x}=1-\frac{1}{x}$, $\frac{\partial^2(x-1-l(x))}{\partial x^2}=\frac{1}{x^2}$ wird 1 für $x=1$; $\frac{\partial[(x-1)l(x)]}{\partial x}=(x-1)\frac{1}{x}+l(x)=1-\frac{1}{x}+l(x)$, $\frac{\partial^2[(x-1)l(x)]}{\partial x^2}=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}$ wird 2 für $x=1$, also ist $\frac{1}{l(x)}-\frac{1}{x-1}$ gleich $\frac{1}{2}$ für $x=1$. $\operatorname{cotg} x-\frac{1}{x}$ wird $\infty-\infty$ für $x=0$; aber $\operatorname{cotg} x-\frac{1}{x}=\frac{x\cos x-\sin x}{x\sin x}$, $\frac{\partial(x\cos x-\sin x)}{\partial x}=-x\sin x$, $\frac{\partial^2(x\cos x-\sin x)}{\partial x^2}=-\sin x-x\cos x$ wird 0 für $x=0$; $\frac{\partial(x\sin x)}{\partial x}=x\cos x+\sin x$, $\frac{\partial^2(x\sin x)}{\partial x^2}=2\cos x-x\sin x$ wird 2 für $x=0$, also ist $\operatorname{cotg} x-\frac{1}{x}$ gleich 0 für $x=0$.

$l\left(2-\frac{x}{a}\right)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2a}$ wird $0.\infty$ für $x=a$; aber $l\left(2-\frac{x}{a}\right)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2a}=\frac{l\left(2-\frac{x}{a}\right)}{\operatorname{cotg}\frac{\pi x}{2a}}$; $\frac{\partial l\left(2-\frac{x}{a}\right)}{\partial x}=-\frac{1}{2a-x}$ wird $-\frac{1}{a}$ für $x=a$; $\frac{\partial \operatorname{cotg}\frac{\pi x}{2a}}{\partial x}=-\frac{\pi}{2a}\cdot\frac{1}{\sin^2\frac{\pi x}{2a}}$ wird $-\frac{\pi}{2a}$ für $x=a$, also ist $l\left(2-\frac{x}{a}\right)\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2a}$ gleich $\frac{2}{\pi}$ für $x=a$. $x^n\, l(x)$ für $x=0$ wird $0.\infty$, wenn $n>0$; aber $x^n\, l(x)=\frac{l(x)}{x^{-n}}$, $\frac{\partial l(x)}{\partial x}=\frac{1}{x}$, $\frac{\partial x^{-n}}{\partial x}=-n x^{-(n+1)}$, $\frac{\frac{1}{x}}{-nx^{-(n+1)}}=\frac{-x^n}{n}$ wird 0 für $x=0$, also ist $x^n\, l(x)=0$ für $x=0$ und $n>0$.

IV. Sind y, z zwei Funktionen von x, so beschaffen, dass für $x=a$:

$y=0$, $z=0$, so erlangt y^z die unbestimmte Form 0^0,
$y=\infty$, $z=0$, „ „ y^z „ „ „ ∞^0,
$y=1$, $z=\pm\infty$, „ „ y^z „ „ „ $1^{\pm\infty}$,
$y=0$, $z=\pm\infty$, „ „ y^z „ „ „ $0^{\pm\infty}$.

Da aber immer $l(y^z)=z\,l(y)$, so wird $l(y^z)$ in diesen Fällen:
$0\,l(0)=-0.\infty$, $0\,l(\infty)=0.\infty$, $\pm\infty\, l(1)=\pm\infty.0$, $\pm\infty\, l(0)=\pm\infty(-\infty)$,
so dass diese Formen auf das Frühere zurückkommen. Kann man nun $l(y^z)$ ermitteln, so hat man auch y^z. Was übrigens die letzte Form anbelangt, so ist $\pm\infty(-\infty)=\mp\infty$, also dann y^z gleich $e^{\mp\infty}$, d. h. gleich 0 oder ∞.

Man habe z. B. x^x für $x=0$ zu ermitteln. Es ist $l(x^x)=x\,l(x)$ und $x\,l(x)=\frac{l(x)}{\frac{1}{x}}$ wird $\frac{\infty}{\infty}$ für $x=0$; aber $\frac{\partial l(x)}{\partial x}=\frac{1}{x}$, $\frac{\partial\left(\frac{1}{x}\right)}{\partial x}=-\frac{1}{x^2}$, also hat man $\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=-x$

für $x=0$ zu ermitteln; dies ist aber $=0$, also ist $x^x=e^0=1$ für $x=0$. $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ wird 1^∞ für $x=\infty$; aber $l\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = x\,l\left(1+\frac{1}{x}\right)$ wird $\infty.0$ für $x=\infty$ und

ist $= \frac{l\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$ und dies gleich $\frac{\frac{1}{x^2}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{x}}}{-\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1+\frac{1}{x}}$ für $x=\infty$, d. h. gleich 1, mithin ist $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e^1 = e$ für $x=\infty$ (§. 2). $\left(\frac{1}{x}\right)^x$ wird ∞^0 für $x=0$; aber $l\left(\frac{1}{x}\right)^x = x\,l\left(\frac{1}{x}\right) = -x\,l(x)$ und da dies $=0$ ist für $x=0$, so ist auch $\left(\frac{1}{x}\right)^x = 1$ für $x=0$.

V. Gesetzt $\varphi(x)$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$,..., $\psi(x)$, $\psi_1(x)$,... seyen Funktionen von x, die für $x=a$ Null sind, m sey eine positive, aber sonst beliebige Zahl, so wird der Bruch

$$\frac{A\,\varphi(x)^m + B\,\varphi_1(x)^m + C\,\varphi_2(x)^m + \dots\dots}{A'\,\psi(x)^m + B'\psi_1(x)^m + C'\psi_2(x)^m + \dots};$$

für $x=a$ die Form $\frac{0}{0}$ annehmen, wenn A,B,.., A',B',.. beliebige Konstanten sind. Setzt man hier $x=a+h$, so hat man für diesen Bruch, wenn man beachtet, dass $\varphi(a)$,... Null sind:

$$\frac{A h^m \varphi'(a+\Theta h)^m + B h^m \varphi_1'(a+\Theta h)^m + \dots}{A' h^m \psi'(a+\Theta h)^m + B' h^m \psi_1'(a+\Theta h)^m + \dots};$$

dividirt man hier durch h^m, lässt dann h unendlich abnehmen, so ergibt sich als Werth des vorgelegten Bruches für $x=a$:

$$\frac{A\,\varphi'(a)^m + B\,\varphi_1'(a)^m + C\,\varphi_2'(a)^m + \dots\dots}{A'\psi'(a)^m + B'\psi_1'(a)^m + B'\psi_2'(a)^m + \dots}.$$

Sey z. B. $\frac{\sqrt[3]{(a^2-x^2)} + \sqrt[3]{(a-x)^2}}{\sqrt[3]{(a-x)} - \sqrt[3]{(a^3-x^3)}}$ für $x=a$ zu ermitteln.

Hier ist $\varphi(x)=a^2-x^2$, $\varphi'(a)=-2a$; $\varphi_1(x)=(a-x)^2$, $\varphi_1'(a)=0$; $\psi(x) = a-x$, $\psi'(a)=-1$; $\psi_1(x)=a^3-x^3$, $\psi_1'(x)=-3a^2$; $A=B=A'=1$, $B' = -1$, $m=\frac{1}{3}$, also ist der Werth gleich

$$\frac{\sqrt[3]{-2a}}{-1+\sqrt[3]{3a^2}} = \frac{\sqrt[3]{2a}}{1-\sqrt[3]{3a^2}}.$$

Eben so ist

$$\frac{\sqrt{(x-\sin x)} - \sqrt{x}}{\sqrt{x-\sin x} - \sqrt{1-\cos x}} \text{ für } x=0 : \frac{0}{0}.$$

Aber $\varphi(x)=\psi(x)=x-\sin x$, $\varphi'(0)=\psi'(0)=0$, $\varphi_1(x)=x$, $\varphi_1'(0)=1$;

$\psi_1(x)=1-\cos x$, $\psi_1'(0)=0$, $m=\frac{1}{2}$, also ist der Werth gleich $\frac{-1}{0-0}=-\infty$ (oder $=\infty$, je nachdem $0-0$ zu $+0$ oder -0 wird).

VI. Es kann sich endlich ereignen, dass alle angegebenen Methoden dennoch nicht zum Ziele führen. Alsdann wird man geradezu zur Reihen-Entwicklung übergehen, wie dies im Grunde ja auch gleich anfänglich geschehen ist.

Wäre z. B. der Werth von

$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$$

für $x=a$ zu ermitteln, was nach den früheren Methoden nicht wohl angienge, so setze man $x=a+h$, nehme sogleich $\frac{h}{a}<1$, und hat (§. 17. I);

$$\frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}+\sqrt{h}}{\sqrt{(a+h)^2-a^2}}=\frac{(a+h)^{\frac{1}{2}}-\sqrt{a}+\sqrt{h}}{\sqrt{2ah+h^2}}=\frac{\sqrt{a}+\frac{1}{2}\frac{h}{\sqrt{a}}-\frac{1}{8}\frac{h^2}{\sqrt{a^3}}+\ldots\sqrt{a}+\sqrt{h}}{\sqrt{h}\sqrt{2a+h}}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\frac{h}{\sqrt{a}}\ldots+\sqrt{h}}{\sqrt{h}\sqrt{2a+h}}=\frac{\frac{1}{2}\frac{\sqrt{h}}{\sqrt{a}}-\ldots+1}{\sqrt{2a+h}}.$$

Setzt man hier $h=0$, so erhält man $\frac{1}{\sqrt{2a}}$ als Werth des obigen Bruches für $x=a$.

Es versteht sich ganz von selbst, dass man die Reihenentwicklung ganz unbedingt benützen darf, gleichviel, ob die früheren Methoden zum Ziele führen oder nicht. So wäre (§. 16), um $x^{-n}e^{-\frac{1}{x^2}}$ für $x=0$ (wo alsdann diese Grösse zu $0.\infty$ wird) zu bestimmen, die Grösse $x^{-n}e^{-\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{x^n e^{\frac{1}{x^2}}}$

$$=\frac{1}{x^n\left[1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{1.2}\cdot\frac{1}{x^4}+\ldots\right]}$$ und so lange nicht $n=\infty$ ist, wird immer im Nenner eine ganze Reihe von Gliedern bleiben, die x im Nenner haben, die also ∞ werden für $x=0$ und desshalb 0 als Werth von $\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^n}$ geben, wodurch die Behauptung in der Anmerkung zu §. 16 wird gerechtfertigt seyn. Eben so ist $\frac{x-\sin x}{x^3}=\frac{1}{6}-\frac{1}{120}x^2+\ldots$, also $=\frac{1}{6}$ für $x=0$ u. s. w.

VII. Bei der Bestimmung von $\frac{\partial y}{\partial x}$ nach §. 8 kann diese Grösse für gewisse Werthe von x und y ebenfalls unter der Form $\frac{0}{0}$ erscheinen. Das Verfahren, wie wir es angegeben, bleibt jedoch dasselbe.

So z. B. folgt aus $y^4-a^2y^2+2a^2x^2-x^4=0$, dass $x=0$ und $y=0$ zusammen gehören; ferner ist

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{-2a^2x+2x^3}{2y^3-a^2y}$$

und wird $\frac{0}{0}$ für $x=0$, $y=0$. Alsdann ist eben

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{-2a^2+6x^2}{6y\frac{\partial y}{\partial x}-a^2\frac{\partial y}{\partial x}} \text{ (für } x=0,\ y=0),$$

d. h.
$$\frac{\partial y}{\partial x}\left(-a^2\frac{\partial y}{\partial x}\right)=-2a^2,\ \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2=2;\ \frac{\partial y}{\partial x}=\pm\sqrt{2}.$$

Für $y^2(a-x)=x^3$, wo wieder $x=0$, $y=0$ zusammen gehören, ist $\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{3x^2+y^2}{2y(a-x)}$ und wird $\frac{0}{0}$ wenn $x=y=0$. Alsdann ist

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{6x+2y\frac{\partial y}{\partial x}}{2\frac{\partial y}{\partial x}(a-x)-2y} \text{ (für } x=0=y),$$

d. h.
$$2a\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2=0,\ \frac{\partial y}{\partial x}=0.$$

Aus $(y^2+x^2)^2-6axy^2-ax^2(2x-a)=0$ folgt $\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{3ay^2-2x(y^2+x^2)+3ax^2-a^2x}{2(y^2+x^2)y-6axy}$ und wird $\frac{0}{0}$ für $x=y=0$. Alsdann ist

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{6ay\frac{\partial y}{\partial x}-2(y^2+x^2)-4x(y\frac{\partial y}{\partial x}+x)+6ax-a^2}{2\frac{\partial y}{\partial x}(y^2+x^2)+4y(y\frac{\partial y}{\partial x}+x)-6ay-6ax\frac{\partial y}{\partial x}} \text{ (für } x=y=0),$$

woraus, da der Nenner $=0$, der Zähler $=-a^2$ ist, folgt $\frac{\partial y}{\partial x}=-\infty$.

§. 23.

Kehren wir nunmehr zu §. 21 zurück, so können wir in der dortigen Formel (35) die Koeffizienten von $k, k^2, \ldots$ bestimmen. Diese Bestimmung könnte ganz direkt in der dort vorgeschriebenen Weise erhalten werden; es ist jedoch bequemer, folgenden Weg zu derselben einzuschlagen.

Bezeichnen wir die Reihe (35) durch

$$a+A_1k+A_2k^2+\ldots\ldots+A_nk^n+\ldots\ldots \qquad \text{(a)}$$

so folgt aus der Formel (32′) in §. 19, wenn man dort $\psi(x)=f(x)$, $F(x)=x$, $F'(x)=1$ setzt, dass

$$x=a+A_1f(x)+A_2f(x)^2+\ldots+A_nf(x)^n+\ldots, \qquad \text{(b)}$$

unter der Voraussetzung, dass diese Reihe von $x=a$ an, für welchen Werth $f(x)=0$ ist, konvergire. Da angenommen, die Reihe (35) in §. 21 konvergire, also auch die (a) von $k=0$ an, so konvergirt eben desshalb auch (b) von $x=a$ an. Nunmehr ist es leicht, die Grössen $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ aus (b) zu bestimmen. Man hat nämlich zuerst

$$\frac{x-a}{f(x)}=A_1+A_2f(x)+\ldots\ldots,$$

woraus für $x=a$ (da $f(a)=0$) nach §. 22:

$$\frac{1}{f'(a)}=A_1=\left(\frac{x-a}{f(x)}\right)_a,$$

welche Gleichung A_1 bestimmt.

Sodann ist $\qquad \dfrac{x-a-A_1 f(x)}{f(x)^2} = A_2 + A_3 f(x) + \ldots,$

woraus für $x=a$: $\qquad A_2 = \left(\dfrac{x-a-A_1 f(x)}{f(x)^2}\right)_a$.

Da die Grösse erster Seite einen bestimmten Werth hat, so ist es auch so mit der auf der zweiten Seite; da aber der Nenner für $x=a$ zu Null wird, so muss es auch der Zähler seyn, * wie man auch unmittelbar sieht. Aber $\dfrac{\partial f(x)^2}{\partial x} = 2f(x)\,f'(x)$ ist noch 0 für $x=a$, also muss auch $\dfrac{\partial[x-a-A_1 f(x)]}{\partial x} = 1 - A_1 f'(x)$ es seyn; dann ist $\dfrac{\partial^2 f(x)^2}{\partial x^2} = 2f'(x)^2 + 2f(x)f''(x)$, was für $x=a$ zu $2f'(a)^2$ wird; eben so $\dfrac{\partial^2[x-a-A_1 f(x)]}{\partial x^2} = -A_1 f''(x)$, so dass also

$$A_2 = -\frac{A_1 f''(a)}{2f'(a)^2}.$$

Allgemein ist nun

$$\frac{x-a-A_1 f(x) - A_2 f(x)^2 - \ldots - A_{n-1} f(x)^{n-1}}{f(x)^n} = A_n + A_{n+1} f(x) + \ldots,$$

woraus für $x=a$:

$$A_n = \left[\frac{x-a-A_1 f(x) - A_2 f(x)^2 - \ldots - A_{n-1} f(x)^{n-1}}{f(x)^n}\right]_a.$$

Nun aber findet sich:

$\dfrac{\partial f(x)^m}{\partial x} = m f(x)^{m-1} f'(x)$; $\dfrac{\partial^2 f(x)^m}{\partial x^2} = m(m-1) f(x)^{m-2} f'(x)^2 + m f(x)^{m-1} f''(x)$; $\dfrac{\partial^3 f(x)^m}{\partial x^m}$ $= m(m-1)(m-2) f(x)^{m-3} f'(x)^3 + 3m(m-1) f(x)^{m-2} f'(x) f''(x) + m f(x)^{m-1} f^3(x)$;

$\dfrac{\partial^4 f(x)^m}{\partial x^m} = m(m-1)(m-2)(m-3) f(x)^{m-4} f'(x)^4 + 6m(m-1)(m-2) f(x)^{m-3} f'(x)^2 f''(x)$ $+ 3m(m-1) f(x)^{m-2} f''(x)^2 + 4m(m-1) f(x)^{m-2} f'(x) f^3(x) + m f(x)^{m-1} f^4(x)$;

$\dfrac{\partial^5 f(x)^m}{\partial x^5} = m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4) f(x)^{m-5} f'(x)^5 + 10m(m-1)(m-2)(m-3)$ $f(x)^{m-4} f'(x)^3 f''(x) + 15m(m-1)(m-2) f(x)^{m-3} f'(x) f''(x)^2 + 10m(m\;\;1)(m-2) f(x)^{m-3}$ $f'(x)^2 f^3(x) + 10m(m-1) f(x)^{m-2} f''(x) f^3(x) + 5m(m-1) f(x)^{m-2} f'(x)\, f^4(x) + m f(x)^{m-1}$ $f^5(x)$; ....

Daraus ist ersichtlich, dass $\dfrac{\partial^n f(x)^m}{\partial x^n}$ mit dem Gliede $m(m-1) \ldots\ldots (m-n+1) f(x)^{m-n} f'(x)^n$ anfängt, während alle anderen Glieder höhere Potenzen von $f(x)$ enthalten. Demnach ist

* Ist überhaupt $\dfrac{f(x)}{F(x)}$ eine Grösse, von der man weiss, dass sie für $x=a$ einen endlichen Werth A hat, und sind $F(a), F'(a), \ldots, F^n(a)$ Null, nicht aber $F^{n+1}(a) = 0$, so müssen auch $f(a), f'(a), \ldots, f^n(a)$ Null seyn, da sonst $\dfrac{f(a)}{F(a)}$ nach §. 22 nicht endlich wäre, was gegen die Annahme streitet. Im Texte wird hievon mehrfach Gebrauch gemacht.

$$\frac{\partial^n f(x)^n}{\partial x^n} = n(n-1)\ldots 1\, f'(x)^n + P,$$

von P jedenfalls den Faktor f(x) enthält, so dass für $x = a$:

$$\frac{\partial^n f(x)^n}{\partial x^n} = n(n-1)\ldots 1\, f'(a)^n$$

ist. Wie ferner leicht ersichtlich, verschwinden alle Differentialquotienten von $f(x)^n$ bis zum n^{ten} für $x = a$, so dass

$$A_n = \frac{\left[-A_1 \frac{\partial^n f(x)}{\partial x^n} - A_2 \frac{\partial^n f(x)^2}{\partial x^n} - \ldots - A_{n-1} \frac{\partial^n f(x)^{n-1}}{\partial x^n}\right]_a}{1.2.3\ldots n f'(a)^n},\ n > 1.$$

Aus den obigen Entwicklungen ergibt sich aber leicht für $x = a$:

$$\frac{\partial^3 f(x)^2}{\partial x^3} = 6f'(a)f''(a),\ \frac{\partial^4 f(x)^2}{\partial x^4} = 6f''(a)^2 + 8f'(a)f^3(a),\ \frac{\partial^5 f(x)^2}{\partial x^5} = 20f''(a)f^3(a) + 10f'(a)f^4(a),$$

$$\frac{\partial^4 f(x)^3}{\partial x^4} = 36f'(a)^2 f''(a),\ \frac{\partial^5 f(x)^3}{\partial x^5} = 90f'(a)f''(a)^2 + 60f'(a)^2 f^3(a), \ldots\ldots,$$

$$\frac{\partial^5 f(x)^4}{\partial x^5} = 240f'(a)^3 f''(a), \ldots\ldots$$

Demnach ist:

$$\left.\begin{aligned}
A_1 &= \frac{1}{f'(a)};\ A_2 = -\frac{A_1 f''(a)}{1.2f'(a)^2};\ A_3 = \frac{-A_1 f^3(a) - 6A_2 f'(a)f''(a)}{1.2.3f'(a)^3},\\
A_4 &= \frac{-A_1 f^4(a) - 2A_2[3f''(a)^2 + 4f'(a)f^3(a)] - 36A_3 f'(a)^2 f''(a)}{1.2.3.4f'(a)^4},\\
A_5 &= \frac{\begin{array}{c}-A_1 f^5(a) - 10A_2[2f''(a)f^3(a) + f'(a)f^4(a)] - 30A_3 f'(a)[3f''(a)^2 + 2f'(a)f^3(a)]\\ -240A_4 f'(a)^3 f''(a)\end{array}}{1.2.3.4.5\, f'(a)^5},
\end{aligned}\right\}\ (c)$$

u. s. w.

Will man nun mittelst dieses Verfahrens eine Wurzel einer vorgelegten Gleichung $\varphi(x) = 0$ berechnen, so muss man bereits einen angenäherten Werth a derselben kennen, so dass $\varphi(a)$ nahe an Null ist. Setzt man dann die Gleichung unter die Form $\varphi(x) - \varphi(a) = -\varphi(a)$ und in (35) des §. 21 $f(x) = \varphi(x) - \varphi(a)$, $k = -\varphi(a)$, so ist $f(a) = 0$, und $f'(a) = \varphi'(a)$, also $\left(\frac{x-a}{f(x)}\right)_a = \frac{1}{\varphi'(a)}$ nicht Null. Endlich wird man immer annehmen dürfen, es sey $\varphi'(x) (= f'(x))$ nicht Null von $x = a$ bis zur gesuchten Wurzel, da letztere nahe an a liegt und man immer a so finden kann, dass nicht $\varphi'(a) = 0$. Da nun allgemein $f^n(x) = \varphi^n(x)$, so wird man also hiernach die Grössen $A_1, A_2, \ldots$ mittelst (c) herstellen und dann gibt

$$x = a - A_1\varphi(a) + A_2\varphi(a)^2 - A_3\varphi(a)^3 + \ldots\ldots$$

die gesuchte Wurzel. Die Konvergenz dieser Reihe wird sich im Allgemeinen nur schwer ermitteln lassen; man wird daher getrost einige Glieder derselben berechnen und aus ihrem (etwaigen raschen) Abnehmen schliessen, dieselbe konvergire rasch, somit nur die etlichen ersten Glieder gelten lassen und schliesslich sehen, in wie weit das gefundene Resultat wirklich als Wurzel der Gleichung angesehen werden kann.

Einige Beispiele mögen das Verfahren erläutern:

I. Die Gleichung $x^3 - 60x^2 + 999x - 3734 = 0$ hat eine Wurzel nahe an 21. Für $x = 21$ ist $\varphi(x) = 46$, also schreibe man die Gleichung auch so:

$$x^3 - 60x^2 + 999x - 3780 = -46,$$

und hat $f(x) = x^3 - 60x^2 + 999x - 3780$, $k = -\varphi(a) = -46$, $a = 21$, $f'(a) = -198$, $f''(a) = 6$, $f^3(a) = 6$, $f^4(a) = 0$;

$$A_1 = -\frac{1}{198}, \; A_2 = -\frac{3}{198^3}, \; A_3 = -\frac{216}{198^5}, \; A_4 = \frac{3205}{198^7}, \; A^5 = -\frac{158738}{198^9}, \ldots .$$

also
$$x = 21 + \frac{46}{198} + \frac{3.46^2}{198^3} + \frac{216.46^3}{198^5} + \frac{3205.46^4}{198^7} + \frac{158738.46^5}{198^9} + \ldots ,$$
$$= 21 + 0{\cdot}232323 + 0{\cdot}000817 + 0{\cdot}000069 + 0{\cdot}000001 + 0{\cdot}000000$$
$$= 21{\cdot}233210,$$

welcher Werth auf fünf Dezimalstellen richtig ist. (Vergl. „Grundzüge" S. 179.)

II. Man soll die Gleichung $x = 2\sin x$ auflösen. Für $x = 1{\cdot}8849556 (= 108^0)$ ist

$$x - 2\sin x = -0{\cdot}0171574,$$

so dass man die Gleichung schreiben wird: $x - 2\sin x + 0{\cdot}0171574 = 0{\cdot}0171574$. Dann ist

$f(x) = x - 2\sin x + 0{\cdot}0171574$, $-\varphi(a) = 0{\cdot}0171574$, $a = 1{\cdot}8849556 (= 108^0)$, $f'(a) = 1{\cdot}618034$, $f''(a) = 1{\cdot}902113$, $f^3(a) = -0{\cdot}618034$, $f^4(a) = -1{\cdot}902113, \ldots .$

$$A_1 = \frac{1}{1{\cdot}618034}, \; A_2 = -\frac{0{\cdot}951056}{1{\cdot}618034^3}, \; A_3 = \frac{1{\cdot}975678}{1{\cdot}618034^5},$$

$$x = 1{\cdot}8849556 + \frac{0{\cdot}0171574}{1{\cdot}618034} - \frac{0{\cdot}951056.0{\cdot}0171574^2}{1{\cdot}618034^3} + \frac{1{\cdot}975678.0{\cdot}0171574^3}{1{\cdot}618034^5}$$
$$= 1{\cdot}8849556 + 0{\cdot}0106038 - 0{\cdot}0000661 + 0{\cdot}0000009 = 1{\cdot}8954942,$$

oder wenn man diese Grösse in Winkelmass ausdrückt: $x = 108^0 36' 18{\cdot}7''$ (vergl. mein „Handbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie" S. 100).

Fünfter Abschnitt.

Von den grössten und den kleinsten Werthen für Funktionen einer unabhängig Veränderlichen.

§. 24.

Sey $y = f(x)$ eine beliebige Funktion von x, und es erlange dieselbe für $x = a$ einen Werth $f(a)$ so beschaffen, dass derselbe grösser ist, als diejenigen Werthe von $f(x)$, die man erhält, wenn man x Werthe beilegt, die nur wenig grösser oder kleiner sind als a, so sagt man, y habe einen grössten (Maximum-) Werth erlangt; ist dagegen $f(a)$ kleiner als die unmittelbar vorhergehenden und nachfolgenden Werthe von $f(x)$, so hat y für $x = a$ einen kleinsten Werth (Minimum) erlangt. Stellen wir (Fig. 8) den Lauf von $f(x)$ durch eine Kurve dar und ist $0K$ die Abszissenaxe, 0 der Anfangspunkt, so sind Aa, Cc, Ee, Gg, Ji grösste Werthe der Ordinate, während Bb, Dd, Ff,

Fig. 8.

Hh, Kk kleinste Werthe sind. Es ist aus der Figur ersichtlich, dass ganz wohl ein Minimum grösser seyn kann als ein Maximum; so ist $Dd > Aa$, trotzdem ist erstere Grösse ein kleinster Werth, letztere ein grösster. Eben so ist klar, dass nicht zwei Maxima oder zwei Minima unmittelbar auf einander folgen können, sondern dass immer Maxima und Minima abwechseln, wenn überhaupt eine Funktion in ihrem Verlaufe mehrerer Maxima und Minima fähig ist. Das eigentlich Charakteristische des Maximums ist nämlich offenbar das, dass die Funktion y, wenn sie in die Nähe desselben gelangt, (mit wachsendem x) zuerst wächst und dann, wenn sie über den Maximum-Werth hinausgegangen ist, abnimmt, so dass also ein Wechsel von Zunehmen und Abnehmen im Augenblicke des Maximums stattfindet. Das Charakteristische des Minimums dagegen ist, dass im Augenblicke, da die Funktion durch dasselbe geht, ein Wechsel von Abnehmen zu Zunehmen stattfindet, immer die Grösse x wachsend gedacht. Daraus erklärt sich ganz von selbst, warum nicht zwei Maxima oder zwei Minima auf einander folgen können.

Nun haben wir in §. 13. I gesehen, dass wenn y wächst mit wachsendem x, nothwendig $\frac{\partial y}{\partial x}$ positiv ist; dass dagegen $\frac{\partial y}{\partial x}$ negativ ist, wenn y abnimmt mit wachsendem x. Daraus folgt, dass wenn y in die Nähe eines Maximum-Werthes gelangt, $\frac{\partial y}{\partial x}$ vorher positiv, nachher negativ ist; dass dagegen, wenn y in die Nähe eines Minimum-Werthes gelangt, $\frac{\partial y}{\partial x}$ vorher negativ, nachher positiv ist. Man kann also sagen, dass für $y =$ Maximum, $\frac{\partial y}{\partial x}$ von $+$ zu $-$ übergeht; für $y =$ Minimum, $\frac{\partial y}{\partial x}$ dagegen von $-$ zu $+$. Der Uebergang von $+$ zu $-$, oder von $-$ zu $+$ geschieht nun dadurch, dass $\frac{\partial y}{\partial x}$ durch 0 oder ∞ geht; * so dass also für das Maximum oder Minimum $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$ oder ∞ ist. Daraus ergibt sich nun folgende Regel:

„Um diejenigen Werthe von x zu finden, die y zu einem grössten oder kleinsten Werthe machen können, setze man $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$ oder $= \infty$, und bestimme die hieraus folgenden Werthe von x."

Um nun zu entscheiden, ob ein so gefundener Werth von x die Funktion y zu einem grössten oder kleinsten Werthe macht, beachte man, dass das Erstere stattfinden wird, wenn $\frac{\partial y}{\partial x}$ für diesen Werth von $+$ zu $-$ übergeht, d. h. vor diesem Werthe positiv, nach demselben negativ ist; dass dagegen das Letztere stattfindet, wenn $\frac{\partial y}{\partial x}$ von $-$ zu $+$ übergeht. Beachten wir zunächst diejenigen Werthe nicht, die $\frac{\partial y}{\partial x} = \infty$ geben, so wird man also übersichtlich sagen:

* Für $\frac{\partial y}{\partial x} = a - x$ geht bei $x = a$ diese Grösse von $+$ zu $-$ durch 0; für $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{x-a}$ dagegen für $x = a$ von $-$ zu $+$ durch ∞.

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \begin{matrix} \text{vorher,} & \text{Max.,} & \text{nachher;} \\ + & 0 & - \end{matrix} \quad ; \quad \begin{matrix} \text{vorher,} & \text{Min.,} & \text{nachher.} \\ - & 0 & + \end{matrix}.$$

Daraus ist klar, dass $\frac{\partial y}{\partial x}$ für ein Maximum im Abnehmen begriffen ist, für ein Minimum im Zunehmen; und umgekehrt, wenn $\frac{\partial y}{\partial x}$ im Abnehmen begriffen ist, hat man ein Maximum. Denn dann ist, da $\frac{\partial y}{\partial x}$ selbst $=0$, diese Grösse vorher positiv (>0), nachher negativ (<0), was eben aussagt, dass y vorher wächst und nachher abnimmt. Eben so hat man ein Minimum, wenn $\frac{\partial y}{\partial x}$ im Zunehmen begriffen ist. Nun ist aber (§. 13. I) $\frac{\partial y}{\partial x}$ zunehmend, wenn $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}>0$; abnehmend, wenn $\frac{\partial^2 y}{d x^2}<0$; so dass man obiger Regel nun zufügen wird (indem man beachtet, dass wenn für einen bestimmten Werth von x die Grösse $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ nicht Null ist, sie für unmittelbar nachfolgende oder vorhergehende Werthe von x ebenfalls nicht Null seyn wird):

„Diejenigen Werthe von x, welche $\frac{\partial y}{\partial x}=0$ machen, geben in y gesetzt ein Maximum, wenn sie $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ negativ machen; dagegen ein Minimum, wenn sie $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ positiv machen."

Sey a ein Werth, für den $\frac{\partial y}{\partial x}$, d. h. $f'(x)=0$ und seyen die Grössen

$$f'(x),\ f''(x),\ f'''(x), \ldots, f^{n-1}(x)$$

für $x=a$ sämmtlich 0, dagegen nicht $f^n(a)=0$. In diesem Falle würde obige Regel nicht ausreichen. Um sich jedoch hier zu helfen, bemerken wir zunächst, dass wenn $f^r(a)=0$, wo $r<n$, aber $f^r(x)$ vor $x=a$ und nach $x=a$ positiv ist, nothwendig $f^{r-2}(a)$ ein Minimum ist, d. h. da $f^{r-2}(a)=0$, dass vor und nach $x=a$ nothwendig $f^{r-2}(x)$ positiv ist. Denn da $f^r(x)$ immer positiv ist vor und nach $x=a$, wird $f^{r-1}(x)$ vor und nach $x=a$ wachsen (§. 13. I), also da $f^{r-1}(a)=0$, so wird $f^{r-1}(x)$ vor $x=a$ negativ, nach $x=a$ positiv seyn, woraus ganz unmittelbar folgt, dass $f^{r-2}(x)$ für $x=a$ ein Minimum ist, indem diese Grösse vor $x=a$ abnimmt, nachher wächst. Ist $f^r(a)$ nicht $=0$, sondern positiv (aber $f^{r-1}(a)=0$), so hat man offenbar dasselbe Resultat. — Wäre $f^r(a)=0$, aber $f^r(x$ vor und nach $x=a$ negativ, (oder wäre $f^r(a)$ geradezu negativ), so wäre $f^{r-2}(a)$ eben so ein Maximum, also da $f^{r-2}(a)=0$, so wäre $f^{r-2}(x)$ vor und nach $x=a$ negativ.

Sey nun $f^n(a)>0$, so ist $f^{n-2}(a)$ ein Minimum, also $f^{n-2}(x)$ vor und nach $x=a$ positiv; dessgleichen also auch $f^{n-4}(x)$ und dann $f^{n-6}(x), \ldots$. Ist nun n eine gerade Zahl, so wird also $f''(x)$ vor und nach $x=a$ positiv seyn, mithin $y=f(x)$ einen Minimum-Werth haben; ist dagegen n ungerade, so wird $f'(x)$ vor und nachher positiv seyn, sein Zeichen also nicht wechseln, mithin man weder grössten noch kleinsten Werth von y haben.

Sey zweitens $f^n(a) < 0$, so sind $f^{n-2}(x)$, $f^{n-4}(x)$, ... vor und nach $x = a$ negativ; ist also n eine gerade Zahl, so ist $f''(x)$ vor und nach $x = a$ negativ, also wird $f'(x)$ vor und nachher abnehmen, d. h. da $f'(a) = 0$, so wird $f'(x)$ vor $x = a$ positiv, nach $x = a$ negativ, mithin $f(a)$ ein Maximum seyn. Ist aber n eine ungerade Zahl, so ist $f'(x)$ vor und nach $x = a$ negativ, also $f(a)$ weder ein grösster noch ein kleinster Werth. Zu obigen Regeln wird man also noch hinzusetzen: „Sind von den Grössen $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$, ... eine Reihe von Anfang her für $x = a$ gleich 0 und ist die erste, welche nicht 0 ist, von gerader Ordnung (d. h. $f''(x)$, $f^4(x)$, . . .), so ist $f(a)$ ein Maximum, wenn dieselbe negativ, ein Minimum, wenn sie positiv ist. Ist dagegen jene erste, die nicht 0 ist, von ungerader Ordnung, so ist $f(a)$ weder ein grösster, noch ein kleinster Werth."

Wir haben im Vorstehenden vorausgesetzt, es sey y direkt als Funktion von x gegeben; wäre dies nicht der Fall, sondern man hätte die Gleichung $f(x, y) = 0$, so würde man eben $\frac{\partial y}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, ... nach §. 12 daraus bilden und in der angegebenen Weise verfahren.

Endlich kann es sich ereignen, dass man zum Voraus weiss, dass ein Maximum oder Minimum stattfinden werde, und man nur den betreffenden Werth sucht; alsdann genügt es, blos $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$ (oder ∞) zu setzen.

Wir haben bei den obigen Regeln blos die Wurzeln der Gleichung $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$ im Auge gehabt; beachtet man die ebenfalls zulässige Gleichung $\frac{\partial y}{\partial x} = \infty$ und ist $x = a$ eine Wurzel derselben, so wird man in $\frac{\partial y}{\partial x}$ ganz unmittelbar untersuchen, ob diese Grösse vor $x = a$ von anderem Zeichen ist als nach $x = a$, und wenn dies der Fall ist, so wird $x = a$ in y ein Maximum geben, wenn $\frac{\partial y}{\partial x}$ vor $x = a$ positiv, nach $x = a$ negativ ist, ein Minimum dagegen, wenn das Umgekehrte stattfindet.

§. 25.

Ehe wir zu Beispielen übergehen, wollen wir eine zweite Ableitung der in §. 24 gefundenen Regeln geben, da es sicher nicht ohne Interesse ist, denselben Gegenstand von mehreren Gesichtspunkten aus zu betrachten. Wir bedürfen dazu des folgenden analytischen Satzes: Sind $A_0, A_1, \ldots, A_n$ bestimmte endliche Grössen, so kann in dem Ausdrucke

$$A_0 h^r + A_1 h^{r+1} + \ldots + A_n h^{r+n}$$

die Grösse h immer klein genug angenommen werden, dass der ganze Ausdruck dasselbe Zeichen hat, wie sein erstes Glied. (Vergl. „Grundzüge" S. 133). Man braucht zu dem Ende blos zu zeigen, dass der Werth des ersten Gliedes (ohne Rücksicht auf das Zeichen) grösser seyn kann, als die Summe aller übrigen Glieder. Sey nämlich B eine positive Grösse, grösser

als der Werth irgend einer der Grössen $A_1, A_2, \ldots, A_n$, so ist $B(h^{r+1}+\ldots+h^{r+n})$ sicher grösser als $A_1 h^{r+1}+\ldots+A_n h^{r+n}$. Die erste Grösse ist aber $B\left(\frac{h^{n+r+1}-h^{r+1}}{h-1}\right)=Bh^{r+1}\left(\frac{h^n-1}{h-1}\right)$, und wenn also

$$A_0 h^r > Bh^{r+1}\left(\frac{h^n-1}{h-1}\right)$$

ist, so ist unser Zweck erreicht. Dazu genügt es, dass

$$A_0 > \frac{Bh(h^n-1)}{h-1}$$

sey, wobei wir A_0 als positiv voraussetzen, oder wenn dies nicht der Fall wäre, seinen positiven Werth nur in Rechnung bringen wollen. Eben so sehen wir h als positiv und kleiner als 1 an, denn für $h>1$ hätte der zu beweisende Satz jedenfalls nicht statt.

Es muss also, da $h-1$ und h^n-1 negativ sind

$$A_0 > \frac{Bh(1-h^n)}{1-h},\quad A_0(1-h) > Bh(1-h^n)$$

seyn. Macht man $A_0(1-h)>Bh$, so ist auch $A_0(1-h)>Bh(1-h^n)$, so dass also

$$A_0 - A_0 h > Bh,\quad A_0 > (B+A_0)h,\quad h < \frac{A_0}{A_0+B}$$

seyn soll, damit unser Satz wahr sey. Da man aber immer h dieser Bedingung entsprechen lassen kann, so ist also unsere Behauptung gerechtfertigt. Wir haben hiebei h als positiv vorausgesetzt; doch sieht man leicht, dass für ein negatives h ganz dieselben Resultate gelten, da, wenn für ein positives h der Werth des ersten Gliedes mehr ist als die Summe aller übrigen positiv genommenen Glieder, so ist für dasselbe negative h das Nämliche richtig, da das erste Glied höchstens sein Zeichen wechselt, sein Werth aber sonst derselbe bleibt.

Sey nun a ein Werth von x, für den f(x) ein Maximum ist, so muss $f(a+h)<f(a)$ seyn, es mag h positiv oder negativ, immer aber sehr klein, seyn, ist dagegen f(a) ein Minimum, so muss $f(a+h)>f(a)$ seyn für ähnliche h. * Man kann auch sagen, dass im Falle des Maximums $f(a+h)-f(a)<0$, im Falle des Minimums $f(a+h)-f(a)>0$ seyn muss für kleine (beliebig) positive oder negative Werthe von h. Nun ist aber (§. 15):

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{1.2}f''(a)+\ldots+\frac{h^n}{1..n}f^n(a)+\frac{h^{n+1}f^{n+1}(a+\Theta h)}{1.2\ldots n+1},$$

$$f(a+h)-f(a)=hf'(a)+\frac{h^2}{1.2}f''(a)+\ldots+\frac{h^n}{1..n}f^n(a)+\frac{h^{n+1}f^{n+1}(a+\Theta h)}{1\ldots n+1}.$$

unter der Voraussetzung immerhin, dass $f^{n+1}(x)$ endlich sey von $x=a$ bis $x=a+h$. Da nun aber, nach dem Obigen, das Vorzeichen der zweiten Seite (für kleine h) von dem ersten Gliede abhängt und dieses sicher sein Zeichen wechselt mit h, so könnte, in so ferne $hf'(a)$ als erstes Glied bleibt, $f(a+h)-f(a)$ nicht für positive und negative kleine h von demselben Zeichen seyn, d. h. f(a) könnte weder ein Maximum noch ein Minimum seyn.

* Und umgekehrt: für $f(a+h)-f(a)>0$ ist f(a) ein Minimum u. s. w.

Für ein solches muss also $hf'(a)$ nicht das erste Glied, d. h. es muss $f'(a) = 0$ seyn. Ist alsdann $f''(a)$ nicht 0, so ist $\frac{h^2}{1.2} f''(a)$ das erste Glied und behält für positive und negative h dasselbe Zeichen wie $f''(a)$; ist somit $f''(a) > 0$, so hat man $f(a+h) - f(a) > 0$, also $f(a) =$ Minimum; ist dagegen $f''(a) < 0$, so ist $f(a+h) - f(a) < 0$, also $f(a) =$ Maximum. Wäre auch $f''(a) = 0$, also $\frac{h^3}{1.2.3} f^3(a)$ das erste Glied, so würde die zweite Seite ihr Zeichen mit h wechseln, könnte also auch $f(a+h) - f(a)$ nicht für positive und negative h dasselbe Zeichen behalten, d. h. f(a) weder Maximum noch Minimum seyn, wenn nicht $f^3(a) = 0$. Im letzteren Falle hätte dann die zweite Seite dasselbe Zeichen wie $f^4(a)$, so dass für $f^4(a) > 0$ jetzt f(a) ein Minimum, für $f^4(a) < 0$ aber f(a) ein Maximum wäre. Wenn $f^4(a) = 0$, so müsste auch $f^5(a) = 0$ u. s. w. Man übersieht leicht, dass man ganz dieselben Regeln erhält, die in §. 24 aufgestellt wurden.

Wir haben, wie bereits gesagt, hier zunächst nur den einfachsten Fall dieser Art von Aufgaben im Auge, und behalten uns vor, den allgemeineren später zur Erörterung zu bringen. Für den Augenblick wollen wir an einer Reihe von Beispielen zeigen, in welcher Weise die vorstehenden Regeln anzuwenden sind.

§. 26.

I. Man soll x so bestimmen, dass $y = x^m (a-x)^n$ ein Maximum oder Minimum werde. Dabei setzen wir m und n positiv und ganz, a eben so positiv voraus.

Hier ist

$$\frac{\partial y}{\partial x} = x^{m-1}(a-x)^{n-1}[m(a-x) - nx], \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = x^{m-2}(a-x)^{n-2}[m(m-1)(a-x)^2 - 2mnx(a-x) + n(n-1)x^2].$$

Soll nun $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$ seyn, so ist dies möglich, wenn $m(a-x) - nx = 0$, $x = \frac{am}{m+n}$, was auch m und n seyen; oder wenn $x = 0$ für $m > 1$, oder $a = x$ für $n > 1$. Für $x = \frac{am}{m+n}$ ist $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\frac{mna^{m+n-2}}{(m+n)^{m+n-3}}$, d. h. negativ, so dass $x = \frac{am}{m+n}$ immer ein Maximum gibt. Was die anderen zwei Werthe anbelangt, so ist es bequemer $\frac{\partial y}{\partial x}$ geradezu zu untersuchen. Sey also $x = 0 + h = h$, $m > 1$, so ist dann $\frac{\partial y}{\partial x} = h^{m-1}(a-h)^{n-1}[ma - (m+n)h]$ und da h sehr klein, a positiv, so wird diese Grösse immer positiv seyn, was auch h ist, wenn $m-1$ gerade, also m ungerade; dagegen wird sie positiv mit positivem h, negativ mit negativem h seyn, wenn $m-1$ ungerade, also m gerade ist. Daraus folgt, dass für $x = 0$ die Grösse $x^m(a-x)^n$ ein Minimum ist, wenn m gerade; aber weder Minimum noch Maximum, wenn m ungerade ist.

Ist zweitens $x = a + h$, so ist $\frac{\partial y}{\partial x} = (a+h)^{m-1} (-h)^{n-1} [-mh - n(a+h)]$ und da bei kleinem h sicher $-mh - n(a+h)$ negativ, so wird $\frac{\partial y}{\partial x}$ immer negativ

seyn, wenn $n-1$ gerade; dagegen positiv bei positivem h und umgekehrt, wenn $n-1$ ungerade ist. Also gibt $x=a$ ein Minimum, wenn n gerade, und weder Minimum noch Maximum, wenn n ungerade ist.

Für $y=x(a-x)$ hat man also blos Maximum, wenn $x=\frac{1}{2}a$.

Für $y=x(a-x)^2$ hat man Maximum, wenn $x=\frac{a}{3}$, Minimum, wenn $x=a$.

Für $y=x^2(a-x)^2$ „ „ „ „ $x=\frac{a}{2}$, „ „ $x=a$, Minimum, wenn $x=0$, u. s. w.

Die erste dieser Grössen entspricht der Aufgabe, aus der gegebenen Summe a zweier an einander stossender Seiten eines Rechtecks das möglich grösste Rechteck zu bilden. Ist nämlich x die eine Seite, $a-x$ also die andere, so ist die Fläche $=x(a-x)$ und wird ein Maximum, wenn $x=\frac{a}{2}$, wo dann auch $a-x=\frac{a}{2}$, so dass das fragliche Rechteck ein Quadrat ist.

Eben so findet man, dass $e^x+e^{-x}+2\cos x$ ein Maximum für $x=0$ (wobei man bis zum vierten Differentialquotienten gehen muss). x^2+ax+b ein Minimum für $x=-\frac{a}{2}$; $\frac{l(x)}{x}$ ein Maximum für $x=e$; $x^a e^{-x}$ ein Maximum ist für $x=a$ $(a>0)$.

II. Man soll die Werthe von x bestimmen, für welche y ein Maximum oder Minimum wird, wenn immer

$$y^2-3xy-2x+x^2=0.$$

Man hat hieraus

$$2y\frac{\partial y}{\partial x}-3y-3x\frac{\partial y}{\partial x}-2+2x=0,$$

und da für das Maximum oder Minimum $\frac{\partial y}{\partial x}=0$, so ist also

$$-3y-2+2x=0,$$

aus welcher Gleichung, in Verbindung mit der gegebenen, x und y bestimmt werden. Man hat zuerst

$$y=\frac{2}{3}(x-1), \text{ also } \frac{4}{9}(x-1)^2-2x(x-1)-2x+x^2=0,\ x=\frac{2}{5}, \text{ oder } -2.$$

$$y=-\frac{2}{5}, \text{ oder } -2.$$

Da hat man $$2\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+2y\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}-3\frac{\partial y}{\partial x}-3\frac{\partial y}{\partial x}-3x\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+2=0$$

und $\frac{\partial y}{\partial x}=0$, so ist $$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{-2}{2y-3x} \text{ (für obige Werthe von x und y).}$$

Für $x=\frac{2}{5}$, $y=-\frac{2}{5}$ ist dies $=1$, also y ein Minimum; für $x=-2$, $y=2$: -1, also y ein Maximum.

III. Aus zwei gegebenen Seiten a und b eines Dreiecks das grösstmögliche Dreieck zu bilden. Sey x der Winkel, unter dem die Seiten sich schneiden, so ist $y=\frac{1}{2}ab\sin x$ die Fläche des Dreiecks. Dann ist $\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{1}{2}ab\cos x$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=-\frac{1}{2}ab\sin x$, also damit $\frac{\partial y}{\partial x}=0$ sey, muss $x=90^0$, d. h. das Dreieck ein rechtwinkliches mit den Katheten a und b seyn. Für $x=90^0$ ist $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=-\frac{1}{2}ab$, also negativ, mithin das Dreieck ein grösstes.

IV. Unter allen Rechtecken von gegebenem Inhalte a das zu suchen, das den kleinsten Umfang hat.

Seyen x und z zwei aneinander stossende Seiten, so ist zunächst $xz = a$, also $z = \frac{a}{x}$; ferner ist der Umfang $= 2x + 2z = 2x + \frac{2a}{x} = y$ und mithin $\frac{\partial y}{\partial x} = 2 - \frac{2a}{x^2}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{4a}{x^3}$. Da $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ sonach immer positiv, so ist der Umfang wirklich ein kleinster. Ferner ist $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$, wenn $2 = \frac{2a}{x^2}$, $x = \sqrt{a}$, woraus auch $z = \frac{a}{x} = \sqrt{a}$, so dass das gesuchte Rechteck ein Quadrat ist.

Fig. 9.

V. AE (Fig. 9) stehe senkrecht auf AC; $BC = a$ sey gegeben, eben so $AB = b$; man soll den Punkt D finden, in welchem die Linien BD und CD mit einander den grössten Winkel machen.

Dass hier nur von einem Maximum die Rede seyn kann, ist klar; ein Minimum fände sich, wenn D in A wäre, da da dann $CDB = 0$ geworden. Wir brauchen also blos den eigentlichen Werth des Maximums aufzusuchen. Sey nun $AD = x$, so ist

$$\operatorname{tg} CDA = \frac{a+b}{x}, \quad \operatorname{tg} BDA = \frac{b}{x},$$

also

$$\operatorname{tg} CDB = \frac{\frac{a+b}{x} - \frac{b}{x}}{1 + \frac{b(a+b)}{x^2}}, \text{ indem } CDB = CDA - BDA.$$

Da sicher CDB ein spitzer Winkel, so ist seine Tangente auch ein Maximum, wenn der Winkel ein Maximum ist, so dass $y = \frac{\frac{a+b}{x} - \frac{b}{x}}{1 + \frac{b(a+b)}{x^2}} = \frac{ax}{x^2 + b(a+b)}$ ein Maximum werden muss. Daraus

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{a.[x^2 + b(a+b)] - 2ax^2}{[x^2 + b(a+b)]^2} = 0, \quad x^2 + b(a+b) - 2x^2 = 0, \quad x = \sqrt{b(a+b)}.$$

Dann ist

$$\operatorname{tg} CDB = \frac{a\sqrt{b(a+b)}}{2b(a+b)} = \frac{a}{2\sqrt{b(a+b)}}.$$

Was die beiden Winkel bei B und C anbelangt (in dem Dreiecke CDB), so ist

$$\operatorname{tg}(180^0 - B) = \frac{x}{b} = \sqrt{\frac{a+b}{b}}, \quad \operatorname{tg} C = \frac{x}{a+b} = \sqrt{\frac{b}{a+b}}, \quad \left(\operatorname{tg} B = -\frac{x}{b}\right),$$

also

$$\operatorname{tg}(B - C) = \frac{-\sqrt{\frac{a+b}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a+b}}}{1 - \sqrt{\frac{a+b}{b}} \cdot \sqrt{\frac{b}{a+b}}} = \infty, \quad B - C = 90^0.$$

(Man vergl. damit mein „Handbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie" S. 113.)

Man erhält dieselbe Auflösung, wenn man sich die Aufgabe stellt, den Punkt D an dem senkrechten Thurme AE zu finden, in welchem BC unter dem grössten Gesichtswinkel erscheint.

VI. Die Punkte A und B (Fig. 10), so wie die Gerade MN sind gegeben; man soll in letzterer C so bestimmen, dass die Summe der Geraden $AC + BC$ die kleinst-

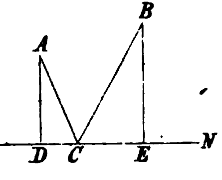


Fig. 10.

mögliche sey. — Dass es sich hier nur um ein Minimum handeln kann, ist aus geometrischen Gründen klar, eben so, dass der Punkt C zwischen D und E, die Fusspunkte der von A und B auf MN gezogenen Senkrechten, fallen muss. Sey also $AD = a$, $BE = b$, $DE = c$, $DC = x$, also $CE = c - x$, so ist

$$AC = \sqrt{a^2 + x^2},\ BE = \sqrt{(c-x)^2 + b^2},\ y = \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{(c-x)^2 + b^2}.$$

Daraus $$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} - \frac{c-x}{\sqrt{(c-x)^2+b^2}} = 0,\ \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{c-x}{\sqrt{(c-x)^2+b^2}},$$

und wenn man quadrirt:

$$\frac{x^2}{a^2+x^2} = \frac{(c-x)^2}{(c-x)^2+b^2},\ x^2(c-x)^2 + b^2x^2 = a^2(c-x)^2 + x^2(c-x)^2,\ b^2x^2 = a^2(c-x)^2,$$

$$bx = a(c-x),\ x = \frac{ac}{a+b}.$$

(Man darf hier nicht $bx = -a(c-x)$ setzen, da $b, x, a, c-x$ sämmtlich positiv sind.) Daraus $c - x = \frac{bc}{a+b}$, d.h.

$$x : c-x = a : b,\ DC : CE = AD : BE,$$

so dass die Dreiecke ADC und BEC ähnlich, also die Winkel ACD und BCE gleich sind. (Ein von A ausgehender, an MN zurückgeworfener und nach B gelangender Lichtstrahl legt also den möglich kleinsten Weg zurück.)

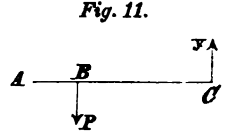


Fig. 11.

VII. An einem Hebel (Fig. 11), dessen Stützpunkt in A ist, wirkt in B die bekannte Kraft P, wobei $AB = a$; das Gewicht der gleich dicken Hebelstange ist $= b$ für die Einheit der Länge. Wie lang muss der Hebel seyn, damit an seinem Ende die möglich kleinste Kraft y der P das Gleichgewicht halte?

Sey $AC = x$ die Hebellänge, sein Gewicht also bx, so hat man für das Gleichgewicht:

$$yx = aP + bx \cdot \frac{x}{2},\ y = \frac{aP}{x} + \frac{bx}{2},\ \frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{aP}{x^2} + \frac{b}{2},\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{2aP}{x^3},$$

so dass also $$-\frac{aP}{x^2} + \frac{b}{2} = 0,\ x = \sqrt{\frac{2aP}{b}}$$

seyn muss. Da $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} > 0$, so hat man für y wirklich ein Minimum $= \dfrac{aP + \frac{b}{2} \cdot \frac{2aP}{b}}{\sqrt{\frac{2aP}{b}}}$ $= \sqrt{2abP}$.

VIII. In eine Kugel vom Halbmesser r soll man denjenigen senkrechten Kegel einschreiben, dessen gesammte Oberfläche ein Maximum sey.

Sey x die Entfernung des Kugelmittelpunktes von dem Mittelpunkt der Grundfläche des Kegels, so ist der Halbmesser der letzteren $= \sqrt{r^2 - x^2}$, seine Höhe $= r + x$, also seine Seite $= \sqrt{r^2 - x^2 + (r+x)^2} = \sqrt{2r(r+x)}$, mithin die Oberfläche $y = \pi(r^2 - x^2) + \pi\sqrt{r^2-x^2}\sqrt{2r(r+x)} = \pi[r^2 - x^2 + \sqrt{(r+x)(r-x)}\sqrt{2r(r+x)}]$ $= \pi[r^2 - x^2 + (r+x)\sqrt{2r(r-x)}]$, $\frac{\partial y}{\partial x} = \pi\left[-2x + \sqrt{2r(r-x)} - \frac{(r+x)\sqrt{2r}}{2\sqrt{r-x}}\right] = 0$,

d. h. $$-4x\sqrt{r-x} + 2\sqrt{2r(r-x)^2} - (r+x)\sqrt{2r} = 0,\ 4x\sqrt{r-x} = 2(r-x)\sqrt{2r}$$

$-(r+x)\sqrt{2r}=(r-3x)\sqrt{2r}$, $16x^2(r-x)=(r-3x)^2.2r$, $8rx^2-8x^3=r^3-6r^2x+9rx^2$, $x^3+\frac{r}{8}x^2-\frac{6r^2}{8}x+\frac{r^3}{8}=0$.

Da für $x=-r$ die erste Seite $=0$, so lässt sie sich durch $x+r$ dividiren; wirklich ist die Gleichung auch

$$(x+r)\left(x^2-\frac{7}{8}rx+\frac{1}{8}r^2\right)=0,$$

und da $x^2-\frac{7}{8}rx+\frac{1}{8}r^2=0$ die Wurzeln $x=\frac{7}{16}r\pm\frac{r}{16}\sqrt{17}$ hat, so sind $-r$, $\frac{7+\sqrt{17}}{16}r$, $\frac{7-\sqrt{17}}{16}r$ die drei Wurzeln obiger kubischen Gleichung. Wie man jedoch sieht, ist $\frac{\partial y}{\partial x}$ nicht 0 für $x=-r$, und nicht für $x=\frac{7+\sqrt{17}}{16}r$,* wohl aber für $x=\frac{7-\sqrt{17}}{16}r$. Also ist der Halbmesser des Kegels $=\sqrt{r^2-\left(\frac{7-\sqrt{17}}{16}\right)r^2}$ $=\frac{r}{16}\sqrt{190+14\sqrt{17}}$, die Höhe $=\frac{23-\sqrt{17}}{16}r$.

Fig. 12.

IX. Stellen AG, BF (Fig. 12) zwei parallele Wände vor, deren Entfernung $AB=a$ ist, und in deren einer sich eine Oeffnung BC von der Höhe h befindet, so soll man entscheiden, ob ein Balken DE, dessen Länge $=l$, zu der Oeffnung BC hineingebracht werden könne (wenn $l>a$).

Man wird natürlich den Balken zuerst an der Wand AG aufrichten, ihn also die Lage DE annehmen lassen; wird nun, indem E vorwärts, D abwärts gleitet, die Erhöhung BR des Balkens unter der Oeffnung nie h übersteigen, so kann man ihn zur Thüre hineinbringen, so dass also der grösste Werth dieser Erhöhung $(BR=y)$ kleiner als h, oder höchsten $=h$ seyn muss. Sey nun $BE=x$, so ist $ER:ED=x:a+x$, d. h. $ER=\frac{lx}{a+x}$; $y=\sqrt{ER^2-x^2}$ $=\frac{x}{a+x}\sqrt{l^2-(a+x)^2}$, also $\frac{\partial y}{\partial x}=\sqrt{l^2-(a+x)^2}\,\frac{a}{(a+x)^2}-\frac{x}{\sqrt{l^2-(a+x)^2}}$, und da dies $=0$ zu setzen ist, so hat man:

$$a[l^2-(a+x)^2]=x(a+x)^2,\quad al^2=(a+x)^3,\quad x=-a+\sqrt[3]{al^2}$$

---

* Für $x=-r$ ist $\frac{\partial y}{\partial x}=\pi[2r+\sqrt{2r.2r}]=4r\pi$; für $x=\frac{7+\sqrt{17}}{16}r:\frac{\partial y}{\partial x}$ $=\pi\left[-\frac{7+\sqrt{17}}{8}r+\frac{r}{4}\sqrt{2(9-\sqrt{17})}-\frac{(23+\sqrt{17})r\sqrt{2}}{8\sqrt{9-\sqrt{17}}}\right]=\frac{\pi r\sqrt{2}}{7\sqrt{9-\sqrt{17}}}$ $\left[-\frac{(7+\sqrt{17})\sqrt{9-\sqrt{17}}}{\sqrt{2}}+2(9-\sqrt{17})-(23+\sqrt{17})\right]=\frac{\pi r\sqrt{2}}{8\sqrt{9-\sqrt{17}}}$ $\left[-\frac{(7+\sqrt{17})\sqrt{9-\sqrt{17}}}{\sqrt{2}}-(5+3\sqrt{17})\right]$, welche Grösse negativ ist; für $x=\frac{7-\sqrt{17}}{16}r$: $\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{\pi r\sqrt{2}}{8\sqrt{9+\sqrt{17}}}\left[-\frac{(7-\sqrt{17})\sqrt{9+\sqrt{17}}}{\sqrt{2}}+2(9+\sqrt{17})-(23-\sqrt{17})\right]=\frac{\pi r\sqrt{2}}{8\sqrt{9+\sqrt{17}}}$ $\left[-5+3\sqrt{17}-\sqrt{\frac{(7-\sqrt{17})^2(9+\sqrt{17})}{2}}\right]=\frac{\pi r\sqrt{2}}{8\sqrt{9+17}}[-5+3\sqrt{17}-(-5+3\sqrt{17})]$ $=0$.

also $$y = -\frac{a - \sqrt[3]{a l^2}}{\sqrt[3]{a l^2}} \sqrt{l^2 - \sqrt[3]{a^2 l^4}} = \left(1 - \sqrt[3]{\frac{a^2}{l^2}}\right) \sqrt{l^2 - \sqrt[3]{a^2 l^4}}$$

$$= \left(1 - \sqrt[3]{\frac{a^2}{l^2}}\right) l \sqrt{1 - \sqrt[3]{\frac{a^2}{l^2}}} = l \left(1 - \sqrt[3]{\frac{a^2}{l^2}}\right)^{\frac{3}{2}},$$

so dass immer

$$l \left(1 - \sqrt[3]{\frac{a^2}{l^2}}\right)^{\frac{3}{2}} \leqq h, \text{ d. h. } l^{\frac{2}{3}} \left(1 - \frac{a^{\frac{2}{3}}}{l^{\frac{2}{3}}}\right) \leqq h^{\frac{2}{3}},\ l^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}} \leqq h^{\frac{2}{3}}$$

seyn muss.

X. Man soll ein offenes zylindrisches Gefäss von bekanntem Inhalte a konstruiren, so dass der Boden und die Wände die Dicke b haben, dabei aber möglichst wenig Material zur Konstruktion verwendet wird.

Sey x der innere Halbmesser des Bodens, z die innere Höhe, so ist der Inhalt $= x^2 \pi z$ und da derselbe $= a$ seyn soll, so ist $z = \frac{a}{\pi x^2}$. Ferner ist der körperliche Inhalt des Bodens $= (x+b)^2 \pi b$, der Wände $= [(x+b)^2 \pi - x^2 \pi] z$, also der ganze körperliche Inhalt des Gefässmaterials =

$$b\pi(b+x)^2 + \pi z[2bx + b^2] = b\pi(b+x)^2 + \frac{a}{x^2}(2bx + b^2) = y,$$

also $$\frac{\partial y}{\partial x} = 2b\pi(b+x) - \frac{2a}{x^3}(2bx + b^2) + \frac{2ba}{x^2} = 0$$

$$b^2\pi + b\pi x - \frac{ab}{x^2} - \frac{ab^2}{x^3} = 0,\ \pi(b+x) - \frac{a}{x^3}(b+x) = 0,$$

und da nicht $b + x = 0$, so ist $\pi = \frac{a}{x^3}$, $x = \sqrt[3]{\frac{a}{\pi}}$, dann $z = \frac{a}{\pi}\sqrt[3]{\frac{\pi^2}{a^2}} = \sqrt[3]{\frac{a}{\pi}}$, d. h. es ist der innere Halbmesser gleich der Höhe zu machen. (Die Wanddicke ist somit ganz gleichgiltig.) Hier ist $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 2b\pi + \frac{4ab}{x^3} + \frac{6ab^2}{x^4}$, also > 0, und man hat somit ein Minimum.

XI. Man soll einen Zylinder vom Inhalte a konstruiren, so dass seine Oberfläche die möglich kleinste sey.

Sey wieder x der Halbmesser, z die Höhe, so ist $x^2 \pi z = a$, $z = \frac{a}{\pi x^2}$. Die Oberfläche ist $= 2x^2\pi + 2\pi x z = 2\pi x^2 + \frac{2a}{x} = y$, also muss $\frac{\partial y}{\partial x}$ d. h.

$$4\pi x - \frac{2a}{x^2} = 0,\ 2\pi x^3 = a,\ x = \sqrt[3]{\frac{a}{2\pi}}$$

seyn; dann ist $z = \frac{a}{\pi}\sqrt[3]{\frac{4\pi^2}{a^2}} = \sqrt[3]{\frac{4a}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{8a}{2\pi}} = 2\sqrt[3]{\frac{a}{2\pi}} = 2x$, so dass die Höhe dem Durchmesser gleich seyn muss. (Anwendung bei Münzen, deren Oberfläche wegen der Abnützung möglichst klein seyn muss.)

XII. Für einen Ort der Erde, dessen geographische Breite $= \varphi$ ist, soll man denjenigen Stern (von der Deklination x) angeben, der in der kürzesten Zeit von einem gegebenen, mit dem Horizonte parallelen Kreise zu einem andern ebenfalls gegebenen solchen Kreise gelangt.

Sey (Fig. 13) Z das Zenith des Ortes, P der Pol, AB und CD die zwei mit dem

Fig. 13.

Horizontale parallelen Kreise, deren Zenithdistanzen $=\alpha$ und α_1 seyen; endlich S und S' die Lagen des fraglichen Sternes, wenn er durch die beiden Kreise geht, so dass $PS = PS' = x$. Der Winkel SPS' misst die Zeit und es soll derselbe also ein Minimum seyn. Ferner ist $PZ = 90^0 - \varphi$, $ZS' = \alpha'$, $ZS = \alpha$, also in den sphärischen Dreiecken ZSP, ZS'P:

$$\cos\alpha = \sin\varphi\cos x + \cos\varphi\sin x\cos ZPS, \quad \cos\alpha' = \sin\varphi\cos x + \cos\varphi\sin x\cos ZPS',$$

woraus, wenn man nach x differenzirt und beachtet, dass α, α', φ konstant, aber ZPS, ZPS' veränderlich sind, folgt:

$$0 = -\sin\varphi\sin x + \cos\varphi\cos x\cos ZPS - \cos\varphi\sin x\sin ZPS \cdot \frac{\partial(ZPS)}{\partial x},$$

$$0 = -\sin\varphi\sin x + \cos\varphi\cos x\cos ZPS' - \cos\varphi\sin x\sin ZPS' \cdot \frac{\partial(ZPS')}{\partial x}.$$

Ferner ist $SPS' = ZPS - ZPS'$ und da, indem $SPS' =$ Minimum seyn soll, $\frac{\partial(SPS')}{\partial x} = 0$, so ist $\frac{\partial(ZPS)}{\partial x} = \frac{\partial(ZPS')}{\partial x}$. Beachtet man dies, so wie dass nach obigen Formeln: $\frac{\partial(ZPS)}{\partial x} = -\frac{tg\varphi}{\sin ZPS} + \cotg x \cotg ZPS$, $\frac{\partial(ZPS')}{\partial x} = -\frac{tg\varphi}{\sin ZPS'} + \cotg x\cotg ZPS'$, so hat man zur Bestimmung von x, ZPS, ZPS' die Gleichungen:

$$\frac{-tg\varphi}{\sin ZPS} + \cotg x\cotg ZPS = -\frac{tg\varphi}{\sin ZPS'} + \cotg x\cotg ZPS',$$

$$\cos\alpha = \sin\varphi\cos x + \cos\varphi\sin x\cos ZPS, \quad \cos\alpha' = \sin\varphi\cos x + \cos\varphi\sin x\cos ZPS'.$$

Nun ist auch (vergl. mein „Handbuch der Trigonometrie" S. 224), wenn S, S' die Winkel an S und S':

$$\cotg S = \frac{tg\varphi\sin x}{\sin ZPS} - \cos x\cotg ZPS, \quad \frac{-tg\varphi}{\sin ZPS} + \cotg x\cotg ZPS = -\frac{\cotg S}{\sin x},$$

eben so
$$\frac{-tg\varphi}{\sin ZPS'} + \cotg x\cotg ZPS' = -\frac{\cotg S'}{\sin x}, \text{ also}$$

$$\cotg S = \cotg S', \quad S = S'.$$

Benützt man, was bequemer ist, diese Gleichung, so ist auch $\cos S = \cos S'$, d. h.

$$\frac{\sin\varphi - \cos\alpha\cos x}{\sin\alpha\sin x} = \frac{\sin\varphi - \cos\alpha'\cos x}{\sin\alpha'\sin x}, \quad \sin\varphi(\sin\alpha' - \sin\alpha) = (\cos\alpha\sin\alpha' - \cos\alpha'\sin\alpha)\cos x,$$

$$\cos x = \frac{\sin\varphi(\sin\alpha' - \sin a)}{\cos\alpha\sin\alpha' - \cos\alpha'\sin a} = \frac{2\sin\varphi \cdot \cos\frac{1}{2}(\alpha' + \alpha)\sin\frac{1}{2}(\alpha' - \alpha)}{\sin(\alpha' - \alpha)} = \sin\varphi\,\frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha + \alpha')}{\cos\frac{1}{2}(\alpha - \alpha')},$$

woraus x bestimmt ist. Will man ZPS und ZPS' haben, so ergeben sie sich aus den betreffenden sphärischen Dreiecken.

XIII. Man soll eine Zahl a in n Theile theilen, so dass das Produkt der Theile das möglich grösste sey.

Sind $x_1, x_2, \ldots, x_n$ die einzelnen Theile, so muss $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = \frac{a}{n}$ seyn. Denn gesetzt es seyen x_r und x_s ungleich, und es sey das Produkt $x_1 \ldots x_r \ldots x_s \ldots x_n$ ein Maximum, wobei $x_1 + \ldots + x_n = a$, so würde, wenn $x'_r = x'_s = \frac{1}{2}(x_r + x_s)$ das Produkt $x'_r\, x'_s > x_r\, x_s$ (Nr. I), indem das Produkt zweier Faktoren von konstanter Summe dann am grössten ist, wenn sie einander gleich sind; also wäre

$$x_1 \ldots x'_r \ldots x'_s \ldots x_n > x_1 \ldots x_r \ldots x_s \ldots x_n,$$

und auch $x_1 + \ldots x'_r + \ldots x'_s + \ldots + x_n = a$, so dass nicht $x_1, \ldots, x_n$ die Faktoren wären, die das Maximum geben können. Was von x_r, x_s gilt, lässt sich von allen einzelnen Faktoren sagen, so dass sie also alle einander gleich seyn müssen.

Anm. Ist y eine stetige Funktion von x, so wird sie sich bei kleinen Aenderungen dieser letzteren Grösse um so bedeutender ändern, je grösser $\frac{\partial y}{\partial x}$ für den betreffenden Werth von x ist (§. 13. I). Da nun, wenn y für x = a einen Maximum- oder Minimum-Werth erlangt, $\frac{\partial y}{\partial x}$ Null ist, so wird in der Nähe dieses Werthes y sich sehr langsam ändern. Diese eigenthümliche Erscheinung in dem Gange stetiger Funktionen zeigt sich den Sinnen in dem horizontalen Verlauf der Kurven in der Nähe des Maximums oder Minimums der Ordinaten; ferner erklären sich dadurch eine Menge Erscheinungen. So ändert sich bekanntlich die Deklination der Sonne (und damit auch die Tageslänge) sehr langsam in der Nähe der Solstitialpunkte, d. h. wenn die Sonne ihre grösste Entfernung vom Aequator erreicht; zur Mittagszeit nähert sich die Sonne nur langsam dem Horizonte u. s. w. Derselbe Grundsatz wird angewandt, wenn man den Regenbogen aus den Gesetzen der Reflexion und Refraktion des Lichtes erklären will, indem die parallel in den Regentropfen eintretenden farbigen Strahlen nur dann (nahezu) parallel wieder austreten, wenn für eine Aenderung des Einfallswinkels die Aenderung der Richtung der austretenden Strahlen sehr langsam geschieht. Man bestimmt desshalb für einen Einfallswinkel x den Winkel y, den der nach ein- oder zwei- oder dreimaliger u. s. w. innerer Reflexion und zweimaliger Refraktion austretende Strahl mit dem eintretenden macht, und sucht sodann denjenigen Werth von x, für den $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$ ist; u. s. w.

Sechster Abschnitt.

Reihenbildung und Reihensummirung mittelst der Differential-Rechnung.

§. 27.

Wir haben im Laufe der vorangegangenen Untersuchungen mehrfach von der Differentiation unendlicher Reihen zu sprechen Gelegenheit gehabt (man vergl. §. 16) und wollen diesem Gegenstande nunmehr eine ausführlichere Betrachtung widmen.

Gesetzt es seyen $u_1, u_2, \ldots u_n$ Funktionen von x, und es sey

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n = U,$$

so ist sicher (§. 4. IV):

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial x} + \ldots + \frac{\partial u_n}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial x},$$

und allgemein

$$\frac{\partial^r u_1}{\partial x^r} + \frac{\partial^r u_2}{\partial x^r} + \ldots + \frac{\partial^r u_n}{\partial x^r} = \frac{\partial^r U}{\partial x^r}.$$

Ist aber die Anzahl der Grössen $u_1, \ldots$ eine unendlich grosse, d. h. ist die Reihe $u_1 + u_2 + \ldots$ unendlich, so lässt sich dasselbe nicht so geradezu behaupten. Gesetzt nämlich, die unendliche Reihe

$$u_1 + u_2 + \ldots\ldots + u_n + \ldots\ldots$$

konvergire von x = a bis x = b, so wird man berechtigt seyn, innerhalb dieser Gränzen von x ihre Summe gleich einer Funktion U von x zu setzen, also zu schreiben:

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots=U.$$

Setzt man hier $x+\Delta x$ an die Stelle von x, so wird man Δx immer klein genug annehmen können, dass $x+\Delta x$ die Gränzen a und b $(b>a)$ nicht überschreitet, wenn nicht etwa $x=b$ ist, so dass also sicher auch

$$u_1+\Delta u_1+u_2+\Delta u_2+\ldots+u_n+\Delta u_n+\ldots=U+\Delta U.$$

Hieraus folgt, nach einem bekannten Satze von der Konvergenz („Grundzüge“ S. 27. X), dass

$$\Delta u_1+\Delta u_2+\ldots+\Delta u_n+\ldots=\Delta U,$$

$$\frac{\Delta u_1}{\Delta x}+\frac{\Delta u_2}{\Delta x}+\ldots+\frac{\Delta u_n}{\Delta x}+\ldots=\frac{\Delta U}{\Delta x}.$$

Diese Gleichung ist richtig, Δx mag noch so klein seyn; lässt man also Δx immer kleiner werden, und es nähert sich dabei die erste Seite einer bestimmten Gränze, d. h, ist die unendliche Reihe

$$\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial u_2}{\partial x}+\ldots+\frac{\partial u_n}{\partial x}+\ldots\ldots$$

noch konvergent, so kann diese Gränze keine andere seyn als $\frac{\partial U}{\partial x}$ und man kann also sagen, dass aus

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots=U$$

folge

$$\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial u_2}{\partial x}+\ldots+\frac{\partial u_n}{\partial x}+\ldots=\frac{\partial U}{\partial x},$$

allgemein

$$\frac{\partial^r u_1}{\partial x^r}+\frac{\partial^r u_2}{\partial x^r}+\ldots+\frac{\partial^r u_n}{\partial x^r}+\ldots=\frac{\partial^r U}{\partial x^r},$$

in so ferne alle hier vorkommenden unendlichen Reihen konvergent sind. Dabei werden die Gränzen der Konvergenz der letzteren Reihen in der Regel enger seyn als die der ersteren, wie sich schon gezeigt hat, da wir bereits $x=b$ für die zweite Reihe, wenn nicht geradezu auszuschliessen, doch zu beanstanden gezwungen waren.

Ist aber die unendliche Reihe

$$\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial u_2}{\partial x}+\ldots\ldots$$

konvergent, ihre Summe also endlich, so ist die unendliche Reihe

$$u_1+u_2+\ldots\ldots$$

eine stetige Funktion von x (§. 1), mithin (analog §. 16) ihre Summe U innerhalb der Gränzen der Stetigkeit immer dieselbe Funktion von x.

Einige Beispiele mögen das Gesagte erläutern.

I. Es ist
$$1+x+x^2+\ldots\ldots+x^n=\frac{x^{n+1}-1}{x-1}.$$

Setzt man hier $n+1$ für n und differenzirt, so ergibt sich:

$$1+2x+3x^2+\ldots+(n+1)x^n=\frac{(n+1)x^{n+2}-(n+2)x^{n+1}+1}{(x-1)^2}.$$

Verfährt man mit dieser Gleichung in derselben Weise, so ergibt sich:

$$1.2+2.3x+3.4x^2+\ldots.+(n+1)(n+2)x^n$$
$$=\frac{(n+2)(n+1)x^{n+3}-2(n+3)(n+1)x^{n+2}+(n+2)(n+3)x^{n+1}-2}{(x-1)^3}, \text{ u. s. w.}$$

II. Da nach §. 17

$$e^{xi}=\cos x+i\sin x,\ e^{z+xi}=e^z e^{xi}=e^z(\cos x+i\sin x),$$

so ist etwa $e^{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=e^{r\cos\varphi+ir\sin\varphi}=e^{r\cos\varphi}[\cos(r\sin\varphi)+i\sin(r\sin\varphi)]$;

ferner $(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=(e^{\varphi i})^n=e^{n\varphi i}=\cos n\varphi+i\sin n\varphi$.

Setzt man also in der Reihe des §. 17 für e^x : $x=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, so ist, unter Beachtung dieser Formeln;

$$e^{r\cos\varphi}\cos(r\sin\varphi)+ie^{r\cos\varphi}\sin(r\sin\varphi)=1+\frac{r\cos\varphi+ir\sin\varphi}{1}+\frac{r^2\cos2\varphi+ir^2\sin2\varphi}{1.2}+\ldots.$$
$$=1+\frac{r\cos\varphi}{1}+\frac{r^2\cos2\varphi}{1.2}+\ldots..+i\left[\frac{r\sin\varphi}{1}+\frac{r^2\sin2\varphi}{1.2}+\ldots.\right].$$

Da nun aus $A+Bi=A'+B'i$ folgt $A=A'$, $B=B'$, indem ja $A-A'=(B'-B)i$, also wenn man quadrirt: $(A-A')^2=-(B'-B)^2$, $(A-A')^2+(B'-B)^2=0$, und eine Summe zweier Quadrate nur Null ist, wenn jedes Null ist, so hat man

$$1+\frac{x\cos\varphi}{1}+\frac{x^2\cos2\varphi}{1.2}+\ldots...=e^{x\cos\varphi}\cos(x\sin\varphi),$$
$$\frac{x\sin\varphi}{1}+\frac{x^2\sin2\varphi}{1.2}+\ldots...=e^{x\cos\varphi}\sin(x\sin\varphi),$$

was auch x und φ seyn mögen. (Man vergl. „Grundzüge“ S. 34.) Hieraus folgt:

$$\cos n\varphi+\frac{x\cos(n+1)\varphi}{1}+\frac{x^2\cos(n+2)\varphi}{1.2}+\ldots.=\frac{\partial^n\left(e^{x\cos\varphi}\cos(x\sin\varphi)\right)}{\partial x^n},$$
$$\sin n\varphi+\frac{x\sin(n+1)\varphi}{1}+\frac{x^2\sin(n+2)\varphi}{1.2}+\ldots.=\frac{\partial^n\left(e^{x\cos\varphi}\sin(x\sin\varphi)\right)}{\partial x^n}.$$

Speziell für $n=1$:

$$\cos\varphi+\frac{x\cos2\varphi}{1}+\frac{x^2\cos3\varphi}{1.2}+\ldots=e^{x\cos\varphi}[\cos\varphi\cos(x\sin\varphi)-\sin\varphi\sin(x\sin\varphi)]=$$
$$e^{x\cos\varphi}\cos[x\sin\varphi+\varphi],\quad \sin\varphi+\frac{x\sin2\varphi}{1}+\frac{x^2\sin3\varphi}{1.2}+\ldots=e^{x\cos\varphi}\sin[x\sin\varphi+\varphi].$$

III. Aus der Analysis ist bekannt („Grundzüge“ S. 64), dass

$$\sin x=x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{3^2\pi^2}\right)\ldots\ldots,$$

wenn die Faktorenzahl ins Unendliche geführt wird. Hieraus folgt:

$$l\sin x=l(x)+l\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)+l\left(1-\frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)+l\left(1-\frac{x^2}{3^2\pi^2}\right)+\ldots..$$

und also, wenn man differenzirt:

$$\operatorname{cotg}x=\frac{1}{x}-\frac{2x}{\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\pi^2}-\frac{2x}{\left(1-\frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)2^2\pi^2}-\ldots...$$
$$=\frac{1}{x}-2x\left[\frac{1}{\pi^2-x^2}+\frac{1}{2^2\pi^2-x^2}+\frac{1}{3^2\pi^2-x^2}+\ldots..\right].$$

Ist nun $x^2<\pi^2$, so ist (§. 17. I):

$$\frac{1}{r^2\pi^2-x^2}=(r^2\pi^2-x^2)^{-1}=\frac{1}{r^2\pi^2}+\frac{x^2}{r^4\pi^4}+\frac{x^4}{r^6\pi^6}+\ldots....$$

Daraus folgt (für $x^2<\pi^2$):

$$\operatorname{cotg} x = \frac{1}{x} - 2x\Big[\frac{1}{\pi^2} + \frac{x^2}{\pi^4} + \frac{x^4}{\pi^6} + \frac{x^6}{\pi^8} + \dots\dots$$
$$+ \frac{1}{2^2\pi^2} + \frac{x^2}{2^4\pi^4} + \frac{x^4}{2^6\pi^6} + \frac{x^6}{2^8\pi^8} + \dots\dots$$
$$+ \frac{1}{3^2\pi^2} + \frac{x^2}{3^4\pi^4} + \frac{x^4}{3^6\pi^6} + \frac{x^6}{3^8\pi^8} + \dots\dots$$
$$\vdots \qquad \Big].$$

Setzt man nun

$$\frac{1}{1^{2n}} + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \dots = \frac{2^{2n-1} B_{2n-1} \pi^{2n}}{1.2\dots 2n}, \qquad \text{(a)}$$

so folgt hieraus (für $x^2 < \pi^2$):

$$\operatorname{cotg} x = \frac{1}{x} - \frac{2^2 B_1 x}{1.2} - \frac{2^4 B_3 x^3}{1.2..4} - \frac{2^6 B_5 x^5}{1\dots 6} - \dots\dots \qquad \text{(b)}$$

Die Zahlen $B_1, B_3, B_5, \dots$ heissen die **Bernoullischen Zahlen.** Da („Grundzüge" S. 25, VII) die Reihe (a) konvergirt für $2n > 1$, so sind diese Zahlen endlich und bestimmt.

Um für die Bernoullischen Zahlen eine Bestimmung zu erhalten, beachten wir, dass aus (b) folgt:

$$\cos x = \frac{\sin x}{x}\left[1 - \frac{2^2 B_1 x^2}{1.2} - \frac{2^4 B_3 x^4}{1..4} - \dots\dots\right],$$

d. h. (§. 17):

$$1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1..4} - \dots = \left(1 - \frac{x^2}{1..3} + \frac{x^4}{1\dots 5} - \dots\right)\left(1 - \frac{2^2 B_1 x^2}{1.2} - \frac{2^4 B_3 x^4}{1\dots 4} - \dots\right).$$

Multiplizirt man auf der zweiten Seite und setzt dann beiderseitig die Koeffizienten gleich hoher Potenzen einander gleich, so erhält man:

$$\frac{2^2 B_1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} = \frac{1}{1.2},$$
$$\frac{2^4 B_3}{1..4} - \frac{2^2 B_1}{1.2}\cdot\frac{1}{1.2.3} - \frac{1}{1..5} = -\frac{1}{1..4},$$
$$\vdots$$
$$\frac{2^{2n} B_{2n-1}}{1\dots 2n} - \frac{2^{2n-2} B_{2n-3}}{1\dots . 2n-2}\cdot\frac{1}{1.2.3} + \frac{2^{2n-4} B_{2n-5}}{1\dots . 2n-4}\cdot\frac{1}{1\dots 5} - \dots \pm \frac{2^2 B_1}{1.2}\cdot\frac{1}{1..2n-1} \pm \frac{1}{1..2n+1}$$

$= \pm\frac{1}{1\dots 2n}$, oder da $\pm\frac{1}{1\dots 2n+1} \mp \frac{1}{1\dots 2n} = \mp\frac{2n}{1\dots 2n+1}$, wenn man die zweiten Glieder auf die erste Seite bringt und dann durch 2 dividirt:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{2B_1}{1.2} - \frac{1}{1.2.3} = 0,\\
&\frac{2^3 B_3}{1..4} - \frac{2B_1}{1.2}\cdot\frac{1}{1.2.3} + \frac{2}{1..5} = 0,\\
&\vdots\\
&\frac{2^{2n-1} B_{2n-1}}{1\dots 2n} - \frac{2^{2n-3} B_{2n-3}}{1\dots 2n-2}\cdot\frac{1}{1.2.3} + \frac{2^{2n-5} B_{2n-5}}{1\dots 2n-4}\cdot\frac{1}{1\dots 5} - \dots \pm \frac{2B_1}{1.2}\cdot\frac{1}{1..2n-1}\\
&\mp \frac{n}{1..2n+1} = 0.
\end{aligned}\right\}\text{(c)}$$

Hieraus folgt: $B_1 = \frac{1}{6}, B_3 = \frac{1}{30}, B_5 = \frac{1}{42}, B_7 = \frac{1}{30}, B_9 = \frac{5}{66}, B_{11} = \frac{691}{2730}, B_{13} = \frac{7}{6},$

$B_{15}=\frac{3617}{510}$, $B_{17}=\frac{43867}{798}$, $B_{19}=\frac{174611}{330}$, $B_{21}=\frac{854513}{138}$, $B_{23}=\frac{236364091}{2730}$, $B_{25}=\frac{8553103}{6}$,
$B_{27}=\frac{23749461029}{870}$, ...

Aus (a) folgt, dass da gewiss

$$\frac{\frac{1}{1^{2n+2}}+\frac{1}{2^{2n+2}}+\frac{1}{3^{2n+2}}+\ldots\ldots}{\frac{1}{1^{2n}}+\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}+\ldots\ldots\ldots\ldots}$$

mit unendlich wachsendem n sich mehr und mehr der Einheit nähert, man habe

$$\text{Gr.}\left(\frac{2^{2n+1}B_{2n+1}\pi^{2n+2}}{1\ldots 2n+2}\cdot\frac{1.2\ldots 2n}{2^{2n-1}B_{2n-1}\pi^{2n}}\right)=1,$$

d. h.

$$\text{Gr.}\ \frac{B_{2n+1}}{B_{2n-1}}\cdot\frac{4\pi^2}{(2n+1)(2n+2)}=1, \qquad \text{(d)}$$

so dass also bald $\frac{B_{2n+1}}{B_{2n-1}}>1$ seyn muss, d. h. dass später die Bernoullischen Zahlen fortwährend wachsen. Es lässt sich nunmehr auch die Konvergenz der Reihe (b) bestimmen. Der Quotient zweier auf einander folgender Glieder ist:

$$\frac{4B_{2n+1}x^2}{(2n+1)(2n+2)B_{2n-1}},$$

also da dies mit unendlichem n zu $\frac{x^2}{\pi^2}$, wegen (d), wird, so muss $\frac{x^2}{\pi^2}<1$ seyn, was wir bereits oben gesehen.

Da $\qquad \operatorname{tg} x=\operatorname{cotg} x-2\operatorname{cotg} 2x$, so ergibt sich

$$\operatorname{tg} x=\frac{2^2(2^2-1)}{1.2}B_1x+\frac{2^4(2^4-1)}{1\ldots 4}B_3x^3+\frac{2^6(2^6-1)}{1\ldots 6}B_5x^5+\ldots\ldots, \qquad \text{(e)}$$

wobei aber jetzt $\left(\frac{2x}{\pi}\right)^2<1$ seyn muss, weil man die Reihe für cotg 2x angewendet.

Für die Bernoullischen Zahlen lassen sich leicht noch andere Rekursionsformeln angeben, von denen wir jedoch nur noch eine ableiten wollen. (Vergl. §. 113.)

Aus der Gleichung

$$\cos x\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\operatorname{cotg}\frac{x}{2}\right)=\frac{\cos x}{x}-\frac{1}{2}\operatorname{cotg}\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\sin x$$

erhält man, wenn man die unendlichen Reihen einsetzt und dann die Koeffizienten gleich hoher Potenzen von x einander gleich setzt:

$$\frac{B_{2n+1}}{1\ldots 2n+2}-\frac{B_{2n-1}}{1..2n}\cdot\frac{1}{1.2}+\frac{B_{2n-3}}{1\ldots 2n-2}\frac{1}{1..4}-\ldots\pm\frac{B_1}{1.2}\frac{1}{1..2n}=\mp\frac{1}{1..2n+2}+\frac{B_{2n+1}}{1..2n+2}$$
$$\pm\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1\ldots 2n+1}=\frac{B_{2n+1}}{1\ldots 2n+2}\pm\frac{n}{1\ldots 2n+2},$$

also

$$-\frac{B_{2n-1}}{1..2n}\cdot\frac{1}{1.2}+\frac{B_{2n-3}}{1\ldots 2n-2}\cdot\frac{1}{1..4}-\ldots\pm\frac{B_1}{1.2}\cdot\frac{1}{1..2n}=\pm\frac{n}{1\ldots 2n+2},$$

und wenn man mit 2.1.2...2n+1 multiplizirt:

$$\frac{B_1}{1}\cdot\frac{2n+1}{1}-\frac{B_3}{2}\cdot\frac{(2n+1)2n(2n-1)}{1.2.3}+\frac{B_5}{3}\frac{(2n+1)..(2n-3)}{1\ldots 5}-..\pm\frac{B_{2n-1}}{n}\cdot\frac{(2n+1)\ldots 3}{1.2\ldots 2n-1}$$
$$=\frac{n}{n+1}. \qquad \text{(f)}$$

Hieraus folgt:

$$\frac{B_1}{1}\cdot\frac{3}{1}=\frac{1}{2},$$

$$\frac{B_1}{1}\cdot\frac{5}{1}-\frac{B_3}{2}\cdot\frac{5.4.3}{1.2.3}=\frac{2}{3},$$

$$\frac{B_1}{1}\cdot\frac{7}{1}-\frac{B_3}{2}\cdot\frac{7.6.5}{1.2.3}+\frac{B_5}{3}\cdot\frac{7.6..3}{1...5}=\frac{3}{4},$$

$$\vdots$$

Siebenter Abschnitt.

Differentialquotienten für Funktionen mehrerer unabhängig Veränderlichen. Vertauschung dieser letzteren. Analytische Anwendungen.

§. 28.

So wie wir seither immer vorausgesetzt haben, es sey nur eine einzige unabhängig Veränderliche vorhanden, können wir auch annehmen, eine Grösse u hänge von mehreren Grössen x, y, z, ... ab, welche letztere gegenseitig vollkommen unabhängig von einander sind. Man kann also eine jede beliebige dieser letzteren sich ändern lassen, ohne dass desshalb die andern sich ändern müssen. Eine Grösse, die nun von mehreren andern abhängt, also eine Funktion derselben ist, wird ähnlich der Bezeichnung in §. 7 durch f(x, y, z, ...) zu bezeichnen seyn, wo x, y, z, ... diejenigen Grössen sind, von denen jene abhängt. In diesem Falle werden nun, eben da jede der unabhängig Veränderlichen sich ändern kann, ohne dass desshalb auch die übrigen eine Aenderung erleiden, wahre partielle Differentialquotienten (§. 7) auftreten, so dass also wenn $u=f(x,y,z,\ldots)$ man die Grössen

$$\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z},\ldots,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z},\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z},\frac{\partial^2 u}{\partial z^2},\ldots\ldots$$

bilden kann. Die Bildung derselben geschieht genau nach den früheren Regeln, ist also keinem Anstande unterworfen. Von den partiellen Differentialquotienten höherer Ordnung gilt natürlich das bereits in §. 12 nachgewiesene Gesetz, dass die Ordnung der Differentiation eine ganz willkürliche ist.

Besteht zwischen drei Veränderlichen x, y, z eine einzige Gleichung

$$f(x,y,z)=0, \qquad (a)$$

so ist vermöge derselben eine der drei eine Funktion der zwei übrigen, indem zwei Veränderliche ihren Werthen nach müssen gegeben seyn, ehe man den Werth der dritten vermöge der Gleichung (a) zu ermitteln im Stande ist. Sey also z als Funktion von x und y angesehen, so kann man x sich ändern lassen, ohne dass y sich ändert, und y, ohne dass x eine Aenderung erleidet. Mit anderen Worten, man wird die Gleichung (a) nach x differenziren dürfen, wobei y konstant ist, und nach y, wobei x konstant ist. Daraus folgt (vergl. §. 8):

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}=0,$$

woraus $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, d. h. die partiellen Differentialquotienten von z nach x und y, folgen. Differenzirt man diese Gleichungen wieder nach x und y, so erhält man (§. 12):

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+2\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,$$

woraus dann $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ folgen, u. s. w.

Bestehen allgemein zwischen den n Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ die m Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l}\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)=0,\\ \varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)=0,\\ \quad\vdots\\ \varphi_m(x_1, x_2, \ldots, x_n)=0,\end{array}\right\}\ (b)$$

wo $m<n$, so sind in Folge dieser Gleichungen m der Veränderlichen abhängig von den $n-m$ übrigen, welche letzteren aber vollständig unabhängig von einander sind. Sind so z. B. $x_1, x_2, \ldots, x_m$ abhängig von $x_{m+1}, \ldots, x_n$, so darf man die Gleichungen (b) nach jeder dieser letzeren Veränderlichen differenziren, wenn man dabei beachtet, dass $x_1, \ldots x_n$ Funktionen derselben sind. Man erhält dann $m(n-m)$ Differentialgleichungen der ersten Ordnung zur Bestimmung der Differentialquotienten $\frac{\partial x_1}{\partial x_{m+1}}, \ldots, \frac{\partial x_1}{\partial x_n}; \ldots; \frac{\partial x_m}{\partial x_{m+1}}, \ldots, \frac{\partial x_m}{\partial x_n}$, die in derselben Zahl sind. Diese Gleichungen haben die Form:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial x_r}+\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial x_r}+\ldots+\frac{\partial\varphi}{\partial x_m}\frac{\partial x_m}{\partial x_r}+\frac{\partial\varphi}{\partial x_r}=0,$$

wenn man hier für r setzt: $m+1, m+2, \ldots$, und für φ dann $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$.

Wie man eben so zu höheren Ordnungen aufsteigen kann, ist klar. Als Beispiel wollen wir die Gleichung

$$x^2+y^2+z^2=r^2$$

betrachten. Man zieht aus ihr (r^2 konstant):

$$x+z\frac{\partial z}{\partial x}=0,\ y+z\frac{\partial z}{\partial y}=0,\ 1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+z\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0,\ \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x}+z\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0,\ 1+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$$
$$+z\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0,\ 3\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+z\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}=0,\ 2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+z\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}=0,\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\frac{\partial z}{\partial x}+2\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$$
$$+z\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}=0,\ 3\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+z\frac{\partial^3 z}{\partial y^3}=0,\ \text{u. s. w.}$$

Wenn auch zu den früheren Untersuchungen gehörig, mag doch, des späteren Gebrauchs wegen, hier noch die Entwicklung von

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n} f(a+\alpha x, b+\beta x, c+\gamma x, \ldots .)$$

gegeben werden, wo a, b, c, ..., α, β, γ, ... Konstanten sind und x die unabhängig Veränderliche. Ist $a+\alpha x=y$, $b+\beta x=z$, $c+\gamma x=u$, ..., so ist (§. 12):

$$\frac{\partial}{\partial x} f(a+\alpha x, b+\beta x, c+\gamma x, \ldots)=\frac{\partial f}{\partial y}\alpha+\frac{\partial f}{\partial z}\beta+\frac{\partial f}{\partial u}\gamma+\ldots,$$

da $\frac{\partial y}{\partial x}=\alpha$, $\frac{\partial z}{\partial x}=\beta$, $\frac{\partial u}{\partial x}=\gamma$ u. s. w. Hieraus folgt:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(a+\alpha x, b+\beta x, \ldots ..)=\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\alpha^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}\alpha\beta+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\beta^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial u}\alpha\gamma+2\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial u}\beta\gamma$$
$$+\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\gamma^2+\ldots .$$

Man kann diess auch in folgender Form schreiben:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(a+\alpha x, b+\beta x \ldots)=\left(\frac{\partial}{\partial y}\alpha+\frac{\partial}{\partial z}\beta+\frac{\partial}{\partial u}\gamma+\ldots\right)^2 f,$$

welche Bezeichnung wohl von selbst verständlich seyn wird. Allgemein ist

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n} f(a+\alpha x, b+\beta x, c+\gamma x, \ldots)=\left(\frac{\partial}{\partial y}\alpha+\frac{\partial}{\partial z}\beta+\frac{\partial}{\partial u}\gamma+\ldots\right)^n f.$$

Gesetzt nämlich, dieser Satz gelte für $n=r$, so gilt er auch für $n=r+1$. Denn ist

$$\frac{\partial^r}{\partial x^r} f(a+\alpha x, b+\beta x \ldots ..)=\left(\frac{\partial}{\partial y}\alpha+\frac{\partial}{\partial z}\beta+\ldots\right)^r f,$$

so ist

$$\frac{\partial^{r+1}}{\partial x^{r+1}} f(a+\alpha x, b+\beta x \ldots ..)=\frac{\partial}{\partial x}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial y}\alpha+\frac{\partial}{\partial z}\beta+\ldots\right)^r f\right\}$$
$$=\alpha\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial y}\alpha+\frac{\partial}{\partial z}\beta+\ldots\right)^r f+\beta\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial y}\alpha+\frac{\partial}{\partial z}\beta+\ldots\right)^r f+\ldots$$
$$=\left(\alpha\frac{\partial}{\partial y}+\beta\frac{\partial}{\partial z}+\ldots\right)\left(\frac{\partial}{\partial y}\alpha+\frac{\partial}{\partial z}\beta+\ldots\right)^r f$$
$$=\left(\frac{\partial}{\partial y}\alpha+\frac{\partial}{\partial z}\beta+\ldots\right)^{r+1} f,$$

wodurch nun unsere Behauptung bewiesen ist, da für $r=2$ der Satz gilt (§. 10).

§. 29.

In §. 14 haben wir gesehen, in welcher Weise die Differentialquotienten auszudrücken sind, falls man für die seitherige unabhängig Veränderliche eine andere wählt. Für den Fall mehrerer unabhängig Veränderlichen lässt sich dies eben so leicht nachweisen.

I. Sey zunächst z eine Funktion zweier unabhängig Veränderlichen x und y, und man führe für diese zwei andere u und v ein, die mit x und y zusammenhängen durch die Gleichungen

$$\varphi(x, y, u, v)=0, \quad \psi(x, y, u, v)=0, \qquad (a)$$

so folgt aus (a), dass x und y Funktionen sind von u und v, während letztere Grössen von einander unabhängig sind. Demnach hat man (§. 7):

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u},\quad \frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}. \qquad \text{(b)}$$

Die Werthe von $\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}$ folgen (nach §. 28) aus den Gleichungen (a); setzt man sie in (b) ein, so kann man hieraus die Werthe von $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$, ausgedrückt durch $\frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v}$ finden. Differenzirt man die Gleichungen (b) wieder nach u und v, und beachtet dabei, dass $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ im Allgemeinen von x und y abhängen, welche Grössen Funktionen von u und v sind, so erhält man (§. 12):

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial u^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right)+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial u\partial v},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial v^2},$$

woraus, nachdem $\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}, \frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}, \frac{\partial^2 x}{\partial v^2}, \frac{\partial^2 y}{\partial u^2}, \frac{\partial^2 y}{\partial u\partial v}, \frac{\partial^2 y}{\partial v^2}$ noch aus (a) gezogen sind, die Werthe von $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ in $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}, \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$ ausgedrückt, folgen. Wie man hier zu höheren Ordnungen aufsteigen kann, ist klar.

II. Es kann sich ereignen, dass wenn z eine Funktion der zwei unabhängig Veränderlichen x, y ist, man für die drei Veränderlichen x, y, z drei andere r, φ, ψ einführen will, wobei dann φ, ψ als neue unabhängige, r als abhängige Veränderliche angesehen werden muss. Gewöhnlich kennt man dann x, y, z als Funktionen von r, φ, ψ; im allgemeinsten Falle hätte man zwischen r, φ, ψ, x, y, z drei Gleichungen:

$$f_1(r,\varphi,\psi,x,y,z)=0,\quad f_2(r,\varphi,\psi,x,y,z)=0,\quad f_3(r,\varphi,\psi,x,y,z)=0, \qquad \text{(c)}$$

vermöge welcher $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \ldots$ durch Differentialquotienten von r nach φ und ψ auszudrücken sind. Differenzirt man jede der drei Gleichungen (c) nach φ und ψ, wobei beachtet wird, dass r eine Funktion von φ und ψ, dessgleichen x und y, und dass $\frac{\partial z}{\partial \varphi}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \varphi}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \varphi}, \frac{\partial z}{\partial \psi}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \psi}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \psi}$, so erhält man sechs Gleichungen, von denen die zwei ersten sind:

$$\frac{\partial f_1}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial \varphi}+\frac{\partial f_1}{\partial \varphi}+\frac{\partial f_1}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \varphi}+\frac{\partial f_1}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \varphi}+\frac{\partial f_1}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \varphi}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)=0,$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial \psi}+\frac{\partial f_1}{\partial \psi}+\frac{\partial f_1}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \psi}+\frac{\partial f_1}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \psi}+\frac{\partial f_1}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \psi}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \psi}\right)=0,$$

und die vier anderen hieraus erhalten werden, wenn man f_2, f_3 für f_1 setzt. Durch diese sechs Gleichungen drückt man $\frac{\partial x}{\partial \varphi}, \frac{\partial y}{\partial \varphi}, \frac{\partial x}{\partial \psi}, \frac{\partial y}{\partial \psi}, \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \psi}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \psi}$, $\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \varphi}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \varphi}$ durch die übrigen Grössen aus, und kann dann aus den beiden letzten Werthen $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ finden. In dem gewöhnlicheren Falle, da

$$x=f_1(r,\varphi,\psi),\quad y=f_2(r,\varphi,\psi),\quad z=f_3(r,\varphi,\psi),$$

bestimmt man zunächst nach Nr. I $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ durch $\frac{\partial z}{\partial \varphi}, \frac{\partial z}{\partial \psi}$ und bildet dann diese letzteren direkt aus der dritten Gleichung.

Man sieht hieraus leicht, wie man sich zu benehmen habe, wenn Funktionen von mehr als zwei Veränderlichen gegeben sind. Wir wollen daher an einigen Beispielen das Verfahren erläutern.

1) In den Gleichungen

$$x\frac{\partial z}{\partial y}-y\frac{\partial z}{\partial x}=0,\ x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=0,\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0 \qquad (e)$$

sollen x und y durch die neuen unabhängig Veränderlichen r und ω ersetzt werden, wobei

$$x=r\cos\omega,\quad y=r\sin\omega.$$

Hieraus folgt:

$$\frac{\partial x}{\partial r}=\cos\omega,\ \frac{\partial x}{\partial\omega}=-r\sin\omega,\ \frac{\partial y}{\partial r}=\sin\omega,\ \frac{\partial y}{\partial\omega}=r\cos\omega,\ \frac{\partial^2 x}{\partial r^2}=0,\ \frac{\partial^2 x}{\partial r\partial\omega}=-\sin\omega,\ \frac{\partial^2 x}{\partial\omega^2}$$

$$=-r\cos\omega,\ \frac{\partial^2 y}{\partial r^2}=0,\ \frac{\partial^2 y}{\partial r\partial\omega}=\cos\omega,\ \frac{\partial^2 y}{\partial\omega^2}=-r\sin\omega,\ \text{u. s. w.},$$

mithin $\frac{\partial z}{\partial r}=\frac{\partial z}{\partial x}\cos\omega+\frac{\partial z}{\partial y}\sin\omega,\ \frac{\partial z}{\partial\omega}=-\frac{\partial z}{\partial x}r\sin\omega+\frac{\partial z}{\partial y}r\cos\omega,$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cos^2\omega+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\cos\omega\sin\omega+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\sin^2\omega,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial r\partial\omega}=-\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}r\sin\omega\cos\omega+r\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}(\cos^2\omega-\sin^2\omega)+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}r\sin\omega\cos\omega-\frac{\partial z}{\partial x}\sin\omega$$

$$+\frac{\partial z}{\partial y}\cos\omega,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial\omega^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}r^2\sin^2\omega-2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}r^2\sin\omega\cos\omega+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}r^2\cos^2\omega-\frac{\partial z}{\partial x}r\cos\omega-\frac{\partial z}{\partial y}r\sin\omega.$$

Demnach:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial r}\cos\omega-\frac{\partial z}{\partial\omega}\frac{\sin\omega}{r},\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial r}\sin\omega+\frac{\partial z}{\partial\omega}\frac{\cos\omega}{r};$$

$$r^2\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial\omega^2}=r^2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)-r\left(\frac{\partial z}{\partial x}\cos\omega+\frac{\partial z}{\partial y}\sin\omega\right)=r^2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)-r\frac{\partial z}{\partial r}.$$

Also ist

$$x\frac{\partial z}{\partial y}-y\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial\omega},\ x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=r\frac{\partial z}{\partial r},\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial\omega^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r},$$

d. h. die drei Gleichungen (e) sind:

$$\frac{\partial z}{\partial\omega}=0,\ r\frac{\partial z}{\partial r}=0,\ \frac{\partial^2 z}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 z}{\partial\omega^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial z}{\partial r}=0. \qquad (e')$$

2) Man soll die Grösse $\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$ umformen, indem für die unabhängig Veränderlichen x, y die neuen φ,ψ eintreten und als abhängig Veränderliche r erscheint, wobei

$$x=r\cos\varphi\cos\psi,\quad y=r\cos\varphi\sin\psi,\quad z=r\sin\varphi.$$

Hier ist $\frac{\partial x}{\partial\varphi}=\frac{\partial r}{\partial\varphi}\cos\varphi\cos\psi-r\sin\varphi\cos\psi,\ \frac{\partial x}{\partial\psi}=\frac{\partial r}{\partial\psi}\cos\varphi\cos\psi-r\cos\varphi\sin\psi,$

$$\frac{\partial y}{\partial\varphi}=\frac{\partial r}{\partial\varphi}\cos\varphi\sin\psi-r\sin\varphi\sin\psi,\ \frac{\partial y}{\partial\psi}=\frac{\partial r}{\partial\psi}\cos\varphi\sin\psi+r\cos\varphi\cos\psi,$$

$$\frac{\partial z}{\partial\psi}=\frac{\partial r}{\partial\psi}\sin\varphi,\ \frac{\partial z}{\partial\varphi}=\frac{\partial r}{\partial\varphi}\sin\varphi+r\cos\varphi.$$

Demnach wegen $\frac{\partial z}{\partial\varphi}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\varphi}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\varphi},\ \frac{\partial z}{\partial\psi}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\psi}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\psi}$:

$$\frac{\partial r}{\partial\varphi}\sin\varphi+r\cos\varphi=\frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial r}{\partial\varphi}\cos\varphi-r\sin\varphi\right)\cos\psi+\frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial r}{\partial\varphi}\cos\varphi-r\sin\varphi\right)\sin\psi,$$

$$\frac{\partial r}{\partial \psi}\sin\varphi = \frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial r}{\partial \psi}\cos\psi - r\sin\psi\right)\cos\varphi + \frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial r}{\partial \psi}\sin\psi + r\cos\psi\right)\cos\varphi.$$

Hieraus:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\frac{\partial r}{\partial \psi}\sin\psi + \left(\frac{\partial r}{\partial \varphi}\sin\varphi + r\cos\varphi\right)\cos\varphi\cos\psi}{\cos\varphi\left(\frac{\partial r}{\partial \varphi}\cos\varphi - r\sin\varphi\right)},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-\frac{\partial r}{\partial \psi}\cos\psi + \left(\frac{\partial r}{\partial \varphi}\sin\varphi + r\cos\varphi\right)\cos\varphi\sin\psi}{\cos\varphi\left(\frac{\partial r}{\partial \varphi}\cos\varphi - r\sin\varphi\right)},$$

woraus folgt:

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{\cos^2\varphi\left(\frac{\partial r}{\partial \varphi}\cos\varphi - r\sin\varphi\right)^2 + \left[\frac{\partial r}{\partial \psi}\sin\varphi + \left(\frac{\partial r}{\partial \varphi}\sin\varphi + r\cos\varphi\right)\cos\varphi\cos\psi\right]^2 + \left[-\frac{\partial r}{\partial \psi}\cos\psi + \left(\frac{\partial r}{\partial \varphi}\sin\varphi + r\cos\varphi\right)\cos\varphi\sin\psi\right]^2}}{\cos\varphi\left(\frac{\partial r}{\partial \varphi}\cos\varphi - r\sin\varphi\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial r}{\partial \psi}\right)^2 + \left[\left(\frac{\partial r}{\partial \varphi}\right)^2 + r^2\right]\cos^2\varphi}}{\cos\varphi\left(\frac{\partial r}{\partial \varphi}\cos\varphi - r\sin\varphi\right)}.$$

3) Sey u eine Funktion der drei Veränderlichen x, y, z und man soll in der Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \qquad (f)$$

die drei unabhängig Veränderlichen x, y, z durch drei neue r, φ, ψ ersetzen, wenn

$$x = r\cos\varphi\cos\psi,\quad y = r\cos\varphi\sin\psi,\quad z = r\sin\varphi.$$

Man hat hier $\frac{\partial x}{\partial r} = \cos\varphi\cos\psi$, $\frac{\partial x}{\partial \varphi} = -r\sin\varphi\cos\psi$, $\frac{\partial^2 x}{\partial r^2} = 0$, $\frac{\partial^2 x}{\partial r\partial\varphi} = -\sin\varphi\cos\psi$, $\frac{\partial^2 x}{\partial r\partial\psi} = -\cos\varphi\sin\psi$ u. s. w. Ferner

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\varphi\cos\psi + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\varphi\sin\psi + \frac{\partial u}{\partial z}\sin\varphi,$$

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \varphi} = -\frac{\partial u}{\partial x}r\sin\varphi\cos\psi - \frac{\partial u}{\partial y}r\sin\varphi\sin\psi + \frac{\partial u}{\partial z}r\cos\varphi,$$

$$\frac{\partial u}{\partial \psi} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \psi} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \psi} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \psi} = -\frac{\partial u}{\partial x}r\cos\varphi\sin\psi + \frac{\partial u}{\partial y}r\cos\varphi\cos\psi;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}\frac{\partial z}{\partial r}\right)\cos\varphi\cos\psi + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\frac{\partial z}{\partial r}\right)$$
$$\cos\varphi\sin\psi + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\frac{\partial z}{\partial r}\right)\sin\varphi = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\cos^2\varphi\cos^2\psi + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\cos^2\varphi\sin^2\psi$$
$$+ \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\sin^2\varphi + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\cos^2\varphi\sin\psi\cos\psi + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}\sin\varphi\cos\varphi\cos\psi + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\sin\varphi\cos\varphi\sin\psi,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = -\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)r\sin\varphi\cos\psi - \frac{\partial u}{\partial x}r\cos\varphi\cos\psi - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right.$$
$$\left. + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)r\sin\varphi\sin\psi - \frac{\partial u}{\partial y}r\cos\varphi\sin\psi + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 u}{\partial z\partial y}\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right.$$
$$\left. + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)r\cos\varphi - \frac{\partial u}{\partial z}r\sin\varphi,$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} r^2 \sin^2\varphi \cos^2\psi + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} r^2 \sin^2\varphi \sin^2\psi + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} r^2 \cos^2\varphi + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} r^2 \sin^2\varphi \sin\psi \cos\psi$$
$$- 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} r^2 \sin\varphi \cos\varphi \cos\psi - 2\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} r^2 \sin\varphi \cos\varphi \sin\psi - \frac{\partial u}{\partial x} r \cos\varphi \cos\psi - \frac{\partial u}{\partial y} r \cos\varphi$$
$$\sin\psi - \frac{\partial u}{\partial z} r \sin\varphi,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \psi^2} = -\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\frac{\partial y}{\partial \psi} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}\frac{\partial z}{\partial \psi}\right) r \cos\varphi \sin\psi - \frac{\partial u}{\partial x} r \cos\varphi \cos\psi + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\frac{\partial x}{\partial \psi}\right.$$
$$\left. + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial \psi} + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}\frac{\partial z}{\partial \psi}\right) r \cos\varphi \cos\psi - \frac{\partial u}{\partial y} r \cos\varphi \sin\psi,$$
$$= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} r^2 \cos^2\varphi \sin^2\psi + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} r^2 \cos^2\varphi \cos^2\psi - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} r^2 \cos^2\varphi \cos\psi \sin\psi - \frac{\partial u}{\partial x} r \cos\varphi \cos\psi$$
$$- \frac{\partial u}{\partial y} r \cos\varphi \sin\varphi,$$

woraus leicht folgt:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2 \cos^2\varphi}\frac{\partial^2 u}{\partial \psi^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\operatorname{tg}\varphi \frac{\partial u}{\partial \varphi} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

so dass die Gleichung (f) ist

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2 \cos^2\varphi}\frac{\partial^2 u}{\partial \psi^2} - \frac{1}{r^2}\operatorname{tg}\varphi \frac{\partial u}{\partial \varphi} = 0,$$

oder wenn man beachtet, dass $\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial^2 (ru)}{\partial r^2}$:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2 (ru)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2 \cos^2\varphi}\frac{\partial^2 u}{\partial \psi^2} - \frac{1}{r^2}\operatorname{tg}\varphi \frac{\partial u}{\partial \varphi} = 0.$$

4) Sind x, y, z die drei rechtwinklichen Koordinaten eines beliebigen Punktes im Raume; x', y', z' die ebenfalls rechtwinklichen Koordinaten desselben Punktes für andere Axen; u eine Funktion von x, y, z, so ist

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x'}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y'}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z'}\right)^2;$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z'^2}.$$

Man hat nämlich bekanntlich:

$$x = \alpha + a_1 x' + b_1 y' + c_1 z', \quad a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1, \quad a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0,$$
$$y = \beta + a_2 x' + b_2 y' + c_2 z', \quad b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 1, \quad a_1 a_3 + b_1 b_3 + c_1 c_3 = 0,$$
$$z = \gamma + a_3 x' + b_3 y' + c_3 z', \quad c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 1, \quad a_2 a_3 + b_2 b_3 + c_2 c_3 = 0.$$

Mithin

$$\frac{\partial u}{\partial x'} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x'} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x'} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x'} = \frac{\partial u}{\partial x} a_1 + \frac{\partial u}{\partial y} a_2 + \frac{\partial u}{\partial z} a_3,$$
$$\frac{\partial u}{\partial y'} = \frac{\partial u}{\partial x} b_1 + \frac{\partial u}{\partial y} b_2 + \frac{\partial u}{\partial z} b_3, \quad \frac{\partial u}{\partial z'} = \frac{\partial u}{\partial x} c_1 + \frac{\partial u}{\partial y} c_2 + \frac{\partial u}{\partial z} c_3;$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x'^2} = a_1^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a_2^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a_3^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2a_1 a_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2a_1 a_3 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + 2a_2 a_3 \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z},$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y'^2} = b_1^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b_2^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + b_3^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2b_1 b_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2b_1 b_3 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + 2b_2 b_3 \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z},$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial z'^2} = c_1^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c_2^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + c_3^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2c_1 c_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + 2c_1 c_3 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + 2c_2 c_3 \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z},$$

woraus die Richtigkeit der angegebenen Sätze ganz unmittelbar folgt.

§. 30.

Will man die Sätze des §. 15 auf Funktionen mehrerer Veränderlichen ausdehnen, so unterliegt dies keinerlei Schwierigkeit. Sey nämlich $f(x, y, z, \ldots)$ eine Funktion der unabhängig Veränderlichen $x, y, z, \ldots$ und man will $f(x+h, y+k, z+l, \ldots)$ nach Potenzen und Produkten der Grössen $h, k, l, \ldots$ entwickeln, so setze man $h=\alpha h'$, $k=\alpha k'$, $l=\alpha l', \ldots$ und betrachte $f(x+\alpha h', y+\alpha k', z+\alpha l', \ldots)$ als Funktion von α, die etwa mit $F(\alpha)$ bezeichnet wergen möge. Nach der Formel (26) in §. 15 hat man

$$F(\alpha)=F(0)+\frac{\alpha}{1}F'(0)+\frac{\alpha^2}{1.2}F''(0)+\ldots+\frac{\alpha^n}{1\ldots n}F^n(0)+\frac{\alpha^{n+1}}{1..n+1}F^{n+1}(\Theta\alpha),$$

worin $F(0), F'(0), \ldots, F^n(0)$ die Werthe von $F(\alpha), \frac{\partial F(\alpha)}{\partial \alpha}, \ldots, \frac{\partial^n F(\alpha)}{\partial x^n}$ für $\alpha=0$ bedeuten. Gemäss §. 28 ist aber, wenn $x+\alpha h'=x'$, $y+\alpha k'=y'$, $z+\alpha l'=z', \ldots\ldots$:

$$\frac{\partial^n F(\alpha)}{\partial x^n}=\left(\frac{\partial}{\partial x'}h'+\frac{\partial}{\partial y'}k'+\frac{\partial}{\partial z'}l'+\ldots\right)^n f(x', y', z', \ldots)$$

also, wenn man hier $\alpha=0$ setzt, wodurch $x', y', z', \ldots$ in $x, y, z, \ldots$ übergehen:

$$F^n(0)=\left(\frac{\partial}{\partial x}h'+\frac{\partial}{\partial y}k'+\frac{\partial}{\partial z}l'+\ldots\right)^n f(x, y, z, \ldots).$$

und wie man leicht sieht:

$$\alpha^n F^n(0)=\left(\frac{\partial}{\partial x}h+\frac{\partial}{\partial y}k+\frac{\partial}{\partial z}l+\ldots\right)^n f(x, y, z, \ldots).$$

Demnach:

$$\begin{aligned} f(x+h, y+k, z+l, \ldots) = f(x, y, z, \ldots) &+ \left(\frac{\partial}{\partial x}h+\frac{\partial}{\partial y}k+\frac{\partial}{\partial z}l+\ldots\right) f(x, y, z, \ldots) \\ &+\frac{1}{1.2}\left(\frac{\partial}{\partial x}h+\frac{\partial}{\partial y}k+\frac{\partial}{\partial z}l+\ldots\right)^2 f(x, y, z, \ldots) \\ &\quad\vdots \\ &+\frac{1}{1\ldots n}\left(\frac{\partial}{\partial x}h+\frac{\partial}{\partial y}k+\frac{\partial}{\partial z}l+\ldots\right)^n f(x, y, z, \ldots) \\ &+\frac{Q}{1\ldots(n+1)}, \end{aligned} \tag{36}$$

wo Q der Werth von

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}h+\frac{\partial}{\partial y}k+\frac{\partial}{\partial z}l+\ldots\right)^{n+1} f(x, y, z, \ldots)$$

ist, wenn man nach geschehener Differenzirung für $x, y, z, \ldots$ setzt: $x+\Theta h$, $y+\Theta h$, $z+\Theta l, \ldots$, und Θ zwischen 0 und 1 liegt.

Setzt man in (36) $x=y=z=\ldots=0$, und statt $h, k, l, \ldots$: $x, y, z, \ldots$, so erhält man:

$$\begin{aligned} f(x, y, z, \ldots) = f(0, 0, 0, \ldots) &+ \left(\frac{\partial}{\partial x}x+\frac{\partial}{\partial y}y+\frac{\partial}{\partial z}z+\ldots\right)_0 f(x, y, z, \ldots) \\ &+\frac{1}{1.2}\left(\frac{\partial}{\partial x}x+\frac{\partial}{\partial y}y+\frac{\partial}{\partial z}z+\ldots\right)_0^2 f(x, y, z, \ldots) \\ &\quad\vdots \\ &+\frac{1}{1\ldots n}\left(\frac{\partial}{\partial x}x+\frac{\partial}{\partial y}y+\frac{\partial}{\partial z}z+\ldots\right)_0^n f(x, y, z, \ldots) \\ &+\frac{1}{1\ldots(n+1)}Q', \end{aligned} \tag{37}$$

wo der angehängte Zeiger 0 bedeutet, dass man in den vorkommenden Differentialquotienten (nach geschehener Differenzirung) $x=0$, $y=0$, $z=0, \ldots$ zu setzen habe, und wo Q' der Werth der Grösse

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}x+\frac{\partial}{\partial y}y+\frac{\partial}{\partial z}z+\ldots\right)^{n+1} f(x, y, z, \ldots)$$

ist, wenn man in den Differentialquotienten für $x, y, z, \ldots$ setzt $\Theta x, \Theta y, \Theta z, \ldots$ Es versteht sich von selbst, dass die Formeln (36) und (37) in ähnlicher Weise gebraucht werden können, wie die Theoreme von Taylor und MacLaurin, doch wollen wir uns dabei nicht weiter aufhalten und nur einer Anwendung der Formel (36) gedenken.

Sind nämlich die Grössen $h, k, l, \ldots$ so klein, dass man ihre höheren Potenzen und Produkte vernachlässigen kann, so ist

$$f(x+h, y+k, z+l, \ldots) = f(x, y, z, \ldots) + \frac{\partial f}{\partial x}h + \frac{\partial f}{\partial y}k + \frac{\partial f}{\partial z}l + \ldots.$$

Diese Formel wird namentlich dann angewendet, wenn man die kleinen Aenderungen von Grössen berechnen will, welche von mehreren anderen sich um wenig ändernden abhängen; wie z. B. bei der Berechnung des Einflusses der Beobachtungsfehler auf die Resultate in der Trigonometrie (vergl. mein „Handbuch der eben. und sphär. Trigonometrie“, erste Abtheil., 9. Abschnitt, zweite Abth., 7. Abschn.). Die dortigen Formeln sind ganz nach dem Obigen gebildet. Aus

$$c = a\cos B + b\cos A$$

folgt, wenn a, b, A, B um Δa, Δb, ΔA, ΔB zunehmen, und man diese Grössen klein genug annimmt, um ihre Produkte zu vernachlässigen, da

$$\frac{\partial c}{\partial a} = \cos B, \quad \frac{\partial c}{\partial b} = \cos A, \quad \frac{\partial c}{\partial B} = -a\sin B, \quad \frac{\partial c}{\partial A} = -b\sin A:$$

$$c + \Delta c = a\cos B + b\cos A + \cos B\,\Delta a + \cos A\,\Delta b - a\sin B\,\Delta B - b\sin A\,\Delta A,$$

$$\Delta c = \cos B\,\Delta a + \cos A\,\Delta b - a\sin B\,\Delta B - b\sin A\,\Delta A.$$

(Das Weitere sehe man in dem angeführten Buche.)

Eine weitere Anwendung der obigen Formeln kann, ähnlich wie in §. 22. VI, bei den Formen $\frac{0}{0}$ für Funktionen mehrerer Veränderlichen vorkommen. Seyen nämlich $f(x, y)$, $F(x, y)$ Funktionen von x, y, die für $x=a$, $y=b$ zu Null werden, so wird $\frac{f(x, y)}{F(x, y)}$ in diesem Falle zu $\frac{0}{0}$. Setzt man nun zunächst $x=a+h$, $y=b+k$, so wird

$$\frac{f(x,y)}{F(x,y)} = \frac{f(a+h, b+k)}{F(a+h, b+k)} = \frac{f(a,b) + \frac{\partial f}{\partial x}h + \frac{\partial f}{\partial y}k + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{h^2}{1.2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{k^2}{1.2} + \ldots}{F(a,b) + \frac{\partial F}{\partial x}h + \frac{\partial F}{\partial y}k + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\frac{h^2}{1.2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}hk + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\frac{k^2}{1.2} + \ldots},$$

wenn man in den Differentialquotienten für x und y setzt a und b. Da hier $f(a, b)=0$, $F(a, b)=0$, so fallen in Zähler und Nenner die ersten Glieder weg. In dem Bleibenden hat man dann h, k gleich Null zu setzen; man sieht jedoch, dass, ohne zwischen h und k eine Beziehung festzustellen, hier gar Nichts zu entscheiden ist. Sey also $k=\alpha h$, so kann man dann Zähler und Nenner durch h dividiren, und wenn man nunmehr $h=0$ setzt, so ist:

$$\frac{f(a, b)}{F(a, b)} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x} + \alpha \frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial x} + \alpha \frac{\partial F}{\partial y}}$$

wo in den Differentialquotienten $x = a$, $y = b$ gesetzt werden muss. Ist nicht $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$, so bleibt wegen des willkürlichen α diese Grösse immer noch unbestimmt; bestimmt wird sie aber auch, wenn $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$. Wären die vier Differentialquotienten erster Ordnung 0, so müsste man zu denen der zweiten Ordnung gehen und hätte:

$$\frac{f(a, b)}{F(a, b)} = \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\alpha + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\alpha^2}{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\alpha + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\alpha^2},$$

u. s. w. Wie man bei mehr als zwei Veränderlichen verfährt, ist hieraus schon klar.

Z. B. die Grösse

$$\frac{l(x) - l(y)}{x + 2y - 3}$$

wird $\frac{0}{0}$ für $x = 1$, $y = 1$. Hier ist $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{1}{y}$, $\frac{\partial F}{\partial x} = 1$, $\frac{\partial F}{\partial y} = 2$; für $x = 1$, $y = 1$ sind diese Grössen $1, -1, 1, 2$, so dass der Werth des obigen Bruches =

$$\frac{1 - \alpha}{1 + 2\alpha}$$

worin α ganz willkürlich ist. Da diese letztere Grösse für $\alpha = 1$ Null ist, für $\alpha = -\frac{1}{2}$ unendlich gross, so kann also $\frac{l(x) - l(y)}{x + 2y - 3}$ für $x = 1$, $y = 1$, alle möglichen Werthe haben.

Der Bruch $\frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}$ wird $\frac{0}{0}$ für $x = 0, y = 0$; für diese Werthe ist $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 2$, $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 2$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0$, so dass der Werth des Bruches gleich

$$\frac{2 + 4\alpha + 2\alpha^2}{2 + 2\alpha^2} = \frac{(1+\alpha)^2}{1+\alpha^2}.$$

Diese Grösse kann offenbar nie negativ werden; ihr kleinster Werth ist 0 für $\alpha = -1$; um ihren etwaigen grössten Werth zu finden, setze man ihren Differentialquotienten nach α gleich Null, und hat:

$$(1+\alpha)(1+\alpha^2) - \alpha(1+\alpha)^2 = 0, \text{ d. h. } 1+\alpha = 0 \text{ oder } 1+\alpha^2 - \alpha(1+\alpha) = 0.$$

$\alpha + 1 = 0$ gibt $\alpha = -1$, das Minimum; $1 + \alpha^2 - \alpha(1+\alpha) = 0$ gibt $1 - \alpha = 0$, $\alpha = 1$, also das Maximum, das mithin $\frac{2^2}{2} = 2$ ist, so dass $\frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}$ für $x = 0$, $y = 0$ nicht unter 0 und nicht über 2 seyn kann.

Der Bruch $\frac{\sin x - \sin y}{x - y}$ wird zu $\frac{0}{0}$ für $x = y$. Aber $\frac{\partial f}{\partial x} = \cos x$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -\cos y$, $\frac{\partial F}{\partial x} = 1$, $\frac{\partial F}{\partial y} = -1$, also für $y = x$ ist der Bruch =

$$\frac{\cos x - \alpha \cos x}{1 - \alpha} = \frac{\cos x(1-\alpha)}{1-\alpha} = \cos x.$$

Der Bruch

$$\frac{4x^2+3y+z-1}{\sin x+\operatorname{tg} y+l(z)}$$

wird $\frac{0}{0}$ für $x=0$, $y=0$, $z=1$. Für diese Werthe ist $\frac{\partial f}{\partial x}=0$, $\frac{\partial f}{\partial y}=3$, $\frac{\partial f}{\partial z}=1$, $\frac{\partial F}{\partial x}=1$, $\frac{\partial F}{\partial y}=1$, $\frac{\partial F}{\partial z}=1$, also der Bruch gleich

$$\frac{3\alpha+\beta}{1+\alpha+\beta}$$

wo α und β ganz willkürlich sind

Endlich wird die Grösse

$$\frac{\cos^2(x+y)-\cos^2 z}{(x+y)^2-z^2}$$

zu $\frac{0}{0}$, wenn $y=x$, $z=2x$. Hier ist $\frac{\partial f}{\partial x}=-2\cos 2x\sin 2x$, $\frac{\partial f}{\partial y}=-2\cos 2x\sin 2x$, $\frac{\partial f}{\partial z}=2\cos 2x\sin 2x$, $\frac{\partial F}{\partial x}=2.2x$, $\frac{\partial F}{\partial y}=2.2x$, $\frac{\partial F}{\partial z}=-2.2x$, also der Werth des Bruches:

$$\frac{-\cos 2x\sin 2x-\alpha\cos 2x\sin 2x+\beta\cos 2x\sin 2x}{2x+2\alpha x-2\beta x}=-\frac{\cos 2x\sin 2x}{2x}\cdot\frac{1+\alpha-\beta}{1+\alpha-\beta},$$

so dass der Werth des Bruches für $x=y$, $z=2x$ ist: $-\frac{\cos 2x\sin 2x}{2x}=-\frac{\sin 4x}{4x}$.

§. 31.

Sey $f(x, y, z, \ldots)$ eine Funktion der unabhängig Veränderlichen $x, y, z, \ldots$, so sagen wir, dieselbe erlange für $x=a$, $y=b$, $z=c, \ldots$ einen grössten Werth, wenn $f(a, b, c, \ldots)$ grösser ist als die Werthe von $f(x, y, z, \ldots)$, worin $x, y, z, \ldots$ nur wenig verschieden sind von $a, b, c, \ldots$; dagegen wird $f(a, b, c, \ldots)$ ein kleinster Werth seyn, wenn diese Grösse kleiner ist, als die so eben angegebenen Werthe (§. 24). Um nun die Werthe $a, b, c, \ldots$ zu erhalten, sey im Allgemeinen $x=a+\alpha u$, $y=b+\beta u$, $z=c+\gamma u, \ldots$, wo $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ willkürliche Konstanten sind, u aber sich ändern kann. Nach unserer Erklärung ist nun die Grösse

$$f(a+\alpha u, b+\beta u, c+\gamma u, \ldots)$$

ein Maximum oder Minimum, wenn $u=0$ ist. Setzt man zur Abkürzung

$$f(a+\alpha u, b+\beta u, c+\gamma u, \ldots)=F(u),$$

so erlangt also $F(u)$ für $u=0$ einen grössten oder kleinsten Werth. Daraus folgt (§. 24), dass $F'(u)$ für $u=0$ Null seyn muss, d. h. dass $F'(0)=0$ ist. Ist dann $F''(0)>0$, so hat $F(u)$ einen kleinsten Werth erreicht; ist $F''(0)<0$, einen grössten; wäre $F''(0)=0$, so müsste auch $F'''(0)=0$ seyn, und das Zeichen von $F^4(0)$ würde angeben, ob man ein Maximum oder Minimum hätte, u. s. w.

Nun ist (§. 28) allgemein

$$F^n(u)=\left(\frac{\partial}{\partial x}\alpha+\frac{\partial}{\partial x}\beta+\frac{\partial}{\partial z}\gamma+\ldots\right)^n f(x, y, z, \ldots),$$

wo man für $a+\alpha u$, $b+\beta u$, $c+\gamma u, \ldots$ wieder $x, y, z, \ldots$ gesetzt hat. Setzt man hier $u=0$, so heisst dies für $x, y, z, \ldots$ setzen $a, b, c, \ldots$ Daraus folgt zunächst

$$F'(u)=\frac{\partial f}{\partial x}\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\gamma+\ldots,$$

und da für $u=0$, d. h. $x=a$, $y=b$, $z=c, \ldots$ diese Grösse Null seyn muss, was auch immer die ganz willkürlichen Grössen $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ sind, so wird dies nur dadurch geschehen können, dass jedes Glied für sich Null ist, d. h. dass man hat:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=0,\ \frac{\partial f}{\partial y}=0,\ \frac{\partial f}{\partial z}=0, \ldots \ldots \qquad (a)$$

Bestimmt man nun aus diesen Gleichungen $x, y, z, \ldots$, so werden die so erhaltenen Werthe, in $f(x, y, z, \ldots)$ gesetzt, letztere Grösse zu einem Maximum oder Minimum machen können, d. h. die Werthe $a, b, c, \ldots$ seyn, die man oben gemeint hat. Ob dies der Fall ist, und welches der beiden eintritt, entscheidet das Zeichen von $F''(0)$. Ist nämlich bei ganz beliebigen $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ die Grösse

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\alpha+\frac{\partial}{\partial y}\beta+\frac{\partial}{\partial z}\gamma+\ldots\right)^2 f(x, y, z, \ldots), \qquad (b)$$

in der man $x=a$, $y=b$, $z=c, \ldots$, wie diese Grössen aus (a) folgen, gesetzt hat, positiv, so ist $f(a, b, c, \ldots)$ ein Minimum; ist sie negativ, so ist $f(a, b, c, \ldots)$ ein Maximum. Wie man diese so eben allgemein ausgesprochene Bedingung näher fassen kann, wollen wir nun an spezielleren Fällen zeigen.

I. Seyen zunächst nur zwei unabhängig Veränderliche x, y vorhanden und a, b ein zusammengehöriges Werthepaar für x, y, gezogen aus den Gleichungen $\frac{\partial f}{\partial x}=0, \frac{\partial f}{\partial y}=0$. Die zu untersuchende Grösse (b) ist hier

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\alpha^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\alpha\beta+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\beta^2,$$

die wenn $x=a$, $y=b$ gesetzt wird, zu

$$A\alpha^2+2B\alpha\beta+C\beta^2$$

werde, worin also A, B, C die Werthe von $\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}$ für $x=a$, $y=b$ sind. Da nun identisch, wenn $\beta=m\alpha$:

$$A\alpha^2+2B\alpha\beta+C\beta^2=\alpha^2(A+2Bm+Cm^2)=\alpha^2 C\left(m^2+2\frac{B}{C}m+\frac{A}{C}\right)$$

$$=\alpha^2 C\left[\left(m+\frac{B}{C}\right)^2-\frac{B^2}{C^2}+\frac{A}{C}\right]=\alpha^2 C\left[\left(m+\frac{B}{C}\right)^2-\frac{B^2-AC}{C^2}\right],$$

und, wenn $f(a, b)$ ein Maximum oder ein Minimum seyn soll, diese Grösse immer dasselbe Zeichen haben muss, was auch α und β, oder α und m seyen, so muss auch, was m sey, die Grösse $\left(m+\frac{B}{C}\right)^2-\frac{B^2-AC}{C^2}$ immer dasselbe Zeichen haben, da $\alpha^2 C$ sicher immer dasselbe Zeichen beibehält, was auch α sey. Soll aber $\left(m+\frac{B}{C}\right)^2-\frac{B^2-AC}{C^2}$ für alle m von demselben Zeichen seyn, so muss nothwendig B^2-AC negativ seyn. Denn wäre B^2-AC positiv, also $\frac{B^2-AC}{C^2}$ auch positiv, so mache man m nur $=-\frac{B}{C}$, also $\left(m+\frac{B}{C}\right)^2=0$, und obige Grösse wird $=-\frac{B^2-AC}{C^2}$, also negativ; macht man dagegen

m gross genug, damit $\left(m+\frac{B}{C}\right)^2 > \frac{B^2-AC}{C^2}$ sey, so fällt jene Grösse positiv aus, hat also ein anderes Vorzeichen als vorhin. Ist dagegen $B^2-AC<0$, so ist $-\frac{B^2-AC}{C^2}$ positiv, also $\left(m+\frac{B}{C}\right)^2-\frac{B^2-AC}{C^2}$ immer positiv, was auch m sey. Für den Fall, dass $B^2-AC=0$, wäre die nämliche Grösse $=\left(m+\frac{B}{C}\right)^2$, also für alle m positiv, ausser für $m=-\frac{B}{C}$, wo sie Null wäre. In diesem Falle hätte man eine weitere Untersuchung nöthig, wie wir sogleich sehen werden, nachdem wir im Augenblicke diesen Fall werden auszuschliessen haben.

Es folgt nun aus dem Vorstehenden, dass f(a, b) weder ein Maximum noch ein Minimum seyn kann, wenn B^2-AC positiv ist. Ist dagegen $B^2-AC<0$, so wird man ein Maximum haben, wenn $C<0$, da dann $\alpha^2 C\left[\left(m+\frac{B}{C}\right)^2-\frac{B^2-AC}{C^2}\right]$ immer negativ ist; ein Minimum dagegen, wenn $C>0$. Da jetzt $B^2-AC<0$, also $B^2<AC$, und B^2 sicher positiv ist, so müssen nothwendig A und C dasselbe Zeichen haben, also beide positiv, oder beide negativ seyn. Ist dies nicht der Fall, so hat man weder Maximum noch Minimum. Eben so kann jetzt keine der Grössen A oder C Null seyn, da sonst $B^2-AC=B^2$, also positiv wäre.

Für den Fall nun endlich, dass $B^2-AC=0$ wäre, würde zwar $\alpha^2 C\left[\left(m+\frac{B}{C}\right)^2-\frac{B^2-AC}{C^2}\right]$ für alle m dasselbe Zeichen haben, wie C, also dieselbe Regel, wie so eben für $B^2-AC<0$ gelten, ausser für $m=-\frac{B}{C}$, wo obige Grösse 0 würde, und man nicht wissen kann, ob diese Grösse positiv oder negativ ist. In diesem Falle hätte man in

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\alpha+\frac{\partial}{\partial y}\beta\right)^3 f=\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}\alpha^3+3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}\alpha^2\beta+3\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}\alpha\beta^2+\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}\beta^3$$

zu setzen $\beta=m\alpha=-\frac{B}{C}\alpha$, $x=a$, $y=b$, und es müsste dieselbe 0 werden, wenn man ein Maximum oder Minimum haben sollte. Würde für dieselben Werthe dann

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\alpha+\frac{\partial}{\partial y}\beta\right)^4 f=\frac{\partial^4 f}{\partial x^4}\alpha^4+4\frac{\partial^4 f}{\partial x^3\partial y}\alpha^3\beta+6\frac{\partial^4 f}{\partial x^2\partial y^2}\alpha^2\beta^2+4\frac{\partial^4 f}{\partial x\partial y^3}\alpha\beta^3+\frac{\partial^4 f}{\partial y^4}\beta^4$$

positiv, so hätte man wirklich ein Minimum, wenn auch $C>0$; würde diese Grösse negativ, so hätte man ein Maximum, wenn auch $C<0$.

Im Allgemeinen wird man jedoch in diesem Falle besser thun, auf anderem Wege sich die Gewissheit zu verschaffen, ob ein Maximum oder ein Minimum vorhanden sey oder nicht.

II. Gesetzt zweitens man habe drei Veränderliche x, y, z, und seyen a, b, c die zu einander gehörigen Werthe derselben, wie sie aus $\frac{\partial f}{\partial x}=0$, $\frac{\partial f}{\partial y}=0$, $\frac{\partial f}{\partial z}=0$ folgen. Die Grösse (b), nämlich

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\alpha^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\alpha\beta+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\beta^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}\alpha\gamma+2\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}\beta\gamma+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\gamma^2$$

werde zu $$A\alpha^2+2B\alpha\beta+C\beta^2+2D\alpha\gamma+2E\beta\gamma+F\gamma^2, \qquad (c)$$

wenn man für x, y, z die Werthe a, b, c einsetzt. Man setze nun $\beta = m\alpha$, $\gamma = n\alpha$, so ist diese Grösse (c) gleich

$$\alpha^2[A+2Bm+Cm^2+2Dn+2Emn+Fn^2]=F\alpha^2\left[n^2+2\left(\frac{Em+D}{F}\right)n+\frac{Cm^2+2Bm+A}{F}\right]$$

$$=F\alpha^2\left[\left(n+\frac{Em+D}{F}\right)^2-\left(\frac{Em+D}{F}\right)^2+\frac{Cm^2+2Bm+A}{F}\right]=F\alpha^2\left[\left(n+\frac{Em+D}{F}\right)^2\right.$$
$$\left.-\frac{(E^2-CF)m^2+2(ED-BF)m+D^2-AF}{F^2}\right]$$

$$=\alpha^2F\left\{\left(n+\frac{Em+D}{F}\right)^2-\frac{E^2-CF}{F^2}\left[m^2+2\frac{(ED-BF)}{E^2-CF}m+\frac{D^2-AF}{E^2-CF}\right]\right\}$$

$$=\alpha^2F\left\{\left(n+\frac{Em+D}{F}\right)^2-\frac{E^2-CF}{F^2}\left[\left(m+\frac{ED-BF}{E^2-CF}\right)^2-\left(\frac{ED-BF}{E^2-CF}\right)^2+\frac{D^2-AF}{E^2-CF}\right]\right\}$$

$$=\alpha^2F\left\{\left(n+\frac{Em+D}{F}\right)^2-\frac{E^2-CF}{F^2}\left[\left(m+\frac{ED-BF}{E^2-CF}\right)^2-\frac{(ED-BF)^2-(D^2-AF)(E^2-CF)}{(E^2-CF)^2}\right]\right\}$$

Da nun α^2F sicher immer sein Zeichen beibehält, so muss auch die in den Klammern befindliche Grösse immer dasselbe Zeichen haben, was auch m und n seyen. Dazu ist, wie in I., nothwendig, dass

$$\frac{E^2-CF}{F^2}\left[\left(m+\frac{ED-BF}{E^2-CF}\right)^2-\frac{(ED-BF)^2-(D^2-AF)(E^2-CF)}{(E^2-CF)^2}\right]$$

immer negativ sey, was auch m sey, so dass die hier in den Klammern befindliche Grösse für alle m immer dasselbe Zeichen haben muss, und zwar das positive, da nothwendig (wie in I), wenn sie dasselbe Zeichen haben soll, $(ED-BF)^2-(D^2-AF)(E^2-CF)<0$, also die eingeklammerte Grösse positiv seyn wird. Mithin muss $E^2-CF<0$ seyn, und es hat dann endlich die Grösse (c) dasselbe Zeichen, wie F. Daraus folgt nun, dass wenn ein Maximum oder Minimum vorhanden seyn soll, nothwendig

$$E^2-CF<0, \quad (ED-BF)^2-(D^2-AF)(E^2-CF)<0$$

seyn muss; ist dann $F<0$, so hat man ein Maximum; ist dagegen $F>0$, ein Minimum. Da $E^2<CF$, so haben C und F dasselbe Zeichen; da weiter $(ED-BF)^2<(D^2-AF)(E^2-CF)$, so haben auch D^2-AF und E^2-CF dasselbe Zeichen, d. h. es ist $D^2-AF<0$, so dass auch A und F dasselbe Zeichen haben. Für den Fall des Maximums oder Minimums haben also A, C, F dasselbe Zeichen, ferner ist $E^2-CF<0$, $D^2-AF<0$ und $(ED-BF)^2-(D^2-AF)(E^2-CF)<0$. Fällt eine der eben negativ vorausgesetzten Grössen positiv aus, so hat man weder Maximum noch Minimum; fällt eine oder die andere gleich Null aus, so muss man sich durch besondere Untersuchung versichern, welcher Fall hier eintrete.

Man ersieht aus dem Vorstehenden schon, in welcher Weise die Untersuchung fortgeführt werden kann, ohne dass wir die nothwendig weitläufigen Formeln hersetzen.

§. 32.

Gesetzt $x_1, x_2, \ldots, x_n$ seyen n Veränderliche und $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ eine Funktion derselben; zugleich bestehen aber zwischen den n Veränderlichen noch die r Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} \varphi_1(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) = 0, \\ \varphi_2(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) = 0, \\ \quad\vdots \\ \varphi_r(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n) = 0, \end{array}\right\} \quad (a)$$

wo $r < n$, und wo es ferner nicht gerade erforderlich ist, dass in jeder der Gleichungen (a) alle n Veränderlichen vorkommen, nur sollen sich diese Gleichungen nicht widersprechen, und auch nicht der Art seyn, dass einige der Veränderlichen aus ihnen bestimmt werden können, da in diesem Falle diese Veränderlichen bestimmte Werthe hätten, also nicht mehr veränderlich wären. Man soll nun die Werthe von $x_1, x_2, \ldots, x_n$ bestimmen, so dass $F(x_1, \ldots, x_n)$ ein Maximum oder Minimum wird.

Der zunächst sich darbietende Weg scheint hier zu seyn, vermöge der Gleichungen (a) r der Veränderlichen durch die $n-r$ übrigen auszudrücken, ihre Werthe in $F(x_1, \ldots, x_n)$ zu setzen, und dann diese Funktion von $n-r$ unabhängig Veränderlichen nach §. 31 zu behandeln. Dieser Weg ist aber nicht immer der kürzeste, noch der bequemste, und wir wollen desshalb den folgenden einschlagen.

Seyen vermöge der Gleichungen (a) die Grössen $x_1, x_2, \ldots, x_r$ als Funktionen der unabhängig bleibenden $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ betrachtet, also $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ eine Funktion dieser unabhängig Veränderlichen und der davon abhängenden $x_1, \ldots, x_r$, so werden nach §. 31 die Differentialquotienten von $F(x_1, \ldots, x_n)$ nach sämmtlichen unabhängig Veränderlichen Null zu setzen seyn. Beachtet man dabei, dass $x_1, \ldots, x_r$ Funktionen jener sind, so erhält man (§. 7):

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial F}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial x_{r+1}} + \frac{\partial F}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial x_{r+1}} + \ldots + \frac{\partial F}{\partial x_r}\frac{\partial x_r}{\partial x_{r+1}} + \frac{\partial F}{\partial x_{r+1}} = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial x_{r+2}} + \frac{\partial F}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial x_{r+2}} + \ldots + \frac{\partial F}{\partial x_r}\frac{\partial x_r}{\partial x_{r+2}} + \frac{\partial F}{\partial x_{r+2}} = 0, \\ \quad\vdots \\ \frac{\partial F}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial x_n} + \frac{\partial F}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial x_n} + \ldots\ldots + \frac{\partial F}{\partial x_r}\frac{\partial x_r}{\partial x_n} + \frac{\partial F}{\partial x_n} = 0. \end{array}\right\} \quad (b)$$

Die hier vorkommenden Differentialquotienten $\frac{\partial x_1}{\partial x_{r+1}}, \ldots, \frac{\partial x_1}{\partial x_n}, \frac{\partial x_2}{\partial x_{r+1}}, \ldots, \frac{\partial x_2}{\partial x_n}, \ldots, \frac{\partial x_r}{\partial x_n}$ sind aus den Gleichungen (a) zu entwickeln, indem man jede nach $x_{r+1}, \ldots, x_n$ differenzirt (§. 28).

Dadurch erhält man:

$$\left.\begin{array}{l}
\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial x_{r+1}}+\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial x_{r+1}}+\ldots+\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_r}\frac{\partial x_r}{\partial x_{r+1}}+\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_{r+1}}=0,\\
\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial x_{r+2}}+\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial x_{r+2}}+\ldots+\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_r}\frac{\partial x_r}{\partial x_{r+2}}+\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_{r+2}}=0,\\
\vdots\\
\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial x_n}+\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial x_n}+\ldots+\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_r}\frac{\partial x_r}{\partial x_n}+\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n}=0.
\end{array}\right\}(c_1)$$

$$\left.\begin{array}{l}
\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial x_{r+1}}+\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial x_{r+1}}+\ldots+\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_r}\frac{\partial x_r}{\partial x_{r+1}}+\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_{r+1}}=0,\\
\vdots\\
\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial x_n}+\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial x_n}+\ldots+\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_r}\frac{\partial x_r}{\partial x_n}+\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_n}=0.
\end{array}\right\}(c_2)$$

$$\vdots$$

$$\left.\begin{array}{l}
\frac{\partial \varphi_r}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial x_{r+1}}+\frac{\partial \varphi_r}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial x_{r+1}}+\ldots+\frac{\partial \varphi_r}{\partial x_r}\frac{\partial x_r}{\partial x_{r+1}}+\frac{\partial \varphi_r}{\partial x_{r+1}}=0,\\
\vdots\\
\frac{\partial \varphi_r}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial x_n}+\frac{\partial \varphi_r}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial x_n}+\ldots+\frac{\partial \varphi_r}{\partial x_r}\frac{\partial x_r}{\partial x_n}+\frac{\partial \varphi_r}{\partial x_n}=0.
\end{array}\right\}(c_r)$$

Diese Gleichungen sind der Anzahl nach $r(n-r)$, eben so viele als zu bestimmende Differentialquotienten, so dass die letzteren aus denselben genau bestimmt werden könnten. Statt aber die Bestimmung derselben unmittelbar vorzunehmen, wollen wir zunächst jede der Gleichungen (c_1) mit einer noch unbestimmten konstanten Grösse k_1 multipliziren; eben so jede der Gleichungen (c_2) mit $k_2, \ldots$, jede der Gleichungen (c_r) mit k_r. Von den nunmehr erhaltenen Gleichungssystemen $(c_1), (c_2), \ldots, (c_r)$ wollen wir die erste Gleichung jedes Systems zur ersten (b), die zweite jedes Systems zur zweiten (b), ..., die letzte jedes Systems zur letzten in (b) addiren, dabei natürlich die Glieder, welche dieselben Differentialquotienten $\frac{\partial x_1}{\partial x_{r+1}}, \ldots$ haben, zusammenziehen, und nun annehmen, $k_1, k_2, \ldots, k_r$ werden so bestimmt, dass

$$\left.\begin{array}{l}
\frac{\partial F}{\partial x_1}+k_1\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}+k_2\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1}+\ldots+k_r\frac{\partial \varphi_r}{\partial x_1}=0,\\
\frac{\partial F}{\partial x_2}+k_1\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2}+k_2\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2}+\ldots+k_r\frac{\partial \varphi_r}{\partial x_2}=0,\\
\vdots\\
\frac{\partial F}{\partial x_r}+k_1\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_r}+k_2\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_r}+\ldots+k_r\frac{\partial \varphi_r}{\partial x_r}=0.
\end{array}\right\}(d)$$

Alsdann gibt die angedeutete Addition ganz unmittelbar, dass

$$\left.\begin{array}{l}
\frac{\partial F}{\partial x_{r+1}}+k_1\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_{r+1}}+k_2\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_{r+1}}+\ldots+k_r\frac{\partial \varphi_r}{\partial x_{r+1}}=0,\\
\frac{\partial F}{\partial x_{r+2}}+k_1\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_{r+2}}+k_2\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_{r+2}}+\ldots+k_r\frac{\partial \varphi_r}{\partial x_{r+2}}=0,\\
\vdots\\
\frac{\partial F}{\partial x_n}+k_1\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n}+k_2\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_n}+\ldots+k_r\frac{\partial \varphi_r}{\partial x_n}=0
\end{array}\right\}(e)$$

seyn muss. — Die Gleichungen (d), (e), nebst (a), die der Anzahl nach $n+r$ sind, reichen zur Bestimmung der $n+r$ Unbekannten $x_1, \ldots, x_n, k_1, \ldots, k_r$ vollkommen hin, so dass man dieselben dazu benützen wird.* Beachtet man, dass die Gleichungen (d) und (e) nichts Anderes sind als die partiellen Differentialquotienten der Grösse

$$F+k_1\varphi_1+k_2\varphi_2+\ldots+k_r\varphi_r$$

nach den Grössen $x_1, x_2, \ldots, x_n$, die man als von einander unabhängig ansehen würde, so kann man folgende mechanische Regel aufstellen: „Ist $F(x_1, \ldots, x_n)$ eine Funktion der n Veränderlichen $x_1, \ldots, x_n$, die ein Maximum oder Minimum werden soll, und bestehen zwischen diesen Veränderlichen noch die r Gleichungen (a), so addire man zu $F(x_1, \ldots, x_n)$ die ersten Seiten der Gleichungen (a), nachdem jede mit einer Konstanten $k_1, k_2, \ldots, k_r$ multiplizirt worden. Von der so erhaltenen Grösse

$$F+k_1\varphi_1+k_2\varphi_2+\ldots+k_r\varphi_r$$

setze man die partiellen Differentialquotienten nach $x_1, x_2, \ldots x_n$, wobei jede dieser Grössen als unabhängig angesehen wird, Null, und erhält, nebst (a), die zur Bestimmung der Unbekannten nöthigen Gleichungen.“ *

Man erhält nämlich hiedurch die Gleichungen (d) und (e). Einige Beispiele mögen das in §. 31 und 32 Gesagte erläutern.

§. 33.

I. Unter allen ebenen Dreiecken, welche denselben Umfang a haben, das zu suchen, welches die möglich grösste Fläche u hat.

Seyen $x, y, a-x-y$ die drei Seiten, so ist bekanntlich

$$u^2=\frac{1}{16}a(a-2x)(a-2y)(2x+2y-a),$$

so dass, da u, also auch $\frac{16u^2}{a}$ ein Maximum seyn soll, man

$$v=(a-2x)(a-2y)(2x+2y-a)$$

ein Maximum zu setzen hat. Hieraus folgt:

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-2(a-2y)(2x+2y-a)+2(a-2x)(a-2y),$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=-2(a-2x)(2x+2y-a)+2(a-2x)(a-2y),$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=-8(a-2y),\quad \frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}=+4(2x+2y-a)-4(a-2y)-4(a-2x),$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=-8(a-2x).$$

Also muss seyn

$$-(a-2y)(2x+2y-a)+(a-2x)(a-2y)=0,\quad (a-2y)(4x+2y-2a)=0,$$
$$-(a-2x)(2x+2y-a)+(a-2x)(a-2y)=0,\quad (a-2x)(2x+4y-2a)=0,$$

also da nicht $x=\frac{1}{2}a$ oder $y=\frac{1}{2}a$ seyn kann:

$$4x+2y-2a=0,\ 2x+4y-2a=0,\ x=y=\tfrac{1}{3}a,\ a-x-y=\tfrac{1}{3}a,$$

d. h. das Dreieck ist gleichseitig. Für diese Werthe ist

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=A=-\frac{8a}{3},\quad \frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}=B=-\frac{4a}{3},\quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=C=-\frac{8a}{3},$$

* Keine der Grössen k darf übrigens $=0$ ausfallen.

also $B^2-AC=\frac{16a^2}{9}-\frac{64a^2}{9}=-\frac{48a^2}{9}$, d. h. $B^2-AC<0$, und da A und C negativ, so hat man wirklich ein Maximum (§. 31. I),

II. Das rechtwinkliche Parallelepiped vom Inhalte a zu finden, das die kleinste Oberfläche u hat.

Drei an einander stossende Kanten seyen x, y, $\frac{a}{xy}$, so ist

$$\tfrac{1}{2}u=xy+\frac{a}{y}+\frac{a}{x},$$

also $\quad \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x}=y-\frac{a}{x^2}=0,\ \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial y}=x-\frac{a}{y^2}=0,\ x=y=\sqrt[3]{a},\ \frac{a}{xy}=\sqrt[3]{a},$

so dass das Parallelepiped ein Würfel ist. Hier ist

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{2a}{x^3}=2,\ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=1,\ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=2,\ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)^2-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}<0,\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}>0,$$

also hat man ein Minimum.

III. Die kürzeste oder längste Gerade zwischen zwei Kurven in einer Ebene zu suchen.

Seyen x, y die Koordinaten des Endpunktes dieser Geraden für die erste, β, α für die zweite Kurve, so ist y eine Funktion von x wegen der Gleichung der ersten Kurve; β eine Funktion von α wegen der der zweiten Kurve. Ferner ist das Quadrat der Entfernung

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=u=\text{Max. oder Min.}$$

Hier ist

$$\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x}=x-\alpha+(y-\beta)\frac{\partial y}{\partial x},\ \frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial x}=-(x-\alpha)-(y-\beta)\frac{\partial \beta}{\partial \alpha},$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+(y-\beta)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2},\ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial \alpha}=-1-\frac{\partial \beta}{\partial \alpha}\frac{\partial y}{\partial x},\ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2}=1+\left(\frac{\partial \beta}{\partial \alpha}\right)^2$$
$$-(y-\beta)\frac{\partial^2 \beta}{\partial \alpha^2},$$

worin die Differentialquotienten aus den Gleichungen der zwei Kurven zu ziehen sind.

Aus den Gleichungen des Maximums oder Minimums

$$x-\alpha+(y-\beta)\frac{\partial y}{\partial x}=0,\ x-\alpha+(y-\beta)\frac{\partial \beta}{\partial \alpha}=0, \qquad (a)$$

nebst jenen Kurvengleichungen zieht man die Werthe von x, y, α, β, bestimmt also die Gerade vollständig. Soll ein Maximum oder ein Minimum vorhanden seyn, so muss für die gefundenen Werthe:

$$\left[1+\frac{\partial \beta}{\partial \alpha}\frac{\partial y}{\partial x}\right]^2-\left[1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+(y-\beta)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right]\left[1+\left(\frac{\partial \beta}{\partial \alpha}\right)^2-(y-\beta)\frac{\partial^2 \beta}{\partial \alpha^2}\right]<0$$

seyn. Aus den Gleichungen (a) folgt leicht, dass der Punkt (α, β) in der im Punkte (x, y) an die erste Kurve errichteten Normale liegt; eben so der Punkt (x, y) in der im Punkte (α, β) an die zweite gezogenen Normale, so dass also die kürzeste oder längste Gerade, wenn sie vorhanden ist, auf beiden Kurven senkrecht steht.

IV. Aus vier gegebenen Seiten a, b, c, d soll das möglich grösste Viereck (Fig. 14) gebildet werden.

Fig. 14.

Sey x der Winkel, den die Seiten a und b, y der, den c und d mit einander machen, so muss in den beiden Dreiecken, in denen p (Diagonale) vorkommt:

$$p^2=a^2+b^2-2ab\cos x,\ p^2=c^2+d^2-2cd\cos y,$$

so dass also
$$a^2+b^2-2ab\cos x=c^2+d^2-2cd\cos y$$



seyn wird. Ferner ist der Flächeninhalt des Vierecks

$$\tfrac{1}{2}ab\sin x+\tfrac{1}{2}cd\sin y,$$

welche Grösse ein Maximum seyn muss. Gemäss §. 32 hat man nun die Differentialquotienten nach y und x von

$$\tfrac{1}{2}ab\sin x+\tfrac{1}{2}cd\sin y+k(a^2+b^2-c^2-d^2-2ab\cos x+2cd\cos y)$$

Null zu setzen, d. h. man hat:

$$\tfrac{1}{2}ab\cos x+2kab\sin x=0,\ \tfrac{1}{2}cd\cos y-2kcd\sin y=0.$$

Hieraus: $k=-\frac{\cos x}{4\sin x},\ \frac{1}{2}\cos y+\frac{\cos x\sin y}{2\sin x}=0,\ \sin x\cos y+\cos x\sin y=0,$

d. h. $\sin(x+y)=0,\ x+y=\pi,$

da nicht $x+y=0$ oder 2π seyn kann. Also $y=\pi-x$ und $\cos y=-\cos x$, mithin

$$a^2+b^2-2ab\cos x=c^2+d^2+2cd\cos x,\ \cos x=\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(cd+ab)},$$

welche Gleichung x bestimmt; y ist dann $=\pi-x$. (Um das Viereck kann, wegen $x+y=\pi$, ein Kreis beschrieben werden.)

V. Man soll einen abgekürzten Kegel bilden so, dass der obere Halbmesser $=m$ mal dem unteren, seine Oberfläche gegeben $=a$ und sein Inhalt der möglich grösste sey.

Sey x der untere Halbmesser, y die Höhe, so ist mx der obere und also die Oberfläche

$$a=x^2\pi+m^2x^2\pi+\tfrac{1}{2}(2\pi x+2m\pi x)\sqrt{y^2+(x-mx)^2},$$
$$a=\pi\left[(1+m^2)x^2+(1+m)x\sqrt{y^2+(m-1)^2x^2}\right].$$

Der Inhalt ist $\frac{1}{3}\pi y(x^2+mx^2+m^2x^2)=\frac{1}{3}\pi yx^2(1+m+m^2)$, und diese Grösse ist ein Maximum, wenn yx^2 es ist. Also hat man die Differentialquotienten von

$$yx^2+k\pi\left[(1+m^2)x^2+(1+m)x\sqrt{y^2+(1-m)^2x^2}-\frac{a}{\pi}\right]$$

nach x und y Null zu setzen. Daraus

$$2xy+2k\pi(1+m^2)x+k\pi(1+m)\sqrt{y^2+(1-m)^2x^2}+\frac{k\pi(1+m)x^2(1-m)^2}{\sqrt{y^2+(1-m)^2x^2}}=0,$$

$$x^2+\frac{k\pi(1+m)xy}{\sqrt{y^2+(1-m)^2x^2}}=0.$$

Hieraus folgt $k\pi=-\frac{x\sqrt{y^2+(1-m)^2x^2}}{(1+m)y},$

und wenn man dies in die erste Gleichung einsetzt:

$$2y-\frac{2(1+m^2)x}{1+m}\cdot\frac{\sqrt{y^2+(1-m)^2x^2}}{y}-\frac{y^2+(1-m)^2x^2}{y}-\frac{x^2(1-m)^2}{y}=0,\ \text{d. h.}$$

$$2(1+m)y^2-2(1+m^2)x\sqrt{y^2+(1-m)^2x^2}-[y^2+(1-m)^2x^2](1+m)-x^2(1-m)^2(1+m)=0$$
$$(1+m)[y^2-2(1-m)^2x^2]-2(1+m^2)x\sqrt{y^2+(1-m)^2x^2}=0,$$

oder wenn man durch x^2 dividirt und $\left(\frac{y}{x}\right)^2=z$ setzt:

$$(1+m)[z-2(1-m)^2]=2(1+m^2)\sqrt{z+(1-m)^2},$$

woraus durch Quadrirung:

$$(1+m)^2[z^2-4(1-m)^2z+4(1-m)^4]=4(1+m^2)^2[z+(1-m)^2],$$
$$z^2-4\left\{(1-m)^2+\frac{(1+m^2)^2}{(1+m)^2}\right\}z=\frac{4(1+m^2)^2(1-m)^2-4(1-m)^4(1+m)^2}{(1+m)^2}$$
$$z^2-8\frac{(1+m^4)}{(1+m)^2}z=\frac{16(1-m)^2m^2}{(1+m)^2},$$
$$z=4\frac{(1+m^4)}{(1+m)^2}\pm\frac{4}{(1+m)^2}\sqrt{m^2(1-m)^2(1+m)^2+(1+m^4)^2}$$
$$=\frac{4}{(1+m)^2}\left[1+m^4\pm\sqrt{m^2(1-m^2)^2+(1+m^4)^2}\right].$$

Da $z=\frac{y^2}{x^2}$, so findet sich hieraus $\frac{y}{x}$, also y in x ausgedrückt, und dann ergibt sich aus der Gleichung $a=\pi\,[(1+m^2)x^2+(1+m)x\sqrt{y^2+(1-m)^2x^2}$ selbst x. Da $\sqrt{m^2(1-m^2)+(1+m^4)^2}>1+m^4$, so gilt nur das obere Zeichen; ist also

$$\frac{2}{1+m}\sqrt{\left[1+m^4+\sqrt{m^2(1-m^2)^2+(1+m^4)^2}\right]}=\lambda,$$

so ist

$$y=\lambda x,\ x=\sqrt{\frac{a}{\pi[1+m^2+(1+m)\sqrt{\lambda^2+(1-m)^2}]}}.$$

Für $m=1$ folgt hieraus $\lambda=2$, $y=2x$, $x=\sqrt{\frac{a}{6\pi}}$ (vergl. §. 26. XI). Für $m=0$ hat man einen vollständigen Kegel und es ist $\lambda=2\sqrt{2}$, $y=2\sqrt{2}.x$, $x=\sqrt{\frac{a}{\pi(1+3)}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{\pi}}$.

VI. Eine Zisterne soll eine bestimmte Menge Wasser aufnehmen können und in der Form eines rechtwinklichen Parallelepipeds hergestellt werden so, dass die innere Verkleidung möglichst klein ausfalle.

Also ist, wenn x, y, z die drei an einander stossende Kanten sind:

$$xyz-a=0,\ xy+2xz+2yz=\text{Minimum}.$$

Daraus wie früher:

$$y+2z+kyz=0,\ x+2z+kxz=0,\ 2x+2y+kxy=0,\ xyz=a.$$

Man zieht hieraus

$$y-x+kz(y-x)=0,\ (y-x)(1+kz)=0,$$

also $y=x$ oder $1+kz=0$; im letzteren Falle $k=-\frac{1}{z}$, $y+2z-y=0$, $2z=0$, was unmöglich ist; also $y=x$, dann

$$4x+kx^2=0,\ k=-\frac{4}{x},\ x+2z-4z=0,\ z=\frac{1}{2}x;\ \frac{x^3}{2}=a,\ x=\sqrt[3]{2a},\ y=\sqrt[3]{2a},$$

$$z=\frac{1}{2}\sqrt[3]{2a}.$$

Allgemeine Anmerkung.

§. 34.

Im Vorstehenden haben wir die wichtigsten Lehren der Differentialrechnung auseinander gesetzt, so wie die hauptsächlichsten analytischen Anwendungen derselben angegeben. Wir haben dabei die Betrachtung der Gränzwerthe als das Fundament des Ganzen angesehen, dabei jedoch auch mehrfach auf die Bedeutung unendlich kleiner Grössen hingewiesen. In letzterer Beziehung wollen wir nun noch einer kleinen Abkürzung gedenken, die man sich sehr oft erlauben kann, wodurch dann die Rechnung sehr erleichtert und vereinfacht wird.

Ist ε eine unendlich kleine Grösse (§. 3), so ist ε^2, als das Produkt der zwei unendlich kleinen Grössen ε und ε, begreiflich selbst unendlich klein, zudem aber auch unendlich klein im Verhältniss zu ε, denn der Quotient $\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon}$

ist $= \varepsilon$, also unendlich klein, und ein Bruch ist nur unendlich klein, wenn sein Zähler unendlich klein ist im Verhältniss zu seinem Nenner oder letzterer unendlich gross im Verhältniss zu ersterem. Eben so ist ε^3 unendlich klein im Verhältniss zu ε^2 u. s. w. Sind überhaupt $\alpha, \beta, \gamma, \ldots.$ unendlich kleine Grössen derselben Art, d. h. so dass die Quotienten $\frac{\beta}{\alpha}, \frac{\gamma}{\alpha}, \ldots.$ endlich sind, so sind $\alpha^2, \beta^2, \ldots, \alpha\beta, \alpha\gamma, \ldots$ unendlich klein selbst im Verhältniss zu $\alpha, \beta, \gamma, \ldots.$ Diese Betrachtungen haben nun auf die Unterscheidung der unendlich kleinen Grössen in verschiedene Ordnungen geführt. So ist, wenn ε unendlich klein der ersten Ordnung: ε^2 unendlich klein der zweiten, ε^3 der dritten u. s. w. Allgemein ist μ eine unendlich kleine Grösse der n^{ten} Ordnung in Bezug auf ε, wenn der Quotient $\frac{\mu}{\varepsilon^m}$ unendlich klein ist für $m < n$, dagegen aber unendlich gross für $m > n$; für $m = n$ wird er endlich und bestimmt seyn.

Dies vorausgesetzt, wird man nun die oben berührte Abkürzung so aussprechen können, dass man sagt, man dürfe in der Rechnung die unendlich kleinen Grössen höherer Ordnung neben denen niederer Ordnung vernachlässigen. Der so eben ausgesprochene Satz ist allerdings nichts Anderes, als die Methode der Gränzen in kürzere Form gebracht, er erfordert aber (wie freilich Alles) gehörige Aufmerksamkeit, und wird auch nur dann erst zur vollen Klarheit kommen, wenn man die Fundamental-Anschauungen der Gränzmethode nie aus den Augen verliert. Wir wollen an einigen Beispielen zeigen, in welcher Weise er angewendet werden kann.

I. Gesetzt ein Körper bewege sich geradlinig aber ungleichförmig (§. 13. IX) und sey in der Zeit t nach M gelangt (Fig. 15), so dass v seine Geschwindigkeit in diesem Punkte, und x der bereits zurückgelegte Weg AM sey. Sicher ist nun $x = f(t)$, da der Weg x sich ändert mit der Zeit, und schliesslich bloss von ihr abhängt, da die wirksame Kraft gleichfalls als Funktion der Zeit angesehen werden muss. Sey nun τ eine unendlich kleine Zeit, die auf t folgt, so wird man das Recht haben anzunehmen, die Geschwindigkeit v bleibe in dieser Zeit τ unverändert dieselbe, so dass also, wenn in der Zeit τ der Weg MN zurückgelegt wird, der natürlich auch unendlich klein ist, $MN = v\tau$ seyn wird. Nun ist aber $AM = f(t)$, also $AN = f(t + \tau)$, mithin

Fig. 15. A M N

$$MN = f(t+\tau) - f(t) = \tau f'(t) + \frac{\tau^2}{1.2} f''(t + \Theta\tau) \quad (§. 15),$$

so dass diese Grösse $= v\tau$ ist. Aber τ ist unendlich klein, also τ^2 eine unendlich kleine Grösse zweiter Ordnung im Verhältniss zu τ, so dass man das Glied $\frac{\tau^2}{2} f''(t + \Theta\tau)$ sogleich gegen das erste weglassen kann, und also hat

$$v\,\tau = \tau f'(t), \quad v = f'(t) = \frac{\partial x}{\partial t}.$$

Man sieht leicht, dass dieses Weglassen vollkommen gerechtfertigt ist,

und eben so, in wie weit die so eben gegebene Ableitung und die in §. 13. IX verwandt sind.

II. Als weiteres Beispiel wollen wir die Gleichung der Wärmebewegung in einem dünnen Stabe aufstellen.

Die Grundannahmen, die wir dabei machen, sind die folgenden: Bezeichnen wir mit k die Wärmemenge, welche in der Zeit 1 durch einen Querschnitt, dessen Fläche $=1$, strömt, wenn die Länge des Stabes $=1$, und der sich gleich bleibende Temperaturunterschied seiner Enden $=1$ ist, so nehmen wir an, dass in der Zeit t durch den Querschnitt ω, wenn die Stablänge L und der sich gleich bleibende Temperaturunterschied seiner Enden u ist, die Wärmemenge $\frac{k\omega tu}{L}$ ströme, welche Annahme desto richtiger ist, je kleiner ω, L, t, u sind. Man kann sich hievon in folgender Weise überzeugen. Dass wenn Zeit, Stablänge, Temperaturunterschied der Enden des Stabs und Querschnitt desselben sämmtlich $=1$ sind, durch jeden Querschnitt des Stabes dieselbe Wärmemenge fliesse, ist wohl klar, da ja die Enden immer denselben Temperaturunterschied haben, also auch immer dieselbe Wärmemenge durch den Stab geht; in der Zeit t fliesst also kt durch den Querschnitt 1, $k\omega t$ durch den Querschnitt ω, und $k\omega tu$ durch denselben, wenn u der Temperaturunterschied ist; zum Mindesten ist die Annahme die einfachste, es sey die durchströmende Wärmemenge dem Temperaturunterschiede proportional. Bis jetzt war die Stablänge $=1$; da durch jeden Querschnitt immer dieselbe Wärmemenge strömt, so wird die Temperatur im Stabe proportional mit der Länge abnehmen, also in der Mitte nur halb so viel vom Anfange verschieden seyn, als am Ende. Würde daher der Stab auf die Hälfte reduzirt, und es sollte noch dieselbe Temperaturdifferenz herrschen, so müsste die durchströmende Wärmemenge das Doppelte seyn, also überhaupt umgekehrt proportional der Länge.

Sey also (siehe Fig. 15) v die Temperatur zur Zeit t in dem Querschnitt bei M, $AM=x$, der Querschnitt des Stabes bei M gleich ω, $MN=\xi$ unendlich klein, τ eine unendlich kleine Zeit, c die spezifische Wärme des Stabes, d. h. die Wärmemenge, welche nöthig ist, die Gewichtseinheit vom Material des Stabes um 1° der Temperatur zu erhöhen, ϱ das spezifische Gewicht des Körpers, und die Wärmemenge 1 gleich der Wärmemenge, welche die Gewichtseinheit Wasser um 1° in ihrer Temperatur erhöht. Das Gewicht des Körperstückchens MN ist $\omega\xi\varrho$, und da v eine Funktion von x und t ist, so wird nach der Zeit $t+\tau$ die Temperatur in M seyn (§. 15): $v+\frac{\partial v}{\partial t}\tau$ $+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\tau^2+\ldots$, so dass sie um $\frac{\partial v}{\partial t}\tau+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}\tau^2+\ldots$ zugenommen hat. In der ganzen Ausdehnung von MN kann man zu einer bestimmten Zeit die Temperatur als dieselbe ansehen, so dass also in dem Gewichte $\omega\xi\varrho$ die Temperatur in der Zeit τ um $\frac{\partial v}{\partial t}\tau+\ldots$ zugenommen hat, wozu die Wärme-

menge $c\omega\xi\varrho\left(\frac{\partial v}{\partial t}\tau+\ldots\right)$ nöthig war. Ist nun zur Zeit t die Temperatur in M gleich v, so ist sie zu derselben Zeit in N: $v+\frac{\partial v}{\partial x}\xi+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\xi^2+\ldots$, so dass der Temperaturunterschied von M gegen N gleich $-\left(\frac{\partial v}{\partial x}\xi+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\xi^2+\ldots\right)$ ist, und mithin in der Zeit τ durch MN (von M gegen N) eine Wärmemenge strömen wird, ausgedrückt durch

$$\frac{-k\omega\tau\left(\frac{\partial v}{\partial x}\xi+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\xi^2+\ldots\right)}{\xi}=-k\omega\tau\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\xi+\ldots\right),$$

welches also die Wärmemenge ist, die in der Zeit τ durch den Querschnitt M geflossen ist. Diese Grösse ist natürlich eine Funktion von x, so dass man die Wärmemenge, welche in derselben Zeit durch den Querschnitt in N strömt, finden wird, wenn man hier x in $x+\xi$ übergehen lässt. Dadurch wird dieselbe

$$-k\omega\tau\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\xi+\ldots\right)-\tau\xi\frac{\partial}{\partial x}\left[k\omega\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\ldots\right)\right]-\frac{1}{2}\tau\xi^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[k\omega\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\ldots\right)\right]-\ldots,$$

mithin strömt durch N weniger als durch M die Menge:

$$\tau\xi\frac{\partial}{\partial x}\left[k\omega\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\ldots\right)\right]+\frac{1}{2}\tau\xi^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[k\omega\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\ldots\right)\right]+\ldots=\tau\xi\frac{\partial}{\partial x}\left(k\omega\frac{\partial v}{\partial x}\right)+P,$$

wo P den Faktor $\xi^2\tau$ enthält. Diese Wärmemenge bleibt in dem Körperstückchen MN zurück. Ist nun γ diejenige Wärmemenge, welche in der Zeit 1 durch die Flächeneinheit bei einer Temperaturdifferenz 1 ausstrahlt, so wird MN in der Zeit τ durch Ausstrahlung verlieren $w\xi\tau\gamma v$, wenn w der Umfang des Schnittes in M ist, und das umgebende Mittel die Temperatur 0^0 besitzt. Also bleibt schliesslich noch in MN zurück die Wärmemenge:

$$\xi\tau\frac{\partial}{\partial x}\left(k\omega\frac{\partial v}{\partial x}\right)+P-w\xi\tau\gamma v.$$

Diese nun ist es, welche die Temperaturerhöhung in MN, von der wir früher gesprochen, hervorbringt, und da hiezu die Wärmemenge $c\omega\xi\varrho\tau\left(\frac{\partial v}{\partial t}+\ldots\right)$ nöthig war, so müssen diese und jene gleich seyn, so dass

$$\xi\tau\frac{\partial}{\partial x}\left(k\omega\frac{\partial v}{\partial x}\right)+P-w\xi\tau\gamma v=c\omega\xi\varrho\tau\left(\frac{\partial v}{\partial t}+\ldots\right),$$

d. h. wenn man beiderseitig durch $\xi\tau$ dividirt:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\omega\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{P}{\xi\tau}-w\gamma v=c\omega\varrho\left(\frac{\partial v}{\partial t}+\ldots\right).$$

Nun enthält $\frac{P}{\xi\tau}$ den Faktor ξ noch, ferner die nach $\frac{\partial v}{\partial t}$ kommenden Glieder den Faktor τ; da ξ und τ unendlich klein, so fallen also diese Glieder, als unendlich klein, weg und man hat einfach

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\omega\frac{\partial v}{\partial x}\right)-w\gamma v=c\omega\varrho\frac{\partial v}{\partial t}. \qquad \text{(I)}$$

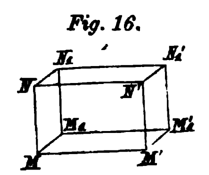
Gewöhnlich sind k und ω für den ganzen Stab konstant, und man hat dann

$$k\omega\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-w\gamma v=c\omega\varrho\frac{\partial v}{\partial t},\quad \frac{\partial v}{\partial t}=\frac{k}{c\varrho}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\frac{w\gamma}{c\omega\varrho}v, \qquad \text{(II)}$$

welches die gesuchte Gleichung ist. Es ist wohl nicht schwer, einzusehen,

wie man das hier Angegebene in anderer Form hätte aussprechen können, um es mit den immerhin zu Grunde liegenden Gränzbegriffen auch der äusseren Form nach in Einklang zu bringen.

III. Wir wollen uns nun irgend einen Körper und im Innern desselben einen Punkt M denken, der jedenfalls von der Oberfläche weit genug entfernt sey, um nicht nach Aussen Wärme strahlen zu können. Am Schlusse der Zeit t sey v die Temperatur des Punktes M, dessen rechtwinkliche Koordinaten x, y, z seyen. Denken wir uns durch M ein rechtwinkliches Parallelepiped MN'_1 gelegt, dessen Kanten $MM' = \Delta x$, $MN = \Delta z$, $MM_1 = \Delta y$ parallel mit den Koordinatenaxen und unendlich klein seyen; sey ϱ das spezifische Gewicht des Körpers, c seine spezifische Wärme in dem betreffenden Punkte und bei der Temperatur v, so wird die Temperaturerhöhung in dem Elemente $\Delta x \Delta y \Delta z$ in der (unendlich kleinen) Zeit Δt betragen: $\frac{\partial v}{\partial t}\Delta t + P$, wo P den Faktor Δt^2 enthält; dazu ist die Wärmemenge $c\varrho \Delta x \Delta y \Delta z \left(\frac{\partial v}{\partial t}\Delta t + P\right)$ nöthig, wobei wir voraussetzen, dass die Temperatur in dem elementaren Körperchen $\Delta x \Delta y \Delta z$ für dieselbe Zeit überall dieselbe sey, welche Voraussetzung nur wahr ist, in so ferne eben MN'_1 unendlich klein ist. Diese Wärmemenge ist nun gleich der durch Zufluss von dem übrigen Körper erhaltenen Wärme, oder gleich der, die in das Element geflossen, minus der, die wieder abfloss. Sey also wieder k die innere Leitungsfähigkeit, so wird durch die auf der Axe der x senkrechte Fläche MNM_1N_1, welche die Temperatur v hat, in der Zeit Δt die Wärmemenge $-k\Delta y \Delta z \Delta t\left(\frac{\partial v}{\partial x} + R\right)$ geflossen seyn, wo R den Faktor Δx enthält, indem man diese unendlich kleine Fläche, deren Inhalt $\Delta y \Delta z$ ist, als zu einem Stabe von der Länge Δx gehörend ansehen kann. Durch die Fläche $M'M'_1 N'N'_1$ fliesst demnach ab: $-\Delta y \Delta z \Delta t\left\{k\frac{\partial v}{\partial x} + kR + \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial v}{\partial x} + kR\right)\Delta x + \ldots\right\}$, da sie aus der vorigen hervorgeht, wenn man blos statt x setzt $x + \Delta x$. Daraus folgt, dass von dem mit der Axe der x parallelen Strome Wärme im Elemente bleibt:



$$-k\Delta y \Delta z \Delta t\left[\frac{\partial v}{\partial x} + R\right] + \Delta y \Delta z \Delta t\left\{k\frac{\partial v}{\partial x} + kR + \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial v}{\partial x} + kR\right)\Delta x + \ldots\right\}$$
$$= \Delta x \Delta y \Delta z \Delta t \frac{\partial\left(k\frac{\partial v}{\partial x}\right)}{\partial x} + \Delta x \Delta y \Delta z \Delta t R',$$

wo R' den Faktor Δx enthält. Ganz eben so bleibt von dem mit der Axe der y parallelen Strome (Flächen $MNM'N'$ und $M_1N_1M'_1N'_1$): $\Delta x \Delta y \Delta z \Delta t \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial v}{\partial y}\right) + \Delta x \Delta y \Delta z \Delta t S'$, wo S' den Faktor Δy enthält, und von dem mit der Axe der z parallelen (Flächen $MM'M_1M'_1$ und $NN'N_1N'_1$): $\Delta x \Delta y \Delta z \Delta t \left(k\frac{\partial v}{\partial z}\right) + \Delta x \Delta y \Delta z \Delta t T'$, wo T' den Faktor Δz enthält. Demnach ist

$$c\varrho\Delta x\Delta y\Delta z\Delta t\left(\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{P}{\Delta t}\right)=\Delta x\Delta y\Delta z\Delta t\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial v}{\partial z}\right)+R'+S'+T'\right].$$

Dividirt man beiderseitig mit $\Delta x\Delta y\Delta z\Delta t$, beachtet sodann, dass $\frac{P}{\Delta t}$ den unendlich kleinen Faktor Δt, R' den Δx, S' den Δy, T' den Δz erhält, so ist:

$$c\varrho\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial v}{\partial z}\right). \qquad \text{(III.)}$$

Ist k im ganzen Körper konstant, so ergibt sich:

$$c\varrho\frac{\partial v}{\partial t}=k\left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right]. \qquad \text{(IV.)}$$

IV. Wir wollen annehmen, der Körper bestehe aus konzentrischen Kugelschichten derart, dass in jeder Schichte die Beschaffenheit desselben überall dieselbe sey, sich aber von Schichte zu Schichte ändern könne; ferner wollen wir annehmen, es sey ursprünglich die Temperatur in allen Punkten, die gleich weit vom Mittelpunkte abstehen, dieselbe gewesen, so wird sie es auch später bleiben und also v nur von r, d. h. der Entfernung vom Mittelpunkte, abhängen. Die Grössen k, c, ϱ werden sich von Schichte zu Schichte ändern, in derselben Schichte wollen wir k als konstant voraussetzen. Alsdann ist (§. 29 Nr. 3):

$$c\varrho\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{k}{r}\frac{\partial^2(rv)}{\partial r^2}. \qquad \text{(V.)}$$

V. Besteht ein Körper in ähnlicher Weise aus zylindrischen Schichten und beziehen wir die Koordinaten eines Punktes auf ein Koordinatensystem, das wir das zylindrische nennen können und das durch die Formeln

$$x=r\cos\omega,\ y=r\sin\omega,\ z=z$$

ausgesprochen ist, wo r die Entfernung des Punktes von der gemeinschaftlichen Zylinderaxe bezeichnet, ω den Winkel, den r mit der Axe der x macht, so ist (§. 29 Nr. 1):

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r},$$

wenn wir wieder voraussetzen, es sey v von ω unabhängig. Also ist jetzt:

$$c\varrho\frac{\partial v}{\partial t}=k\left[\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right], \qquad \text{(VI)}$$

wo wir c, ϱ, k innerhalb derselben Schichte als konstant voraussetzen. Ist zugleich v von z unabhängig, d. h. setzen wir voraus, es sey zu einer bestimmten Zeit in gleicher Entfernung von der Axe auch dieselbe Temperatur, so ist

$$c\varrho\frac{\partial v}{\partial t}=k\left[\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}\right]. \qquad \text{(VI'.)}$$

VI. (Bedingung wegen der Gränzen.) Angenommen, der Körper befinde sich in einem Raume, der beständig dieselbe Temperatur ξ habe. Sey weiter u die Temperatur an der Oberfläche des Körpers, mit der er jenen Raum berührt, ω ein (unendlich kleines) Element derselben, k der Koeffizient der innern Leitungsfähigkeit, γ der der Ausstrahlungsfähigkeit (Nr. II). Die Wärmemenge, welche im Zeitelemente Δt durch ω strömt, ist $-k\frac{\partial u}{\partial n}\omega\Delta t$, wo n die Normale an die Oberfläche in dem betreffenden Punkte bedeutet (was ganz wie in Nr. II. bewiesen wird); die Wärmemenge, die durch dasselbe Element ausstrahlt, ist $\gamma(u-\xi)\omega\Delta t$, so dass, indem diese Mengen gleich seyn werden:

$$-k\frac{\partial u}{\partial n}=\gamma(u-\xi). \qquad \text{(VII.)}$$

Die Normale ist dabei nach dem äusseren Theile des Körpers gerichtet.

Wir wollen uns nun durch denselben Anfangspunkt der Koordinaten, auf den sich die Koordinaten x, y, z beziehen, drei neue senkrechte Axen denken, die wir mit L, M, N bezeichnen wollen, und wovon die N parallel sey mit der so eben bezeichneten Normale. Seyen $\lambda, \lambda', \lambda''$ die cosinus der Winkel, die L mit den Axen der x, y, z macht; μ, μ', μ'' dieselben Grössen für M; $\delta, \delta', \delta''$ für N; ferner l, m, n die Koordinaten eines Punktes (x, y, z) für die neuen Axen, so ist (§. 29, Nr. 4):

$$x=\lambda l+\mu m+\delta n, \quad y=\lambda' l+\mu' m+\delta' n, \quad z=\lambda'' l+\mu'' m+\delta'' n,$$

und n hat dieselbe Bedeutung, die ihm in $\frac{\partial u}{\partial n}$ zukommt. Demnach (§. 29):

$$\frac{\partial u}{\partial n}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial n}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial n}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial n}=\delta\frac{\partial u}{\partial x}+\delta'\frac{\partial u}{\partial y}+\delta''\frac{\partial u}{\partial z},$$

so dass für alle Punkte der Oberfläche:

$$k\left(\delta\frac{\partial u}{\partial x}+\delta'\frac{\partial u}{\partial y}+\delta''\frac{\partial u}{\partial z}\right)+\gamma(u-\xi)=0 \qquad \text{(VII')}$$

seyn muss, wo also $\delta, \delta', \delta''$ die cosinus der Winkel sind, welche die nach Aussen gerichtete Normale mit den Axen der x, y, z macht.

Für den Fall einer ebenen Oberfläche, die parallel ist mit der Axe der x, ist $\delta'=\delta''=0$ und $\delta=\pm 1$, so dass

$$\pm k\frac{\partial u}{\partial x}+\gamma(u-\xi)=0, \qquad \text{(a)}$$

wo die Zeichen $\pm$ gelten, je nachdem die nach Aussen gerichtete Normale mit der positiven Axe der x den Winkel 0 oder 180° macht.

Ist die betreffende Oberfläche die einer Kugel vom Halbmesser r und ist der Mittelpunkt Anfangspunkt, so ist $\delta=\pm\frac{x}{r}, \delta'=\pm\frac{y}{r}, \delta''=\pm\frac{z}{r}$, wo das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem die Normale dem Mittelpunkt ab- oder zugewendet ist. Also ist

$$\delta\frac{\partial u}{\partial x}+\delta'\frac{\partial u}{\partial y}+\delta''\frac{\partial u}{\partial z}=\pm\left(\frac{x}{r}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{y}{r}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{z}{r}\right)=\pm\frac{\partial u}{\partial r}, \; (r^2=x^2+y^2+z^2),$$

demnach

$$\pm k\frac{\partial u}{\partial r}+\gamma(u-\xi)=0, \qquad \text{(b)}$$

wo für r der Halbmesser der begränzenden Oberfläche zu setzen ist.

Für den Fall eines Zylinders, bei dem der Mittelpunkt der Grundfläche Anfangspunkt, die Zylinderaxe Axe der z ist, hat man $\delta''=0$, $\delta=\pm\frac{x}{r}$, $\delta'=\pm\frac{y}{r}$, wo r der Abstand des Punktes von der Zylinderaxe ist, so dass

$$\delta\frac{\partial u}{\partial x}+\delta'\frac{\partial u}{\partial y}+\delta''\frac{\partial u}{\partial z}=\pm\left(\frac{x}{r}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{y}{r}\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\pm\frac{\partial u}{\partial r}, \; (r^2=x^2+y^2),$$

und also

$$\pm k\frac{\partial u}{\partial r}+\gamma(u-\xi)=0. \qquad \text{(c)}$$

VII. (Bedingung bei Berührung.) Steht ein Körper in Berührung mit einem andern, so wird die durch ein Element des einen Körpers fliessende Wärmemenge offenbar gleich der seyn, die durch das mit jenem in Berührung stehende Element des anderen Körpers fliesst. Sind also u, u' die Tempera-

turen der Elemente; k, k' die Koeffizienten der inneren Leitungsfähigkeit für beide Körper, so sind diese Mengen: $-k\frac{\partial u}{\partial n}\omega\Delta t$, $-k'\frac{\partial u'}{\partial n}\omega\Delta t$, wo n sich auf die Normale, die beiden Elementen gemeinschaftlich ist, bezieht. Demnach ist

$$k\left(\delta\frac{\partial u}{\partial x}+\delta'\frac{\partial u}{\partial y}+\delta''\frac{\partial u}{\partial z}\right)=k'\left(\delta\frac{\partial u'}{\partial x}+\delta'\frac{\partial u'}{\partial y}+\delta''\frac{\partial u'}{\partial z}\right),$$

wo nun die Normale beliebig gerichtet seyn kann. Es versteht sich wohl von selbst, dass wenn die berührenden Körper anfänglich sehr ungleich erwärmt waren, diese Gleichung für den Anfang keine Geltung hat, und erst dann richtig ist, wenn die Temperaturungleichheiten sich einigermassen ausgeglichen haben, was jedoch ziemlich rasch geschieht.

Für berührende Kugelschichten hat man

$$k\frac{\partial u}{\partial r}=k'\frac{\partial u'}{\partial r};$$

für berührende Zylinderschichten dieselbe Gleichung; für ebene Schichten, die auf der Axe der x senkrechten stehen:

$$k\frac{\partial u}{\partial x}=k'\frac{\partial u'}{\partial x}.$$

Ist nun ferner λ der Koeffizient für den Uebergang der Wärme aus dem ersten Körper in den zweiten, so ist $\lambda(u-u')\omega\Delta t$ die Wärmemenge, die in den zweiten Körper durch das Element ω eindringt; dieselbe muss aber gleich der aus dem ersten Körper ausströmenden, d. h. gleich $-k\frac{\partial u}{\partial n}\omega\Delta t$ seyn, so dass also neben obiger Gleichung noch die Beziehung

$$k\frac{\partial u}{\partial n}=\lambda(u'-u)$$

bestehen muss.

Zweites Buch.

Elemente der Integralrechnung.

Achter Abschnitt.

Das unbestimmte Integral.

§. 35.

Die Integralrechnung ist das Umgekehrte der Differentialrechnung, und stellt sich somit zur Aufgabe, aus dem bekannten Differentialquotienten einer Grösse letztere selbst zu ermitteln. Ist also $\frac{\partial y}{\partial x}=f(x)$, und $f(x)$ bekannt, so lehrt die Integralrechnung die Grösse y zu bestimmen, was sie durch das Zeichen $y=\int f(x)\partial x$ darstellt, und dasselbe liest: y ist das Integral von f(x) nach x. Das angehängte ∂x ist also abermals (§. 3) ein blosses Zeichen, das anzeigt, es sey x die unabhängig Veränderliche, nach der integrirt wird. Eben so ist $\int f(u)\partial u$ das Integral von f(u) nach u u. s. w.

Aus diesen Erklärungen folgt ganz unmittelbar, dass

$$\frac{\partial}{\partial x}\int f(x)\partial x=f(x),\ \int \frac{\partial f(x)}{\partial x}\partial x=f(x),\ \int f'(x)\partial x=f(x). \tag{38}$$

Denn $\int f(x)\partial x$ ist diejenige Grösse, deren Differentialquotient f(x) ist, so dass also die erste Gleichung nichts Anderes ist, als der Ausdruck dieser Erklärung; $\int\frac{\partial f(x)}{\partial x}\partial x$ oder $\int f'(x)\partial x$ sagt, man solle diejenige Grösse suchen, deren Differentialquotient $f'(x)$ sey; diese ist aber gewiss $f(x)$, so dass die zweite (oder dritte) Gleichung eben so richtig ist.

Ehe wir nun weiter gehen, haben wir uns die Frage zu stellen, ob das Zeichen $\int f(x)\partial x$ ein- oder vieldeutig sey, d. h. ob es nur eine einzige Funktion von x gebe, deren Differentialquotient gleich f(x) ist, oder mehrere. Gesetzt es sey $F'(x)=f(x)$, so ist sicher $\int f(x)\partial x=F(x)$, und wenn es noch eine andere Funktion von x geben würde, die ebenfalls $\int f(x)\partial x$ wäre, so könnte man sie gewiss durch $F(x)+\varphi(x)$ vorstellen, wo $\varphi(x)$ der Unterschied von F(x) und jener andern Funktion wäre. Ist nun

$$\int f(x)\partial x=F(x)+\varphi(x),$$

so ist nothwendig $f(x) = F'(x) + \varphi'(x)$, d. h. da schon $f(x) = F'(x)$, so ist

$$\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x} = 0.$$

Demnach ist $\varphi(x)$ unabhängig von x, d. h. eine (freilich ganz) willkürliche Konstante (§. 4). Daraus nun folgt, dass wenn man eine Funktion von x: $F(x)$ kennt, für welche $\frac{\partial F(x)}{\partial x} = f(x)$, man allgemein haben wird:

$$\int f(x) \partial x = F(x) + C,$$

wo C eine willkürliche Konstante bedeutet. Was nun diese Grösse anbelangt, so wird sie, eben weil sie von x nicht abhängt, auch nicht mit x sich ändern, und wenn sie ja sich ändern sollte, so kann dies nur dadurch geschehen, dass sie plötzlich einen andern bestimmten Werth annimmt, den sie dann wieder unverändert beibehält. (Eine stetige Aenderung von C mit x, d. h. eine Aenderung um unendlich kleine Grössen widerstreitet ja eben der Annahme, dass C unabhängig ist von x.) Da die Rechnung es vorzugsweise nur mit stetigen Funktionen zu thun hat, so werden wir $\int f(x) \partial x$ so lange als stetig ansehen müssen, so lange $f(x)$ endlich bleibt, was sich auch nach §. 1 von selbst versteht, da ja dann der Differentialquotient von $\int f(x) \partial x$ endlich ist. So lange also $f(x)$ endlich ist, wird $\int f(x) \partial x$, d. h. $F(x) + C$ sich nur um unendlich wenig ändern, wenn x sich um unendlich wenig ändert, und da dies bei $F(x)$, als einer stetigen Funktion, der Fall seyn wird, so folgt daraus, dass auch eben so lange C denselben unveränderten Werth beibehält, da diese Grösse sich plötzlich um eine bestimmte endliche Grösse ändern würde, so dass $F(x) + C$ sich alsdann nicht um unendlich wenig mit x änderte. Hat man z. B. das Integral $\int tg\, x \partial x$, so ist dasselbe zunächst $= -l(\cos x)$, da $\frac{\partial l(\cos x)}{\partial x} = -tg\, x$ (§. 5), also allgemein

$$\int tg\, x \partial x = -l(\cos x) + C.$$

Was nun hier C anbelangt, so wird diese Grösse immer denselben Werth haben, wenn x zwischen den Gränzen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ liegt; ist aber $x > \frac{\pi}{2}$, so kann ganz wohl C einen andern Werth haben, als wenn $x < \frac{\pi}{2}$, da für $x = \frac{\pi}{2}$ ja $tg\, x$ unendlich, also unstetig wird; zwischen $\frac{\pi}{2}$ und $\frac{3\pi}{2}$ wird freilich wieder immer C denselben Werth haben u. s. w.

Man muss hierauf wohl achten, da man sich sonst in Schwierigkeiten verwickelt, die es nur dadurch werden, dass man nicht in den ersten Grundsätzen vollkommen klar geworden ist.

Was die Bestimmung der willkürlichen Konstanten in bestimmten Fällen betrifft, so ist sie immer sehr einfach. Weiss man nämlich, dass

$$\int f(x)\partial x = F(x) + C,$$

und dass für $x = a$ die Grösse $\int f(x)\partial x = A$ seyn müsse, so ist

$$A = F(a) + C, \quad C = A - F(a).$$

Die Richtigkeit einer Gleichung $\int y\partial x = z + C$ wird natürlich immer dadurch bewiesen, dass man zeigt, es sey $\frac{\partial z}{\partial x} = y$, und es gibt auch keinen andern Grund dafür. Die Zufügung des Zeichens C ist auch nur in soferne nothwendig, als man das Integral ausgemittelt hat; so lange man nur das Zeichen $\int y\partial x$ anwendet, versteht es sich von selbst, dass die willkürliche Konstante zuzufügen ist. So ist in $\int tg x \partial x$ erst dann C zuzufügen, wenn man $-l(\cos x)$ dafür schreiben will.

Dass ferner aus $\frac{\partial U}{\partial u} = v$ folgt $U = \int v\partial u$ ist natürlich, und die schliesslich zuzufügende Konstante ist unabhängig von u. — Aus §. 4 lassen sich leicht die folgende Sätze beweisen:

$$\int a f(x)\partial x = a\int f(x)\partial x, \int \left[f(x) \pm \varphi(x) \pm \ldots\right]\partial x = \int f(x)\partial x \pm \int \varphi(x)\partial x \pm \ldots, \quad (39)$$

wenn a eine Konstante ist. Denn es ist etwa $\frac{\partial}{\partial x}[a\int f(x)\partial x] = a\frac{\partial}{\partial x}\int f(x)\partial x = af(x)$, woraus sofort folgt $a\int f(x)\partial x = \int af(x)\partial x$. Die willkürliche Konstante ist bei wirklicher Bestimmung dann noch zuzufügen.

Aus der Zusammenstellung (10) in §. 5 ergibt sich nun hier die folgende:

$$\left.\begin{aligned}
&\int x^m\partial x = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C, \int \frac{1}{x}\partial x = l(x) + C, \int e^x\partial x = e^x + C, \int a^x\partial x = \frac{a^x}{l(a)} + C,\\
&\int \sin x\partial x = -\cos x + C, \quad \int \cos x\partial x = \sin x + C, \quad \int \frac{1}{\cos^2 x}\partial x = tg x + C,\\
&\int \frac{1}{\sin^2 x}\partial x = -\cot g x + C, \quad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\partial x = \text{arc}(\sin = x) + C, \quad \int \frac{1}{1+x^2}\partial x =\\
&\text{arc}(tg = x) + C,
\end{aligned}\right\} (40)$$

da man durch Differentiation der zweiten Seiten jeweils wieder die unter dem Zeichen $\int$ stehende Grösse erhält. (Wir bemerken hiebei, dass man statt $\int \frac{1}{\sin^2 x}\partial x, \int \frac{1}{1+x^2}\partial x$, u. s. w. gewöhnlich schreibt $\int \frac{\partial x}{\sin^2 x}, \int \frac{\partial x}{1+x^2}, \ldots$).

Als spezielle Fälle daraus hat man etwa:

$$\int \partial x \left(= \int 1\partial x = \int x^0\partial x\right) = x + C, \int x\partial x = \frac{x^2}{2} + C, \int \frac{\partial x}{x^2} = -\frac{1}{x} + C,$$

$$\int \frac{\partial x}{x^n} = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + C, \quad \int \sqrt{x}\partial x = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C, \quad \int \frac{\partial x}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C,$$

$$\int \sqrt[n]{x}\partial x = \frac{n}{n+1}x^{\frac{n+1}{n}} + C, \int \frac{\partial x}{\sqrt[n]{x}} = \frac{n}{n-1}x^{\frac{n-1}{n}} + C, \int \left(5x^2 + \frac{4}{x^3}\right)\partial x = \frac{5x^3}{3} - \frac{2}{x^2} + C,$$

u. s. w.

Die Aufgabe, die uns nun zunächst vorliegt, besteht darin, jedes vorgelegte Integral $\int f(x)\partial x$ entweder auf ein einfaches in (40), oder doch auf ein schon bekanntes zurückführen. Wie bei allen umgekehrten Rechnungsarten wird diese Aufgabe nicht in allen Fällen gelöst werden können, so dass man die hauptsächlichsten Methoden angeben muss, nach denen man in einzelnen Fällen zu verfahren hat. Als fundamentale Hilfsmittel haben wir nun zunächst zwei Sätze anzugeben, die wir fortwährend anwenden werden, und ausser denen nur wenige solcher Hilfsmittel zum Ziele führen werden.

§. 36.

Der erste dieser beiden Sätze ist in der Gleichung

$$\int y\frac{\partial z}{\partial x}\partial x = yz - \int z\frac{\partial y}{\partial x}\partial x \qquad (41)$$

ausgesprochen und heisst der Satz der **Integration durch Theile.** Er lässt sich ganz leicht beweisen. Es ist nämlich

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[yz - \int z\frac{\partial y}{\partial x}\partial x\right] = \frac{\partial}{\partial x}(yz) - z\frac{\partial y}{\partial x} = y\frac{\partial z}{\partial x} + z\frac{\partial y}{\partial x} - z\frac{\partial y}{\partial x} = y\frac{\partial z}{\partial x} \text{ (§.4.V, §.35)}$$

(38), also

$$yz - \int z\frac{\partial y}{\partial x}\partial x = \int y\frac{\partial z}{\partial x}\partial x,$$

wo die etwa beizufügende willkürliche Konstante nicht hingeschrieben ist, da man sie am Schlusse der Rechnung immer noch zufügen kann. Man sieht, dass die Formel (41) genau dem Satze in §. 4. V entspricht. Man kann sie auch unmittelbar daraus folgern. Da nämlich

$$\frac{\partial(yz)}{\partial x} = y\frac{\partial z}{\partial x} + z\frac{\partial y}{\partial x},$$

so ist (39)

$$yz = \int y\frac{\partial z}{\partial x}\partial x + \int z\frac{\partial y}{\partial x}\partial x,$$

woraus wieder (41) folgt.

Der zweite Satz ist der der **Integration durch Umformung.** Hat man nämlich das Integral $\int f(x)\partial x$ zur Bestimmung vorgelegt erhalten, und man vermuthet, dass durch Einführung einer neuen Veränderlichen z für x man seinen Zweck leichter erreichen könne, so wird man statt des Integrals nach x eines nach z zu bilden haben. Offenbar muss nämlich zwischen x und z eine Beziehung gegeben seyn, die es möglich macht, x durch z und z durch x auszudrücken. Drückt man nun x durch z aus, sieht also x als Funktion von z an, so ist die Grösse $\int f(x)\partial x$, die wir durch U bezeichnen wollen, zunächst eine Funktion von x, also dann auch Funktion von z. Demnach (§. 5):

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial z}, \text{ wo } \frac{\partial U}{\partial x} = f(x),$$

so dass

$$\frac{\partial U}{\partial z} = f(x)\frac{\partial x}{\partial z}, \quad U = \int f(x)\frac{\partial x}{\partial z}\partial z,$$

und also
$$\int f(x)\partial x = \int f(x)\frac{\partial x}{\partial z}\partial z, \qquad (42)$$
wo in $f(x)\frac{\partial x}{\partial z}$ die Grösse x durch z zu ersetzen ist. Kann man $\int f(x)\frac{\partial x}{\partial z}\partial z$ (nach z) integriren, und ersetzt dann z wieder durch x, so hat man auch $\int f(x)\partial x$. Die etwa beizugebende Konstante lässt sich am Schlusse der Rechnung immer zusetzen. Man sieht, dass (42) dem Satze (9) in §. 5 unmittelbar entspricht, wie sich denn auch die Richtigkeit von (42) geradezu aus jenem Satze beweisen lässt. Man hat nämlich, um (42) zu beweisen, bloss zu zeigen, dass der Differentialquotient von $\int f(x)\frac{\partial x}{\partial z}\partial z$ nach x gleich f(x) ist. Nun ist
$\frac{\partial}{\partial x}\int f(x)\frac{\partial x}{\partial z}\partial z = \frac{\partial}{\partial z}\left[\int f(x)\frac{\partial x}{\partial z}\partial z\right]\frac{\partial z}{\partial x} = \left[f(x)\frac{\partial x}{\partial z}\right]\frac{\partial z}{\partial x} = f(x)\frac{\partial x}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}$, und da (§. 14) $\frac{\partial x}{\partial z} = \frac{1}{\frac{\partial z}{\partial x}}$, also $\frac{\partial x}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 1$ ist, so ist wirklich $\frac{\partial}{\partial x}\left[\int f(x)\frac{\partial x}{\partial z}\partial z\right] = f(x)$.

Wir wollen nun zunächst einige Beispiele zur Erläuterung der wichtigen Sätze (41) und (42) zufügen.

I. Sey $\int l(x)\partial x$ zu bestimmen. In (41) setze man $y = l(x)$, $\frac{\partial z}{\partial x} = 1$, so ist $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{x}$, $z = \int 1\,\partial x = x$, also $yz = x\,l(x)$, $z\frac{\partial y}{\partial x} = 1$, $\int z\frac{\partial y}{\partial x}\partial x = x$, mithin
$$\int l(x)\partial x = x\,l(x) - x + C = x[l(x) - 1] + C.$$

Hat man $\int \left\{l(x)\right\}^2 \partial x$, so sey wieder $y = l(x)^2$, $\frac{\partial z}{\partial x} = 1$, $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{2l(x)}{x}$, $z = x$, also $z\frac{\partial y}{\partial x} = 2l(x)$, $\int z\frac{\partial y}{\partial x}\partial x = 2\int l(x)\partial x = 2x[l(x) - 1]$, so dass
$$\int l(x)^2\partial x = x\,l(x)^2 - 2x[l(x) - 1] + C.$$

Ist vorgelegt $\int l(x)^n \partial x$, so hat man $y = l(x)^n$, $\frac{\partial z}{\partial x} = 1$, $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{n\,l(x)^{n-1}}{x}$, $z = x$, also
$$\int l(x)^n\partial x = x\,l(x)^n - n\int l(x)^{n-1}\partial x,$$
wodurch das eine Integral auf das andere zurückgeführt ist. So hat man für $n = 1, 2, 3, \ldots$:
$$\int l(x)\partial x = x\,l(x) - x + C,$$
$$\int l(x)^2\partial x = x\,l(x)^2 - 2\int l(x)\partial x,$$
$$\int l(x)^3\partial x = x\,l(x)^3 - 3\int l(x)^2\partial x,$$
$$\int l(x)^4\partial x = x\,l(x)^4 - 3\int l(x)^3\partial x, \ldots$$

II. Sey vorgelegt $\int x^n e^x \partial x$, wo n eine positive ganze Zahl ist. Man setze

$y = x^n$, $\frac{\partial z}{\partial x} = e^x$, also $\frac{\partial y}{\partial x} = n x^{n-1}$, $z = \int e^x \partial x = e^x$, $z \frac{\partial y}{\partial x} = n x^{n-1} e^x$ und hat

$$\int x^n e^x \partial x = x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x \partial x.$$

Hieraus folgt, wenn $n = 1, 2, 3, \ldots$:

$$\int x e^x \partial x = x e^x - e^x + C,$$

$$\int x^2 e^x \partial x = x^2 e^x - 2 \int x e^x \partial x,$$

$$\int x^3 e^x \partial x = x^3 e^x - 3 \int x^2 e^x \partial x, \ldots$$

III. Man soll $\int \frac{e^x}{x^n} \partial x$ bestimmen, wenn n ebenfalls eine positive ganze Zahl ist. Sey $y = e^x$, $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{x^n} = x^{-n}$, also $\frac{\partial y}{\partial x} = e^x$, $z = \int x^{-n} \partial x = \frac{x^{-n+1}}{-n+1} = \frac{-1}{(n-1)x^{n-1}}$, $z \frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{e^x}{(n-1)x^{n-1}}$, so ist

$$\int \frac{e^x}{x^n} \partial x = -\frac{e^x}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{1}{n-1} \int \frac{e^x}{x^{n-1}} \partial x.$$

Für $n = 1$ kann man diese Formel nicht anwenden; für $n = 2, 3, \ldots$ aber gibt sie:

$$\int \frac{e^x}{x^2} \partial x = -\frac{e^x}{x} + \int \frac{e^x}{x} \partial x, \quad \int \frac{e^x}{x^3} \partial x = -\frac{e^x}{2x^2} + \frac{1}{2} \int \frac{e^x}{x^2} \partial x, \ldots,$$

so dass schliesslich alle diese Integrale auf $\int \frac{e^x}{x} \partial x$ zurückgeführt sind. Die Bestimmung dieses letzteren ist zunächst nicht thunlich.

IV. Es sey $\int x^n l(x) \partial x$ zu bestimmen, n wie so eben. Sey $y = l(x)$, $\frac{\partial z}{\partial x} = x^n$, $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{x}$, $z = \int x^n \partial x = \frac{x^{n+1}}{n+1}$, $\int z \frac{\partial y}{\partial x} \partial x = \int \frac{x^n}{n+1} \partial x = \frac{1}{n+1} \int x^n \partial x = \frac{1}{(n+1)^2} x^{n+1}$, so ist

$$\int x^n l(x) \partial x = \frac{x^{n+1} l(x)}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} x^{n+1} + C = \frac{x^{n+1}}{n+1} \left[l(x) - \frac{1}{n+1} \right] + C.$$

Eben so für $\int \frac{l(x)}{x^n} \partial x$ sey $y = l(x)$, $\frac{\partial z}{\partial x} = x^{-n}$, $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{x}$, $z = \int x^{-n} \partial x = \frac{-1}{(n-1)x^{n-1}}$, $\int z \frac{\partial y}{\partial x} \partial x = -\frac{1}{n-1} \int \frac{\partial x}{x^n} = \frac{1}{(n-1)^2} \cdot \frac{1}{x^{n-1}}$, also

$$\int \frac{l(x)}{x^n} \partial x = -\frac{l(x)}{(n-1)x^{n-1}} - \frac{1}{(n-1)^2} \cdot \frac{1}{x^{n-1}} + C = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} \left[l(x) + \frac{1}{n-1} \right] + C.$$

Für $n = 1$ ist diese Formel nicht anwendbar, da sonst $n - 1 = 0$ wäre, und auch nicht $\int x^{-n} \partial x = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}$, sondern $= l(x)$ gesetzt werden müsste. Für $\int \frac{l(x)}{x} \partial x$ wird man also im Augenblick den Werth nicht angeben können (vgl. VII).

V. Seyen $\int x^n \sin x \partial x$, $\int x^n \cos x \partial x$ zu bestimmen. Man setze $y = x^n$, $\frac{\partial z}{\partial x} = \begin{cases} \cos x \\ \sin x \end{cases}$,

also $\frac{\partial y}{\partial x} = n x^{n-1}$, $z = \begin{cases} \sin x \\ -\cos x \end{cases}$, und hat:

$$\int x^n \sin x \, \partial x = -x^n \cos x + n \int x^{n-1} \cos x \, \partial x, \int x^n \cos x \, \partial x = x^n \sin x - n \int x^{n-1} \sin x \, \partial x.$$

Daraus folgt, indem man $n-1$ für n setzt:

$$\int x^{n-1} \sin x \, \partial x = -x^{n-1} \cos x + (n-1) \int x^{n-2} \cos x \, \partial x, \int x^{n-1} \cos x \, \partial x = x^{n-1} \sin x - (n-1) \int x^{n-2} \sin x \, \partial x,$$ also

$$\int x^n \sin x \, \partial x = -x^n \cos x + n x^{n-1} \sin x - n(n-1) \int x^{n-2} \sin x \, \partial x,$$

$$\int x^n \cos x \, \partial x = x^n \sin x + n x^{n-1} \cos x - n(n-1) \int x^{n-2} \cos x \, \partial x.$$

Für $n = 1$: $\int x \sin x \, \partial x = -x \cos x + \sin x + C$, $\int x \cos x \, \partial x = x \sin x + \cos x + C$,

so dass allgemein $\int x^n \cos x \, \partial x$ und $\int x^n \sin x \, \partial x$ bestimmt werden können in derselben Weise, wie oben in ähnlichen Fällen. Man hat etwa

$$\int x^2 \sin x \, \partial x = -x^2 \cos x + 2 x \sin x - 2 \int \sin x \, \partial x,$$

$$\int x^3 \sin x \, \partial x = -x^3 \cos x + 3 x^2 \sin x - 3 . 2 \int x \sin x \, \partial x,$$

$$\int x^4 \sin x \, \partial x = -x^4 \cos x + 4 x^3 \sin x - 4 . 3 \int x^2 \sin x \, \partial x, \text{ u. s. w.}$$

VI. Man soll $\int \frac{\partial x}{a^2 + x^2}$ bestimmen. Man setze, gemäss (42), $x = a z$, $z = \frac{x}{a}$, $\frac{\partial x}{\partial z} = a$ und hat $\frac{1}{a^2 + x^2} \frac{\partial x}{\partial z} = \frac{1}{a^2 + a^2 z^2} . a = \frac{1}{a} . \frac{1}{1 + z^2}$, also $\int \frac{\partial x}{a^2 + x^2} = \int \frac{1}{a^2 + x^2} \frac{\partial x}{\partial z} \partial z$ $= \frac{1}{a} \int \frac{\partial z}{1 + z^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arc}(tg = z) = \frac{1}{a} \operatorname{arc}\left(tg = \frac{x}{a}\right)$, so dass

$$\int \frac{\partial x}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arc}\left(tg = \frac{x}{a}\right) + C,$$

wovon man sich durch unmittelbare Differenzirung sehr leicht überzeugen kann.

Setzt man in $\int \cos a x \, \partial x$: $a x = z$, $a \frac{\partial x}{\partial z} = 1$, $\frac{\partial x}{\partial z} = \frac{1}{a}$, so ist $\cos a x . \frac{\partial x}{\partial z} = \cos z . \frac{1}{a}$, also

$$\int \cos a x \, \partial x = \frac{1}{a} \int \cos z \, \partial z = \frac{1}{a} \sin z + C = \frac{1}{a} \sin a x + C.$$

Eben so

$$\int \sin a x \, \partial x = -\frac{1}{a} \cos a x + C, \int \frac{\partial x}{1 + a^2 x^2} = \frac{1}{a} \int \frac{\partial z}{1 + z^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arc}(tg = z) + C = \frac{1}{a} \operatorname{arc}(tg = a x) + C.$$

VII. Um $\int x^{m-1} \sin(a + b x^m) \, \partial x$ zu bestimmen, setze man $a + b x^m = z$, $m b x^{m-1} \frac{\partial x}{\partial z} = 1$, $x^{m-1} \frac{\partial x}{\partial z} = \frac{1}{m b}$, $x^{m-1} \sin(a + b x^m) \frac{\partial x}{\partial z} = \frac{1}{m b} \sin z$, also (42)

$$\int x^{m-1} \sin(a + b x^m) \, \partial x = \frac{1}{m b} \int \sin z \, \partial z = -\frac{\cos z}{m b} + C = -\frac{\cos(a + b x^m)}{m b} + C.$$

Für $\int \sin^2 x \cos x \partial x$ setze man $\sin x = z$, also $\cos x \frac{\partial x}{\partial z} = 1$ und $\sin^2 x \cos x \frac{\partial x}{\partial z} = z^2$, mithin

$$\int \sin^2 x \cos x \partial x = \int z^2 \partial z = \frac{z^3}{3} + C = \frac{\sin^3 x}{3} + C.$$

Diese Gattung von Integralen lässt sich allgemein darstellen. Ist nämlich y eine Funktion von x, so heissen sie

$$\int f(y) \frac{\partial y}{\partial x} \partial x$$

und wenn man die Umformungsformel (42) beachtet, so ist

$$\int f(y) \frac{\partial y}{\partial x} \partial x = \int f(y) \partial y. *$$

So wäre $\int \frac{l(x)}{x} \partial x = \frac{1}{2} l(x)^2 + C$, ($y = l(x)$, vergl. Nr. IV),

$$\int \cos^3 x \sin x \partial x = -\frac{\cos^4 x}{4} + C, \quad (y = -\cos x),$$

$$\int \frac{\text{arc}(\sin = x)}{\sqrt{1-x^2}} \partial x = \frac{1}{2} \text{arc}^2(\sin = x) + C, \quad (y = \text{arc}(\sin = x)), \text{ u. s. w.}$$

VIII. Um $\int \frac{x \partial x}{a^2 + x^2}$ zu bestimmen, sey $a^2 + x^2 = z$, $2x \frac{\partial x}{\partial z} = 1$, $x \frac{\partial x}{\partial z} = \frac{1}{2}$, $\frac{x}{a^2+x^2} \frac{\partial x}{\partial z} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z}$, also

$$\int \frac{x \partial x}{a^2 + x^2} = \frac{1}{2} \int \frac{\partial z}{z} = \frac{1}{2} l(z) + C = \frac{1}{2} l(a^2 + x^2) + C = l\left(\sqrt{a^2 + x^2}\right) + C.$$

Eben so für $\int \frac{\partial x}{x l(x)}$ sey $l(x) = z$, $\frac{1}{x} \frac{\partial x}{\partial z} = 1$, $\frac{1}{x l(x)} \frac{\partial x}{\partial z} = \frac{1}{z}$, also

$$\int \frac{\partial x}{x l(x)} = \int \frac{\partial z}{z} = l(z) + C = l[l(x)] + C.$$

Auch diese Integrale lassen sich allgemeiner darstellen. Ist nämlich z eine Funktion von x, so sind sie

$$\int \frac{h \frac{\partial z}{\partial x} \partial x}{z} = h \int \frac{\partial z}{z} = h\, l(z) + C.$$

So ist $\int \text{tg}\, x \partial x = \int \frac{\sin x}{\cos x} \partial x = -l(\cos x) + C$, ($z = \cos x$, $h = -1$);

$$\int \text{cotg}\, x \partial x = \int \frac{\cos x}{\sin x} \partial x = l(\sin x) + C, \quad (z = \sin x,\ h = 1);$$

$$\int \frac{\partial x}{a + bx} = \frac{1}{b} l(a + bx) + C, \quad \left(z = a + bx,\ h = \frac{1}{b}\right);$$

$$\int \frac{x \partial x}{a + bx^2} = \frac{1}{2b} l(a + bx^2) + C, \quad \left(z = a + bx^2,\ h = \frac{1}{2b}\right) \text{ u. s. w.}$$

IX. In $\int \frac{x \partial x}{\sqrt{a^2 + x^2}}$ sey $a^2 + x^2 = z$, $2x \frac{\partial x}{\partial z} = 1$, $x \frac{\partial x}{\partial z} = \frac{1}{2}$, $\frac{x \frac{\partial x}{\partial z}}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{1}{2\sqrt{z}}$,

---

* Kennt man $\int f(x) \partial x$, so ergibt sich $\int f(y) \partial y$, wenn man x mit y vertauscht.

so ist $$\int \frac{x \partial x}{\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{\partial z}{\sqrt{z}} = \frac{1}{2}\int z^{-\frac{1}{2}} \partial z = z^{\frac{1}{2}} + C = \sqrt{a^2+x^2} + C.$$

Eben so $$\int \frac{x \partial x}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\sqrt{a^2-x^2} + C, \; (z = a^2 - x^2); \int \frac{e^x \partial x}{1+e^{2x}} = \text{arc}(\text{tg} = e^x) + C, \; (z = e^x);$$

$$\int \frac{\cos x}{\sin^2 x} \partial x = -\frac{1}{\sin x} + C, \; (z = \sin x); \int \frac{\sin x}{\cos^2 x} \partial x = \frac{1}{\cos x} + C, \; (z = \cos x);$$

$$\int \frac{\partial x}{x l(x)^m} = -\frac{1}{(m-1) l(x)^{m-1}} + C, \; (z = l(x)), \text{ (vergl. Nr. VII).}$$

X. Um $\int \frac{e^x x \partial x}{(1+x)^2}$ zu bestimmen, sey in (41) $y = e^x x$, $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{(1+x)^2}$, also $\frac{\partial y}{\partial x} = e^x + x e^x = e^x (1+x)$, $z = \int \frac{\partial x}{(1+x)^2} = \int \frac{\partial u}{u^2} (u = 1+x) = -\frac{1}{u} = -\frac{1}{1+x}$, und mithin

$$\int \frac{x e^x \partial x}{(1+x)^2} = -\frac{x e^x}{x+1} + \int \frac{e^x (1+x)}{1+x} \partial x = -\frac{x e^x}{1+x} + \int e^x \partial x = -\frac{x e^x}{1+x} + e^x + C =$$
$$e^x \left(1 - \frac{x}{1+x}\right) + C = \frac{e^x}{1+x} + C.$$

§. 37.

Funktionen von x, welche die Form $a + bx + cx^2 + \ldots$ haben, heissen **ganze Funktionen** von x; der höchste Exponent von x gibt den **Grad** der Funktion an. So ist $12 + 8x^2 - 9x^4 + 7x^6$ eine ganze Funktion von x des sechsten Grades. Seyen nun f(x), F(x) ganze Funktionen von x, so soll es sich um Bestimmung von

$$\int \frac{f(x)}{F(x)} \partial x \qquad (a)$$

handeln. Zunächst ist es nun allgemein genug anzunehmen, f(x) sey von niedererem Grade als F(x). Denn wenn dies nicht der Fall ist, so dividire man mit F(x) in f(x), und erhalte als Quotienten $\varphi(x)$, als Rest $\psi(x)$, wo $\psi(x)$ von niedererem Grade ist als F(x), so ist (39)

$$\int \frac{f(x)}{F(x)} \partial x = \int \varphi(x) \partial x + \int \frac{\psi(x)}{F(x)} \partial x,$$

worin $\varphi(x)$ von der Form $A + Bx + Cx^2 + \ldots$ ist und also integrirt werden kann; mithin das gesuchte Integral auf ein anderes zurückgeführt ist, in welchem der Zähler von niedererem Grade ist als der Nenner. Können wir solche Integrale bestimmen, so können wir überhaupt alle Integrale dieser Gattung bestimmen.

Nun weiss man aus der Analysis („Grundzüge“ S. 138), dass F(x) immer in ein Produkt von reellen Faktoren zerfällt werden kann, die vom ersten oder zweiten Grade sind. Die Faktoren des ersten Grades haben die Form $x + a$, oder $(x+a)^m$ und entsprechen: die erste der reellen Wurzel $-a$ der Gleichung $F(x) = 0$, wenn diese nur einmal vorhanden ist, die zweite

derselben reellen Wurzel $-a$, wenn sie m mal vorkömmt. Die Faktoren zweiten Grades haben die Form $[(x+\alpha)^2+\beta^2]$ oder $[(x+\alpha)^2+\beta^2]^m$ und entsprechen: die erste den beiden imaginären Wurzeln $-\alpha\pm\beta i$, wenn sie nur einfach vorkommen, die zweite denselben imaginären Wurzeln, die jedoch m mal vorkommen.

Daraus folgt, dass man setzen könne:

$$F(x)=c(x+a)\ldots(x+b)^m\ldots[(x+\alpha)^2+\beta^2]\ldots[(x+\gamma)^2+\delta^2]^n\ldots,$$

wo ganz wohl nur Faktoren der einen oder anderen Art vorkommen können; ausser diesen vier Arten aber keine anderen vorkommen, und die Grösse c der Koeffizient der höchsten Potenz von x in F(x) ist. Dies vorausgesetzt, setze man

$$\left.\begin{aligned}\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{A}{x+a}&+\ldots\ldots\ldots\\ &+\frac{B_1}{x+b}+\frac{B_2}{(x+b)^2}+\ldots\ldots+\frac{B_m}{(x+b)^m}\\ &+\ldots\ldots\\ &+\frac{Mx+N}{(x+\alpha)^2+\beta^2}+\ldots\ldots\ldots\\ &+\frac{P_1x+Q_1}{(x+\gamma)^2+\delta^2}+\frac{P_2x+Q_2}{[(x+\gamma)^2+\delta^2]^2}+\ldots\ldots+\frac{P_nx+Q_n}{[(x+\gamma)^2+\delta^2]^n}\\ &+\ldots\ldots\end{aligned}\right\}\quad(b)$$

wo jedem Faktor der Form $x+a$ ein ähnliches Glied wie $\frac{A}{x+a}$, jedem Faktor $(x+b)^m$ eine ähnliche Summe von m Gliedern u. s. w. zugehört. Die Grössen $A,\ldots$; $B_1, B_2,\ldots, B_m,\ldots$; $M, N,\ldots$; $P_1, Q_1,\ldots, P_n, Q_n,\ldots$ sind noch zu bestimmende Konstanten. Man wird sich leicht überzeugen, dass dieselben der Anzahl nach genau eben so viele sind, als der Grad von F(x) ist. Ist man nun im Stande, diese Konstanten so zu bestimmen, dass die Gleichung (b) eine identische wird, d. h. dass sie richtig ist, x mag irgend welchen Werth haben, so kann man statt $\frac{f(x)}{F(x)}$ die Summe der zweiten Seite setzen. Um aber diese Konstanten zu bestimmen, multiplizire man beiderseits mit F(x), so werden dadurch auf der zweiten Seite alle Nenner, da sie sämmtlich in F(x) enthalten sind, wegfallen, und es wird eine ganze Funktion von x zum Vorschein kommen, deren Grad um 1 niedriger ist, als der von F(x), da in einer gewissen Anzahl von Gliedern der zweiten Seite nur je ein Faktor aus F(x) ausfällt. Diese Funktion hat also, wenn man sie nach den Potenzen von x ordnet, genau eben so viele Glieder, als der Grad von F(x) beträgt,* und deren Koeffizienten die zu bestimmenden Konstanten, jedoch alle in der ersten Potenz und nicht mit einander multiplizirt, enthalten; höchstens eben so viele Glieder hat f(x), da diese Funktion von niedererem Grade ist als F(x). Man setze nun in den beiden Seiten dieser

* Die allgemeinste ganze Funktion des vierten Grades: $a+bx+cx^2+dx^3+ex^4$ hat fünf Glieder u. s. w.

Gleichung die Koeffizienten gleich hoher Potenzen von x einander gleich, so erhält man genau eben so viele Gleichungen, als zu bestimmende Konstanten, und kann dieselben also ermitteln. Da nunmehr die Gleichung eine identische ist, d. h. da die beiden Seiten derselben genau dasselbe sind, so ist auch (b) eine identische Gleichung. Einige Beispiele mögen das Verfahren erläutern.

1.) Sey $\frac{7x-5}{x^3+x^2-6x}$ vorgelegt. $x^3+x^2-6x=x(x+3)(x-2)$,

$$\frac{7x-5}{x^3+x^2-6x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+3}+\frac{C}{x-2},$$

$$\begin{aligned}7x-5&=A(x+3)(x-2)+Bx(x-2)+Cx(x+3)\\&=A(x^2+x-6)+B(x^2-2x)+C(x^2+3x)\\&=x^2(A+B+C)+x(A-2B+3C)-6A,\end{aligned}$$

$$A+B+C=0,\ A-2B+3C=7,\ -6A=-5,$$

$$A=\frac{5}{6},\ B=-\frac{26}{15},\ C=\frac{9}{10}:$$

$$\frac{7x-5}{x^3+x^2-6x}=\frac{5}{6x}-\frac{26}{15(x+3)}+\frac{9}{10(x-2)}.$$

2.) $$\frac{5x^3-2}{x^4-8x^3+18x^2-27}=\frac{5x^3-2}{(x-3)^3(x+1)}.\ \text{Also}$$

$$\frac{5x^3-2}{x^4-8x^3+18x^2-27}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{(x-3)^2}+\frac{C}{(x-3)^3}+\frac{D}{x+1},$$

$$\begin{aligned}5x^3-2&=A(x-3)^2(x+1)+B(x-3)(x+1)+C(x+1)+D(x-3)^3\\&=A(x^3-5x^2+3x+9)+B(x^2-2x-3)+C(x+1)+D(x^3-9x^2\\&\quad+27x-27)\\&=x^3[A+D]+x^2[-5A+B-9D]+x[3A-2B+C+27D]+\\&\quad 9A-3B+C-27D,\end{aligned}$$

$$A+D=5,\ -5A+B-9D=0,\ 3A-2B+C+27D=0,\ 9A-3B+C-27D=-2,$$

$$A=\frac{313}{64},\ B=\frac{407}{16},\ C=\frac{133}{4},\ D=\frac{7}{64},$$

$$\frac{5x^3-2}{x^4-8x^3+18x^2-27}=\frac{313}{64(x-3)}+\frac{407}{16(x-3)^2}+\frac{133}{4(x-3)^3}+\frac{7}{64(x+1)}.$$

3.) $$\frac{x^4-3x^3-2x^2+5x+2}{x^5+x^4-2x^3-2x^2+x+1}=\frac{x^4-3x^3-2x^2+5x+2}{(x+1)^3(x-1)^2}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}$$
$$+\frac{C}{(x+1)^3}+\frac{D}{x-1}+\frac{E}{(x-1)^2};$$

$$\begin{aligned}x^4-3x^3-2x^2+5x+2&=A(x+1)^2(x-1)^2+B(x+1)(x-1)^2+C(x-1)^2\\&\quad+D(x+1)^3(x-1)+E(x+1)^3\\&=A(x^4-2x^2+1)+B(x^3-x^2-x+1)+C(x^2-2x+1)\\&\quad+D(x^4+2x^3-2x-1)+E(x^3+3x^2+3x+1)\\&=x^4(A+D)+x^3(B+2D+E)+x^2(-2A-B+C+3E)\\&\quad+x(-B-2C-2D+3E)+A+B+C-D+E;\end{aligned}$$

$$A+D=1,\ B+2D+E=-3,\ -2A-B+C+3E=-2,\ -B-2C-2D+3E=5,$$
$$A+B+C-D+E=2;$$

$$A=\frac{33}{16},\ B=-\frac{5}{4},\ C=-\frac{1}{4},\ D=-\frac{17}{16},\ E=\frac{3}{8};$$

$$\frac{x^4-3x^3-2x^2+5x+2}{x^5+x^4-2x^3-2x^2+x+1}=\frac{33}{16(x+1)}-\frac{5}{4(x+1)^2}-\frac{1}{4(x+1)^3}-\frac{17}{16(x-1)}+\frac{3}{8(x-1)^2}.$$

4.) $$\frac{3x^4-5x^3}{(x^2+4)^2(x-5)}=\frac{Ax+B}{x^2+4}+\frac{Cx+D}{(x^2+4)^2}+\frac{E}{x-5}.$$

$$3x^4-5x^2=(Ax+B)(x^2+4)(x-5)+(Cx+D)(x-5)+E(x^2+4)^2$$
$$=(Ax+B)(x^3-5x^2+4x-20)+(Cx+D)(x-5)+E(x^4+8x^2+16)$$
$$=x^4[A+E]+x^3[-5A+B]+x^2[4A-5B+C+8E]+x[-20A+4B-5C+D]-20B-5D+16E;$$

$A+E=3$, $-5A+B=-5$, $4A-5B+C+8E=0$, $-20A+4B-5C+D=0$, $-20B-5D+16E=0$;

$$A=\frac{1273}{841},\ B=\frac{2160}{841},\ C=-\frac{148}{29},\ D=-\frac{160}{29},\ E=\frac{1250}{841};$$

$$\frac{3x^4-5x^2}{(x^2+4)^2(x-5)}=\frac{1273x+2160}{841(x^2+4)}-\frac{148x+160}{29[x^2+4]^2}+\frac{1250}{841(x-5)}.$$

5.) $$\frac{8x^4-3x^2+5}{(x^2+2x+3)^3x}=\frac{8x^4-3x^2+5}{[(x+1)^2+2]^3x}=\frac{Ax+B}{x^2+2x+3}+\frac{Cx+D}{(x^2+2x+3)^2}+\frac{Ex+F}{(x^2+2x+3)^3}+\frac{G}{x},$$

$$8x^4-3x^2+5=(Ax+B)x(x^2+2x+3)^2+(Cx+D)x(x^2+2x+3)+(Ex+F)x+G(x^2+2x+3)^3$$
$$=(Ax+B)(x^5+4x^4+10x^3+12x^2+9x)+(Cx+D)(x^3+2x^2+3x)+Ex^2+Fx+G(x^6+6x^5+21x^4+44x^3+63x^2+54x+27)$$
$$=x^6(A+G)+x^5(4A+B+6G)+x^4(10A+4B+C+21G)+x^3(12A+10B+2C+D+44G)+x^2(9A+12B+3C+2D+E+63G)+x(9B+3D+F+54G)+27G;$$

$A+G=0$, $4A+B+6G=0$, $10A+4B+C+21G=8$, $12A+10B+2C+D+44G=-3$, $9A+12B+3C+2D+E+63G=0$, $9B+3D+F+54G=0$, $27G=5$;

$$A=-\frac{5}{27},\ B=-\frac{10}{27},\ C=\frac{67}{9},\ D=-\frac{181}{9},\ E=\frac{37}{3},\ F=\frac{161}{3},\ G=\frac{5}{27}.$$

$$\frac{8x^4-3x^2+5}{(x^2+2x+3)^3x}=-\frac{5x+10}{27(x^2+2x+3)}+\frac{67x-181}{9(x^2+2x+3)^2}+\frac{37x+161}{3(x^2+2x+3)^3}+\frac{5}{27x}.$$

§. 38.

Wir haben in §. 37 die einfachste Methode der Bestimmung der Konstanten angegeben, wenigstens in so weit die einfachste, als sie sich wohl zunächst darbietet und meistens auch am schnellsten zum Ziele führt. Wir wollen jedoch hier noch anderer Methoden gedenken, nach denen dieselben bestimmt werden können.

I. Gesetzt $F(x)$ enthalte den Faktor $x+a$ nur einfach, so dass $F(x)=(x+a)\varphi(x)$, wo $\varphi(x)$ eine ganze Funktion von x ist, die nicht Null wird für $x=-a$. Alsdann folgt aus (b):

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{A}{x+a}+\frac{\psi(x)}{\varphi(x)},$$

wo $\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}$ die Summe aller übrigen Brüche vorstellt. Hieraus:

$$f(x)=A\frac{F(x)}{x+a}+\psi(x).(x+a).$$

Setzt man hier $x=-a$, so wird $\frac{F(x)}{x+a}$ zu $\frac{0}{0}$, und es ist der wahre Werth (§. 22) gleich $F'(-a)$, so dass

$$f(-a)=AF'(-a),\ A=\frac{f(-a)}{F'(-a)}.$$

Um das — Zeichen zu vermeiden, setze man $F(x)=(x-a)\varphi(x)$, $\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{A}{x-a}+\ldots.$, und hat

$$A=\frac{f(a)}{F'(a)}. \qquad \text{(c)}$$

II. Es enthalte $F(x)$ den Faktor $(x-a)^m$, d. h. $x=a$ sey mmal Wurzel der Gleichung $F(x)=0$, so dass $F(x)=(x-a)^m \varphi(x)$, wo $\varphi(x)$ nicht den Faktor $x-a$ enthält. Alsdann ist

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{A_m}{(x-a)^m}+\frac{\psi(x)}{\varphi(x)},$$

$$f(x)=A_1\frac{F(x)}{x-a}+A_2\frac{F(x)}{(x-a)^2}+\ldots+A_m\frac{F(x)}{(x-a)^m}+\psi(x)(x-a)^m$$

$$=A_1\varphi(x)(x-a)^{m-1}+A_2\varphi(x)(x-a)^{m-2}+\ldots+A_m\varphi(x)+\psi(x)(x-a)^m.$$

Ferner:

$$\frac{f(x)-A_m\varphi(x)}{x-a}=A_{m-1}\varphi(x)+A_{m-2}(x-a)\varphi(x)+\ldots+A_1\varphi(x)(x-a)^{m-2}$$
$$+\psi(x)(x-a)^{m-1},$$

$$\frac{f(x)-A_m\varphi(x)-A_{m-1}(x-a)\varphi(x)}{(x-a)^2}=A_{m-2}\varphi(x)+\ldots+A_1\varphi(x)(x-a)^{m-3}$$
$$+\psi(x)(x-a)^{m-2},$$
$$\vdots$$

$$\frac{f(x)-A_m\varphi(x)-A_{m-1}(x-a)\varphi(x)-\ldots-A_2(x-a)^{m-2}\varphi(x)}{(x-a)^{m-1}}=A_1\varphi(x)+\psi(x)(x-a).$$

Setzt man in dieser Reihe von Gleichungen nach einander $x=a$, so beachte man, dass in der Regel auf den ersten Seiten die Nenner 0 werden, so dass, weil für $x=a$ auf der zweiten Seite etwas Bestimmtes zum Vorschein kommt, auch der Zähler 0 werden muss (§. 23, Note), und in

$$\frac{f(x)-A_m\varphi(x)-A_{m-1}(x-a)\varphi(x)-\ldots+A_r(x-a)^{m-r}\varphi(x)}{(x-a)^{m-r+1}}$$

für $x=a$ nicht nur Zähler und Nenner 0 werden, sondern auch die $m-r$ ersten Differentialquotienten des Nenners, also nothwendig auch die $m-r$ ersten Differentialquotienten des Zählers, man zu den $m-r+1^{\text{ten}}$ Differentialquotienten gehen muss. Aus §. 10 Formel (19) folgt nun leicht, dass für $x=a$:

$$\frac{\partial^{m-r+1}}{\partial x^{m-r+1}}\left[f(x)-A_m\varphi(x)-A_{m-1}(x-a)\varphi(x)-\ldots-A_r(x-a)^{m-r}\varphi(x)\right]$$
$$=f^{m-r+1}(a)-A_m\varphi^{m-r+1}(a)-A_{m-1}(m-r+1)\varphi^{m-r}(a)-A_{m-2}(m-r+1)$$
$$(m-r)\varphi^{m-r-1}(a)-\ldots-A_r(m-r+1)\ldots 2\varphi'(a),$$

$$\frac{\partial^{m-r+1}(x-a)^{m-r+1}}{\partial x^{m-r+1}}=(m-r+1)(m-r)\ldots 1,$$

Demnach hat man:

$$f(a)=A_m\varphi(a),$$
$$f'(a)-A_m\varphi'(a)=A_{m-2}\varphi'(a),$$

$$\frac{f''(a) - A_m \varphi''(a) - 2A_{m-2}\varphi'(a)}{1.2} = A_{m-2}\varphi(a),$$

$$\frac{f^3(a) - A_m \varphi^3(a) - 3A_{m-1}\varphi''(a) - 3.2A_{m-2}\varphi'(a)}{1.2.3} = A_{m-3}\varphi(a),$$

$$\vdots$$

$$\frac{f^{m-1}(a) - A_m \varphi^{m-1}(a) - (m-1)A_{m-1}\varphi^{m-2}(a) - (m-1)(m-2)A_{m-2}\varphi^{m-3}(a) - \ldots \ldots - (m-1)(m-2)\ldots 2A_2\varphi'(a)}{1.2\ldots(m-1)} = A_1\varphi(a).$$

Nun ist $\varphi(x) = \frac{F(x)}{(x-a)^m}$, $F(x) = (x-a)^m \varphi(x)$,

also nach § 10:

$$F^m(a) = m(m-1)\ldots 1\varphi(a),\ F^{m+1}(a) = (m+1)m\ldots 2\varphi'(a),\ F^{m+2}(a) = (m+2)(m+1)\ldots 3\varphi''(a), \ldots, F^{2m-1}(a) = (2m-1)(m-2)\ldots m\varphi^{m-1}(a).$$

Zieht man hieraus $\varphi(a), \varphi'(a), \ldots, \varphi^{m-1}(a)$ und setzt diese Werthe in obige Gleichungen, so erhält man:

$$\left.\begin{array}{l} m(m-1)\ldots 1f(a) = A_m F^m(a), \\ (m+1)m\ldots 2f'(a) = A_m F^{m+1}(a) + (m+1)A_{m-1}F^m(a), \\ (m+2)(m+1)\ldots 3f''(a) = A_m F^{m+2}(a) + (m+2)A_{m-1}F^{m+1}(a) + (m+2)(m+1) \\ \quad A_{m-2}F^m(a), \\ \vdots \\ (2m-1)(2m-2)\ldots mf^{m-1}(a) = A_m F^{2m-1}(a) + (2m-1)A_{m-1}F^{2m-2}(a) \\ + (2m-1)(2m-2)A_{m-2}F^{2m-3}(a) + \ldots + (2m-1)(2m-2)\ldots(m+1)A_1F^m(a), \end{array}\right\} (c')$$

aus welchen Gleichungen nun $A_m, A_{m-1}, \ldots, A_1$ nach einander gefunden werden.

III. Der Faktor $(x+\alpha)^2+\beta^2$ sey nur einfach in $F(x)$ enthalten, also $F(x) = [(x+\alpha)^2+\beta^2]\varphi(x)$, wo $\varphi(x)$ jenen Faktor nicht enthält. Jetzt ist

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{Mx+N}{(x+\alpha)^2+\beta^2} + \frac{\psi(x)}{\varphi(x)},$$

$$f(x) = (Mx+N)\frac{F(x)}{(x+\alpha)^2+\beta^2} + \psi(x)[(x+\alpha)^2+\beta^2].$$

Nun ist aber $(x+\alpha)^2+\beta^2 = (x+\alpha+\beta i)(x+\alpha-\beta i)$, und wenn man

$$\frac{Mx+N}{(x+\alpha)^2+\beta^2} = \frac{A}{x+\alpha+\beta i} + \frac{B}{x+\alpha-\beta i},$$

also $M = A+B$, $N = (A+B)\alpha - (A-B)\beta i$ setzt, so hat man wieder den Fall I. vor sich, wo $a = -(\alpha \pm \beta i)$ ist. Uebrigens kann man auch ganz direkt verfahren. Setzt man nämlich $x = -\alpha \pm \beta i$, so wird jeweils $\frac{F(x)}{(x+\alpha)^2+\beta^2}$ zu $\frac{0}{0}$ und es ist also:

$$f(-\alpha+\beta i) = \left\{M(-\alpha+\beta i)+N\right\}\frac{F'(-\alpha+\beta i)}{2\beta i},\ f(-\alpha-\beta i) = \left\{-M(\alpha+\beta i)+N\right\}\frac{F'(-\alpha-\beta i)}{-2\beta i},$$

woraus M und N gefunden werden. Man sieht schon, dass diese Formeln nicht mehr bequem sind, und dass dieser Fall noch mehr eintreten würde, wenn F(x) den Faktor $[(x+\alpha)^2+\beta^2]^m$ enthält, so dass wir darüber nichts Weiteres zufügen wollen. — Uebrigens gelten natürlich die Formeln in II. immerhin, wenn auch a imaginär ist. Man kann überhaupt die quadratischen Faktoren vermeiden, wenn man immer $(x+\alpha)^2+\beta^2=[x+\alpha+\beta i][x+\alpha-\beta i]$ setzt, und nun nach I. und II. zerfällt. Kommen dabei auch imaginäre Grössen zum Vorschein, so werden sie sich schliesslich immer aufheben, so dass nur Reelles bleibt.

Anm. Aus der Formel (c) lässt sich ein analytisch interessanter Satz ableiten, den wir noch angeben wollen. Gesetzt nämlich, es bestehe F(x) blos aus den einfachen Faktoren $x-a$, $x-b$, $x-c$, ..., und es sey

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{A}{x-a}+\frac{B}{x-b}+\frac{C}{x-c}+\ldots,$$

so ist $A=\frac{f(a)}{F'(a)}$, $B=\frac{f(b)}{F'(b)}$, $C=\frac{f(c)}{F'(c)}$, ..., also

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{f(a)}{(x-a)F'(a)}+\frac{f(b)}{(x-b)F'(b)}+\frac{f(c)}{(x-c)F'(c)}+\ldots.,$$

Bezeichnet man nun mit $\Sigma\frac{f(x)}{(x-\alpha)F'(x)}$ die Summe $\frac{f(a)}{(a-\alpha)F'(a)}+\frac{f(b)}{(b-\alpha)F'(b)}+\frac{f(c)}{(c-\alpha)F'(c)}+\ldots.$, so ist hiernach

$$\Sigma\frac{f(x)}{(x-\alpha)F'(x)}=-\frac{f(\alpha)}{F(\alpha)}.$$

Speziell für $f(x)=1$:

$$\Sigma\frac{1}{(x-\alpha)F'(x)}=-\frac{1}{F(\alpha)}.$$

Entwickelt man nun die erste Seite nach fallenden Potenzen von α, so hat man

$$\Sigma-\frac{1}{F'(x)}\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{x}{\alpha^2}+\frac{x^2}{\alpha^3}+\ldots.\right),$$

welche Grösse offenbar der nach fallenden Potenzen α entwickelten zweiten Seiten gleich seyn muss. Daraus folgt, dass

$$\Sigma\frac{x^r}{F'(x)}$$

gleich ist dem Koeffizienten von $\frac{1}{\alpha^{r+1}}$ in der Reihe, die entsteht, wenn man $\frac{1}{F(\alpha)}$ nach fallenden Potenzen entwickelt. Dabei bezeichnet $\Sigma\frac{x^r}{F'(x)}$ die Summe derjenigen Werthe, welche man erhält, wenn man in $\frac{x^r}{F'(x)}$ für x die sämmtlichen Wurzeln der Gleichung $F(x)=0$ setzt, vorausgesetzt, dass diese Gleichung nur einfache Wurzeln habe.

§. 39.

Hat man in einer oder der andern Weise die einzelnen Brüche bestimmt, in welche der Bruch $\frac{f(x)}{F(x)}$ zerlegt werden kann, so wird man statt des Integrals $\int\frac{f(x)}{F(x)}\partial x$ Integrale erhalten, welche eine der folgenden vier Formen haben:

$$\int\frac{A\,\partial x}{x+a},\ \int\frac{B\,\partial x}{(x+a)^m},\ \int\frac{Mx+N}{(x+\alpha)^2+\beta^2}\partial x,\ \int\frac{Px+Q}{[(x+\alpha)^2+\beta^2]^m}\partial x.$$

Was nun die Integration dieser vier Formen anbelangt, so ist, wenn man (§. 36) setzt $x+a=z$, $\frac{\partial x}{\partial z}=1$:

$$\int\frac{A\,\partial x}{x+a}=\int\frac{A}{x+a}\frac{\partial x}{\partial z}\partial z=\int\frac{A}{z}\partial z=A\int\frac{\partial z}{z}=A\,l(z)=A\,l(x+a);\qquad\text{(a)}$$

$$\int\frac{B\,\partial x}{(x+a)^m}=\int\frac{B}{(x+a)^m}\frac{\partial x}{\partial z}\partial z=\int\frac{B}{z^m}\partial z=B\int z^{-m}\partial z=\frac{Bz^{-m+1}}{-m+1}$$

$$=-\frac{B}{(m-1)z^{m-1}}=-\frac{B}{(m-1)(x+a)^{m-1}}.\qquad\text{(b)}$$

Ferner ist

$$\int\frac{Mx+N}{(x+\alpha)^2+\beta^2}\partial x=\int\frac{M(x+\alpha)+N-M\alpha}{(x+\alpha)^2+\beta^2}\partial x=M\int\frac{x+\alpha}{(x+\alpha)^2+\beta^2}\partial x+$$
$$(N-M\alpha)\int\frac{\partial x}{(x+\alpha)^2+\beta^2}.$$

Sey nun $(x+\alpha)^2+\beta^2=z$, $2(x+\alpha)\frac{\partial x}{\partial z}=1$, $(x+\alpha)\frac{\partial x}{\partial z}=\frac{1}{2}$, so ist

$$\int\frac{(x+\alpha)\partial x}{(x+\alpha)^2+\beta^2}=\int\frac{x+\alpha}{(x+\alpha)^2+\beta^2}\frac{\partial x}{\partial z}\partial z=\frac{1}{2}\int\frac{\partial z}{z}=\frac{1}{2}l[(x+\alpha)^2+\beta^2].$$

Ist ferner $x+\alpha=\beta z$, $\frac{\partial x}{\partial z}=\beta$, so ist

$$\int\frac{\partial x}{(x+\alpha)^2+\beta^2}=\int\frac{1}{(x+\alpha)^2+\beta^2}\frac{\partial x}{\partial z}\partial z=\int\frac{1}{\beta^2z^2+\beta^2}\beta\,\partial z=\frac{1}{\beta}\int\frac{\partial z}{z^2+1}=\frac{1}{\beta}\operatorname{arc}(tg=z)$$
$$=\frac{1}{\beta}\operatorname{arc}\left(tg=\frac{x+\alpha}{\beta}\right),$$

so dass $$\int\frac{Mx+N}{(x+\alpha)^2+\beta^2}\partial x=\frac{M}{2}l[(x+\alpha)^2+\beta^2]+\frac{N-M\alpha}{\beta}\operatorname{arc}\left(tg=\frac{x+\alpha}{\beta}\right).\qquad\text{(c)}$$

Ferner hat man

$$\int\frac{Px+Q}{[(x+\alpha)^2+\beta^2]^m}\partial x=\int\frac{P(x+\alpha)+Q-P\alpha}{[(x+\alpha)^2+\beta^2]^m}\partial x=P\int\frac{(x+\alpha)\partial x}{[(x+\alpha)^2+\beta^2]^m}+$$
$$(Q-P\alpha)\int\frac{\partial x}{[(x+\alpha)^2+\beta^2]^m}.$$

Man setze nun $(x+\alpha)^2+\beta^2=z$, $2(x+\alpha)\frac{\partial x}{\partial z}=1$, $(x+\alpha)\frac{\partial x}{\partial z}=\frac{1}{2}$, so hat man

$$\int\frac{(x+\alpha)\partial x}{[(x+\alpha)^2+\beta^2]^m}=\int\frac{x+\alpha}{[(x+\alpha)^2+\beta^2]^m}\frac{\partial x}{\partial z}\partial z=\frac{1}{2}\int\frac{\partial z}{z^m}=-\frac{1}{2(m-1)z^{m-1}}$$
$$=-\frac{1}{2(m-1)[(x+\alpha)^2+\beta^2]^{m-1}}.$$

Setzt man ferner $x+\alpha=\beta z$, $\frac{\partial x}{\partial z}=\beta$, so ist

$$\int\frac{\partial x}{[(x+\alpha)^2+\beta^2]^m}=\int\frac{1}{[(x+\alpha)^2+\beta^2]^m}\frac{\partial x}{\partial z}\partial z=\int\frac{1}{[\beta^2z^2+\beta^2]^m}\beta\,\partial z=\frac{1}{\beta^{2m-1}}\int\frac{\partial z}{(z^2+1)^m},$$

so dass es sich um das Integral $\int\frac{\partial z}{(z^2+1)^m}$ handelt. Man beachte nun, dass

$$\frac{1}{(z^2+1)^m} = \frac{1}{(z^2+1)^{m-1}} - \frac{z^2}{(1+z^2)^m}, \quad \int\frac{\partial z}{(z^2+1)^m} = \int\frac{\partial z}{(z^2+1)^{m-1}} - \int\frac{z^2\partial z}{(z^2+1)^m}$$

ist, und setze, um das letzte Integral zu ermitteln in der Formel (§. 36):

$$\int u\frac{\partial v}{\partial z}\partial z = uv - \int v\frac{\partial u}{\partial z}\partial z$$

jetzt $u=z$, $\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{z}{(1+z^2)^m}$, woraus $\frac{\partial u}{\partial z} = 1$, $v = \int\frac{z\partial z}{(1+z^2)^m} = -\frac{1}{2(m-1)(1+z^2)^{m-1}}$ (für $1+z^2=y$ nach §. 36, Formel (42)), so ist

$$\int\frac{z^2\partial z}{(z^2+1)^m} = -\frac{z}{2(m-1)(1+z^2)^{m-1}} + \frac{1}{2(m-1)}\int\frac{\partial z}{(z^2+1)^{m-1}},$$

mithin

$$\int\frac{\partial z}{(z^2+1)^m} = \frac{z}{2(m-1)(z^2+1)^{m-1}} + \left(1-\frac{1}{2m-2}\right)\int\frac{\partial z}{(z^2+1)^{m-1}},$$

d. h.

$$\int\frac{\partial z}{(z^2+1)^m} = \frac{z}{2(m-1)(z^2+1)^{m-1}} + \frac{2m-3}{2m-2}\int\frac{\partial z}{(z^2+1)^{m-1}}, \qquad \text{(d)}$$

welche Formel zur Bestimmung des betreffenden Integrals hinreicht. Sie gibt, wenn man $m-1$, $m-2$, ... für m setzt:

$$\int\frac{\partial z}{(z^2+1)^{m-1}} = \frac{z}{2(m-2)(z^2+1)^{m-2}} + \frac{2m-5}{2m-4}\int\frac{\partial z}{(z^2+1)^{m-2}},$$

$$\int\frac{\partial z}{(z^2+1)^{m-2}} = \frac{z}{2(m-3)(z^2+1)^{m-3}} + \frac{2m-7}{2m-6}\int\frac{\partial z}{(z^2+1)^{m-3}}, \ldots$$

$$\int\frac{\partial z}{(z^2+1)^2} = \frac{z}{2.1(z^2+1)} + \frac{1}{2}\int\frac{\partial z}{z^2+1},$$

so dass

$$\int\frac{\partial z}{(z^2+1)^m} = \frac{z}{2(z^2+1)^{m-1}}\left[\frac{1}{m-1} + \frac{2m-3}{2m-2}\cdot\frac{z^2+1}{m-2} + \frac{(2m-3)(2m-5)}{(2m-2)(2m-4)}\,\frac{(z^2+1)^2}{m-3} + \right.$$

$$\left.\ldots + \frac{(2m-3)(2m-5)\ldots\ldots 3}{(2m-2)(2m-5)\ldots\ldots 4}\,\frac{(z^2+1)^{m-2}}{1}\right] + \frac{(2m-3)(2m-5)\ldots\ldots 1}{(2m-2)(2m-4)\ldots\ldots 2}\,\text{arc}\,(\text{tg} = z).$$

Setzt man hier $z = \frac{x+\alpha}{\beta}$, so ist $z^2+1 = \frac{(x+\alpha)^2+\beta^2}{\beta^2}$, $\frac{z}{(z^2+1)^{m-1}} = \frac{\beta^{2m-3}(x+\alpha)}{[(x+\alpha)^2+\beta^2]^{m-1}}$, und wenn man zurücksetzt, so ergibt sich schliesslich:

$$\int\frac{Px+Q}{[(x+\alpha)^2+\beta^2]^m}\partial x = -\frac{P}{2(m-1)[(x+\alpha)^2+\beta^2]^{m-1}} + \frac{Q-P\alpha}{2\beta^2}\,\frac{x+\alpha}{[(x+\alpha)^2+\beta^2]^{m-1}}$$

$$\left[\frac{1}{m-1} + \frac{2m-3}{2m-2}\cdot\frac{(x+\alpha)^2+\beta^2}{(m-2)\beta^2} + \frac{(2m-3)(2m-5)}{(2m-2)(2m-4)}\cdot\frac{[(x+\alpha)^2+\beta^2]^2}{(m-3)\beta^4} + \ldots\ldots\ldots\right.$$

$$\left.+\frac{(2m-3)(2m-5)\ldots 3}{(2m-2)(2m-4)\ldots 4}\cdot\frac{[(x+\alpha)^2+\beta^2]^{m-2}}{\beta^{2m-4}}\right] + \frac{Q-P\alpha}{\beta^{2m-1}}\cdot\frac{(2m-3)(2m-5)\ldots\ldots 1}{(2m-2)(2m-4)\ldots\ldots 2}$$

$$\text{arc}\left(\text{tg} = \frac{x+\alpha}{\beta}\right). \qquad \text{(e)}$$

So ist also (§. 37):

$$\int\frac{8x^4-3x^2+5}{(x^2+2x+3)^3 x}\partial x = -\frac{5}{27}\int\frac{x+2}{x^2+2x+3}\partial x + \frac{1}{9}\int\frac{67x-181}{(x^2+2x+3)^2}\partial x +$$

$$\frac{1}{3}\int\frac{37x+161}{(x^2+2x+3)^3}\partial x + \frac{5}{27}\int\frac{\partial x}{x}.$$

Da ferner $x^2+2x+3=(x+1)^2+2$, so ist $\alpha=1$, $\beta=\sqrt{2}$, also nach (c) und (e):

$$\int\frac{x+2}{x^2+2x+3}\partial x=\frac{1}{2}l(x^2+2x+3)+\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arc}\left(tg=\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right),$$

$$\int\frac{67x-181}{(x^2+2x+3)^2}\partial x=-\frac{67}{2[x^2+2x+3]}-\frac{62(x+1)}{x^2+2x+3}-\frac{62}{\sqrt{2}}\operatorname{arc}\left(tg=\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right),$$

$$\int\frac{37x+161}{(x^2+2x+3)^3}\partial x=-\frac{37}{4(x^2+2x+3)^2}+\frac{31(x+1)}{(x^2+2x+3)^2}\left[\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\,\frac{x^2+2x+3}{2}\right]+$$
$$\frac{31}{\sqrt{2}}\cdot\frac{3.1}{4.2}\operatorname{arc}\left(tg=\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right),\quad\int\frac{\partial x}{x}=l(x).$$

Demnach

$$\int\frac{8x^4-3x^2+5}{(x^2+2x+3)^3x}\partial x=-\frac{5}{27}l\left(\frac{\sqrt{x^2+2x+3}}{x}\right)-\frac{5}{27\sqrt{2}}\operatorname{arc}\left(tg=\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)-\frac{1}{9}$$
$$\cdot\frac{191+124x}{2(x^2+2x+3)}-\frac{62}{9\sqrt{2}}\operatorname{arc}\left(tg=\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)+\frac{1}{3}\,\frac{25+62x}{4(x^2+2x+3)^2}+\frac{31(x+1)}{8(x^2+2x+3)}+\frac{31}{8\sqrt{2}}$$
$$\operatorname{arc}\left(tg=\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)=-\frac{5}{27}l\left(\frac{\sqrt{x^2+2x+3}}{x}\right)-\frac{485+217x}{72(x^2+2x+3)}+\frac{25+62x}{12(x^2+2x+3)^2}$$
$$-\frac{691}{216\sqrt{2}}\operatorname{arc}\left(tg=\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)+C.$$

Eben so

$$\int\frac{x^4-3x^3-2x^2+5x+2}{x^5-x^4-2x^3-2x^2+x+1}\partial x=\frac{33}{16}l(x+1)+\frac{5}{4(x+1)}+\frac{1}{8(x+1)^2}-\frac{17}{16}l(x-1)$$
$$-\frac{3}{8(x-1)}+C.$$

Zur Uebung mögen etwa dienen:

$$\int\frac{(x^3+1)\partial x}{x^4-3x^3+3x^2-x}=-\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{x-1}+2l(x-1)-l(x)+C,\quad(x^4-3x^3+3x^2-x$$
$$=(x-1)^3x),$$

$$\int\frac{\partial x}{x^8+x^7-x^4-x^3}=-\frac{5x^2+2x-2}{4x^2(x+1)}+\frac{1}{8}l\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)+l\left(\frac{x+1}{x}\right)-\frac{1}{4}\operatorname{arc}(tg=x)$$
$$+C,\quad(x^8+x^7-x^4-x^3=x^3(x^2+1)(x+1)^2(x-1)),$$

$$\int\frac{x^4\partial x}{1+3x}=\frac{1}{12}x^4-\frac{1}{27}x^3+\frac{1}{54}x^2+\frac{1}{81}x+\frac{1}{243}l\left(\frac{3x+1}{3}\right)+C.$$

Sobald nunmehr ein Integral auf die hier betrachtete Form reduzirt ist, so kann es als bestimmt angesehen werden, da wir im Vorstehenden alle möglichen Fälle erledigt haben.

Von den Formen, die ganz unmittelbar auf die vorstehende zurückgeführt werden können, gehören zunächst diejenigen hieher, die Potenzen mit negativen oder Bruchexponenten enthalten. So wird das Integral

$$\int\frac{ax+bx^{-3}+cx^5}{mx^{-2}+nx+px^{-6}}\partial x$$

unmittelbar die frühere Form annehmen, indem man Zähler und Nenner mit x^6 multiplizirt. Eben so wird das Integral

$$\int\frac{a\sqrt{x}+b\sqrt[3]{x}+cx}{e\sqrt[4]{x}+f\sqrt{x}+g\sqrt[3]{x}}\partial x,$$

wenn man $x=z^{12}$, also $\frac{\partial x}{\partial z}=12z^{11}$ setzt, werden:

$$12\int\frac{az^6+bz^4+cz^{12}}{ez^3+fz^6+gz^4}z^{11}\partial z=12\int\frac{az^2+b+cz^8}{e+fz^3+gz}z^{12}\partial z,$$

und hat nun die frühere Form. Wie man sich in andern ähnlichen Fällen zu helfen hat, ist hiernach leicht zu übersehen.

§. 40.

Auf die in den vorstehenden §§. näher betrachtete Form lassen sich nun leicht diejenigen Integrale bringen, die ausser ganzen Potenzen von x noch die Grösse $\sqrt{a+bx+cx^2}$ enthalten. Ein solches Integral wäre etwa:

$$\int\frac{5x^2+3\sqrt{a+bx+cx^2}}{7x-12\sqrt{(a+bx+cx^2)^3}}\partial x.$$

Wir setzen dabei voraus, dass ausser dieser Grösse keine andere ähnlicher Art mehr in dem Integrale vorkomme. Dabei müssen wir drei Fälle unterscheiden.

I. $c=0$, d. h. die vorkommende Quadratwurzel ist bloss $\sqrt{a+bx}$. Man setze nun (§. 36):

$$\sqrt{a+bx}=z,\ a+bx=z^2,\ b\frac{\partial x}{\partial z}=2z,\ \frac{\partial x}{\partial z}=\frac{2z}{b},\ x=\frac{z^2-a}{b},$$

so wird das Integral nach z bloss Potenzen von z enthalten. Käme übrigens $\sqrt[n]{a+bx}$ vor, so hätte man zu setzen

$$\sqrt[n]{(a+bx)}=z,\ a+bx=z^n,\ x=\frac{z^n-a}{b},\ \frac{\partial x}{\partial z}=\frac{nz^{n-1}}{b}.$$

Sey z. B. $\int\frac{\partial x}{\sqrt{a+bx}}$ zu integriren, so ist

$$\int\frac{\partial x}{\sqrt{a+bx}}=\int\frac{1}{\sqrt{a+bx}}\frac{\partial x}{\partial z}\partial z=\frac{2}{b}\int\frac{z}{z}\partial z=\frac{2}{b}z+C=\frac{2\sqrt{a+bx}}{b}+C.$$

Eben so

$$\int x\sqrt{a+bx}\,\partial x=\int x\sqrt{a+bx}\frac{\partial x}{\partial z}\partial z=\frac{2}{b^2}\int(z^2-a)z^2\partial z=\frac{2}{b^2}\left(\frac{z^5}{5}-\frac{az^3}{3}\right)+C$$

$$=\frac{2}{b^2}\left[\frac{1}{5}\sqrt{(a+bx)^5}-\frac{a}{3}\sqrt{(a+bx)^3}\right]+C.$$

$$\int\sqrt[3]{a+bx}\,\partial x=\frac{3}{b}\int z^3\partial x=\frac{3z^4}{4b}+C=\frac{3\sqrt[3]{(a+bx)^4}}{4b}+C.$$

II. $c>0$. Man setze

$$\sqrt{a+bx+cx^2}=z-x\sqrt{c},\ a+bx+cx^2=z^2-2zx\sqrt{c}+cx^2,\ a+bx=z^2-2zx\sqrt{c},$$

$$x=\frac{z^2-a}{b+2z\sqrt{c}},\ \frac{\partial x}{\partial z}=\frac{2(z^2\sqrt{c}+bz+a\sqrt{c})}{(b+2z\sqrt{c})^2},\ z=x\sqrt{c}+\sqrt{a+bx+cx^2},\ \sqrt{a+bx+cx^2}$$

$$=z-\frac{z^2-a}{b+2z\sqrt{c}}\sqrt{c}=\frac{bz+z^2\sqrt{c}+a\sqrt{c}}{b+2z\sqrt{c}},$$ so wird das Integral auf die Form in §. 37 zurückkommen.

Also z. B. für $c>0$:

$$\int\frac{\partial x}{\sqrt{a+bx+cx^2}}=\int\frac{1}{\sqrt{a+bx+cx^2}}\frac{\partial x}{\partial z}\partial z=2\int\frac{b+2z\sqrt{c}}{bz+z^2\sqrt{c}+a\sqrt{c}}\cdot\frac{z^2\sqrt{c}+bz+a\sqrt{c}}{(b+2z\sqrt{c})^2}\partial z$$

$$=2\int\frac{\partial z}{b+2z\sqrt{c}}=\frac{1}{\sqrt{c}}l(b+2z\sqrt{c})+C=\frac{1}{\sqrt{c}}l[b+2cx+2\sqrt{c(a+bx+cx^2)}]+C.$$

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{1+x^2}} = \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \frac{\partial x}{\partial z} \partial z = \int \frac{2z}{z^2+1} \cdot \frac{2(z^2+1)}{4z^2} \partial z = \int \frac{\partial z}{z} = l(z) + C = l[x + \sqrt{1+x^2}]$$
$+ C.$

III. $c < 0$, d. h. c negativ. Setzt man, um dies deutlich zu machen, $-c$ für c, so dass man im Integral die Grösse $\sqrt{a+bx-cx^2}$ hat, wo nun $c > 0$, so beachte man, dass

$$a+bx-cx^2 = -c\left[x^2 - \frac{bx}{c} - \frac{a}{c}\right] = -c\left[\left(x - \frac{b}{2c}\right)^2 - \frac{b^2+4ac}{4c^2}\right],$$

woraus folgt, dass wenn nicht b^2+4ac positiv ist, sicherlich $a+bx-cx^2$ für alle möglichen Werthe von x negativ, also $\sqrt{a+bx-cx^2}$ imaginär ist, so dass nothwendig $b^2+4ac > 0$, weil imaginäre Grössen in den Integralen, wie man sie zu betrachten hat, nicht vorkommen. Alsdann ist

$$\left(x - \frac{b}{2c}\right)^2 - \frac{b^2+4ac}{4c^2} = \left[x - \frac{b}{2c} + \sqrt{\frac{b^2+4ac}{4c^2}}\right]\left[x - \frac{b}{2c} - \sqrt{\frac{b^2+4ac}{4c^2}}\right],$$

so dass, wenn zur Abkürzung

$$-\frac{b}{2c} + \sqrt{\frac{b^2+4ac}{4c^2}} = \alpha, \quad -\frac{b}{2c} - \sqrt{\frac{b^2+4ac}{4c^2}} = \beta,$$

man setzen kann

$$a+bx-cx^2 = -c(x+\alpha)(x+\beta),$$

wo begreiflich die etwa anzuwendenden Werthe von x so sind, dass $-c(x+\alpha)(x+\beta)$ positiv ausfällt. Man setze nun

$$\sqrt{a+bx-cx^2} = (x+\alpha)z\sqrt{c}, \quad a+bx-cx^2 = cz^2(x+\alpha)^2,$$

d. h. $$-c(x+\alpha)(x+\beta) = cz^2(x+\alpha)^2, \quad -(x+\beta) = z^2(x+\alpha),$$

$$x = -\frac{\alpha z^2+\beta}{1+z^2}, \quad \frac{\partial x}{\partial z} = \frac{2(\beta-\alpha)z}{(1+z^2)^2}, \quad \sqrt{a+bx-cx^2} = z\sqrt{c}\left(\alpha - \frac{\alpha z^2+\beta}{1+z^2}\right) = \frac{(\alpha-\beta)z\sqrt{c}}{1+z^2},$$

$$z = \frac{\sqrt{a+bx-cx^2}}{(x+\alpha)\sqrt{c}} = \sqrt{\frac{-(x+\beta)}{x+\alpha}},$$

wodurch man die gewünschte Form erhält.

Als Beispiele wählen wir:

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{a+bx-cx^2}} = \int \frac{1}{\sqrt{a+bx-cx^2}} \frac{\partial x}{\partial z} \partial z = \frac{2(\beta-\alpha)}{\alpha-\beta} \int \frac{1+z^2}{z\sqrt{c}} \cdot \frac{z}{(1+z^2)^2} \partial z =$$
$$-\frac{2}{\sqrt{c}} \int \frac{\partial z}{1+z^2} = -\frac{2}{\sqrt{c}} \operatorname{arc}(\operatorname{tg} = z) + C = -\frac{2}{\sqrt{c}} \operatorname{arc}\left(\operatorname{tg} = \sqrt{\frac{-(x+\beta)}{x+\alpha}}\right) + C.$$

$\int \frac{\partial x}{\sqrt{5x-3x^2}}$ gibt $\alpha = -\frac{5}{6} + \sqrt{\frac{25}{36}} = 0$, $\beta = -\frac{5}{6} - \sqrt{\frac{25}{36}} = -\frac{5}{3}$, also das

$$\text{Integral} = -\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arc}\left(\operatorname{tg} = \sqrt{\frac{\frac{5}{3} - x}{x}}\right) + C = -\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arc}\left(\operatorname{tg} = \sqrt{\frac{5-3x}{3x}}\right)$$
$+ C.$

Anm. Beispiele zur Uebung werden wir nunmehr selten vorlegen, da die Integraltafeln deren in Menge liefern, und man des praktischen Gebrauchs wegen doch anrathen muss, sich solche zu verschaffen. Man besitzt in der deutschen Literatur solche von Meier Hirsch, Sohncke, Schubert, Minding u. s. w. Für uns genügt es nun, die Formeln aufzustellen, und an ein paar Beispielen zu zeigen, wie sie zu gebrauchen sind.



§. 41.

Bereits in §. 36 haben wir mehrfach Gelegenheit gehabt, sogenannte Reduktionsformeln zu entwickeln, vermittelst welcher ein Integral auf ein anderes ähnlicher Art zurückgeführt wird; diese Reduktionsformeln spielen überhaupt in der Integralrechnung eine wichtige Rolle und wir werden nun vielfach Gelegenheit haben, solche zu bilden. Zunächst soll dies der Fall seyn für das Integral

$$\int x^m (ax^n+b)^r \partial x,$$

welches man ein „binomisches“ zu nennen pflegt. Setzt man in der Formel (41) des §. 36:

$$y=(ax^n+b)^r,\ \frac{\partial z}{\partial x}=x^m \text{ also } \frac{\partial y}{\partial x}=anr(ax^n+b)^{r-1}x^{n-1},\ z=\frac{x^{m+1}}{m+1},$$

so ist

$$\int x^m (ax^n+b)^r \partial x=\frac{x^{m+1}(ax^n+b)^r}{m+1}-\frac{anr}{m+1}\int x^{m+n}(ax^n+b)^{r-1}\partial x. \quad \text{(a)}$$

Beachtet man, dass $x^{m+n}=x^m x^n=x^m\left[\frac{ax^n+b}{a}-\frac{b}{a}\right]$, so ist

$$\int x^{m+n}(ax^n+b)^{r-1}\partial x=\int\left[x^m\frac{(ax^n+b)}{a}(ax^n+b)^{r-1}-\frac{b}{a}x^m(ax^n+b)^{r-1}\right]\partial x$$
$$=\frac{1}{a}\int x^m(ax^n+b)^r\partial x-\frac{b}{a}\int x^m(ax^n+b)^{r-1}\partial x,$$

also in (a):

$$\int x^m(ax^n+b)^r\partial x=\frac{x^{m+1}(ax^n+b)^r}{m+1}-\frac{nr}{m+1}\int x^m(ax^n+b)^r\partial x+\frac{nrb}{m+1}\int x^m(ax^n+b)^{r-1}\partial x,$$

woraus

$$\left(1+\frac{nr}{m+1}\right)\int x^m(ax^n+b)^r\partial x=\frac{x^{m+1}(ax^n+b)^r}{m+1}+\frac{nrb}{m+1}\int x^m(ax^n+b)^{r-1}\partial x,$$

mithin da $1+\frac{nr}{m+1}=\frac{m+nr+1}{m+1}$, so ist, wenn man beiderseitig durch diese Grösse dividirt:

$$\int x^m(ax^n+b)^r\partial x=\frac{x^{m+1}(ax^n+b)^r}{m+nr+1}+\frac{nrb}{m+nr+1}\int x^m(ax^n+b)^{r-1}\partial x. \quad \text{(b)}$$

Setzt man $r+1$ an die Stelle von r, was man, da r beliebig ist, sicherlich kann, so erhält man:

$$\int x^m(ax^n+b)^{r+1}\partial x=\frac{x^{m+1}(ax^n+b)^{r+1}}{m+nr+n+1}+\frac{nb(r+1)}{m+nr+n+1}\int x^m(ax^n+b)^r\partial x,$$

woraus unmittelbar folgt:

$$\int x^m(ax^n+b)^r\partial x=-\frac{x^{m+1}(ax^n+b)^{r+1}}{nb(r+1)}+\frac{m+nr+n+1}{nb(r+1)}\int x^m(ax^n+b)^{r+1}\partial x. \quad \text{(c)}$$

Setzt man in der Formel (a) an die Stelle von m und r: $m-n$ und $r+1$, so hat man:

$$\int x^{m-n}(ax^n+b)^{r+1}\partial x=\frac{x^{m-n+1}(ax^n+b)^{r+1}}{m-n+1}-\frac{an(r+1)}{m-n+1}\int x^m(ax^n+b)^r\partial x,$$

woraus

$$\int x^m (ax^n+b)^r \partial x = \frac{x^{m-n+1}(ax^n+b)^{r+1}}{an(r+1)} - \frac{m-n+1}{an(r+1)} \int x^{m-n}(ax^n+b)^{r+1}\partial x. \qquad \text{(d)}$$

Da nun. $x^{m-n}(ax^n+b)^{r+1} = x^{m-n}(ax^n+b)(ax^n+b)^r = ax^m (ax^n+b)^r + bx^{m-n}(ax^n+b)^r$, so ist

$$\int x^m (ax^n+b)^r \partial x = \frac{x^{m-n+1}(ax^n+b)^{r+1}}{an(r+1)} - \frac{m-n+1}{n(r+1)} \int x^m (ax^n+b)^r \partial x - \frac{b(m-n+1)}{an(r+1)} \int x^{m-n}(ax^n+b)^r \partial x,$$

woraus folgt $\left(1+\frac{m-n+1}{n(r+1)}\right)\int x^m (ax^n+b)^r \partial x = \frac{x^{m-n+1}(ax^n+b)^{r+1}}{an(r+1)} - \frac{b(m-n-1)}{an(r+1)} \int x^{m-n}(ax^n+b)^r \partial x,$

und da $1+\frac{m-n+1}{n(r+1)} = \frac{m+nr+1}{n(r+1)}$, so folgt hieraus

$$\int x^m (ax^n+b)^r \partial x = \frac{x^{m-n+1}(ax^n+b)^{r+1}}{a(m+nr+1)} - \frac{b(m-n+1)}{a(m+nr+1)} \int x^{m-n}(ax^n+b)^r \partial x. \qquad \text{(e)}$$

Setzt man in der Formel (e) $m+n$ an die Stelle von m, so erhält man

$$\int x^{m+n}(ax^n+b)^r \partial x = \frac{x^{m+1}(ax^n+b)^{r+1}}{a(m+n+nr+1)} - \frac{b(m+1)}{a(m+n+nr+1)} \int x^m (ax^n+b)^r \partial x.$$

woraus dann folgt

$$\int x^m (ax^n+b)^r \partial x = \frac{x^{m+1}(ax^n+b)^{r+1}}{b(m+1)} - \frac{a(m+nr+n+1)}{b(m+1)} \int x^{m+n}(ax^n+b)^r \partial x. \qquad \text{(f)}$$

Die sechs Formeln (a)—(f) sind nun die gesuchten Reduktionsformeln. Sie haben die Eigenschaft:

die erste: m zu erhöhen, r zu erniedrigen,
„ zweite: m nicht zu ändern, r zu erniedrigen,
„ dritte: m nicht zu ändern, r zu erhöhen,
„ vierte: m zu erniedrigen, r zu erhöhen,
„ fünfte: m zu erniedrigen, r nicht zu ändern,
„ sechste: m zu erhöhen, r nicht zu ändern.

Man wird leicht einsehen, dass dieselben in allen Fällen, m und r mögen positiv oder negativ seyn, genügen, um das vorgelegte Integral auf ein einfacheres derselben Art zu reduziren. Die obigen Reduktionsformeln sind übrigens nicht anwendbar, wenn:

$$m+1=0, \quad m+nr+1=0, \quad r+1=0,$$

da in diesen Fällen die Nenner zu 0 werden. Diese drei Fälle müssen also besonders erledigt werden.

1.) Sey $m+1=0$, also $m=-1$, so ist das vorgelegte Integral

$$\int \frac{(ax^n+b)^r \partial x}{x}.$$

Ist nun r eine ganze (positive oder negative) Zahl, so gehört das Integral zu den in §. 37 näher betrachteten; sey also r allgemeiner ein Bruch $=\frac{\beta}{\alpha}$, so dass das vorgelegte Integral gleich

$$\int \frac{(ax^n+b)^{\frac{\beta}{\alpha}} \partial x}{x}$$

ist. Man setze nun $ax^n+b=z^\alpha$, also $x=\left(\frac{z^\alpha-b}{a}\right)^{\frac{1}{n}}$, $\frac{\partial x}{\partial z}=\frac{1}{n}\left(\frac{z^\alpha-b}{a}\right)^{\frac{1}{n}-1}$

$\frac{\alpha z^{\alpha-1}}{a}=\frac{\alpha}{na}z^{\alpha-1}\left(\frac{z^\alpha-b}{a}\right)^{\frac{1}{n}-1}$, $(ax^n+b)^{\frac{\beta}{\alpha}}=z^\beta$, so ist (§. 36):

$$\int \frac{(ax^n+b)^{\frac{\beta}{\alpha}} \partial x}{x}=\frac{\alpha}{na}\int \frac{z^\beta z^{\alpha-1}\left(\frac{z^\alpha-b}{a}\right)^{\frac{1}{n}-1}}{\left(\frac{z^\alpha-b}{a}\right)^{\frac{1}{n}}}\partial z=\frac{\alpha}{na}\int \frac{z^{\alpha+\beta-1}}{\frac{z^\alpha-b}{a}}\partial z=$$

$$\frac{\alpha}{n}\int \frac{z^{\alpha+\beta-1}\partial z}{z^\alpha-b},$$

welches Integral nun wieder zu §. 37 gehört und also nach der dortigen Weise erledigt werden kann, da β und α ganze Zahlen sind. Schliesslich ist dann $z=(ax^n+b)^{\frac{1}{\alpha}}$. Ist r eine ganze Zahl, so sey $\beta=r$, $\alpha=1$, und $ax^n+b=z$, wodurch dann

$$\int \frac{(ax^n+b)^r \partial x}{x}=\frac{1}{n}\int \frac{z^r \partial z}{z-b}.$$

2.) Sey $r+1=0$, $r=-1$, also das vorgelegte Integral

$$\int \frac{x^m \partial x}{ax^n+b},$$

so kann es immer leicht auf die Form des §. 37 gebracht werden. (§. 39.)

3.) Sey endlich $m+nr+1=0$, so setze man (§. 36), wenn $r=\frac{\beta}{\alpha}$:

$ax^n+b=x^n z^\alpha$, $x=\left(\frac{b}{z^\alpha-a}\right)^{\frac{1}{n}}=b^{\frac{1}{n}}(z^\alpha-a)^{-\frac{1}{n}}$, $\frac{\partial x}{\partial z}=-\frac{\alpha b^{\frac{1}{n}} z^{\alpha-1}}{n}(z^\alpha-a)^{-\frac{1}{n}-1}$,

$(ax^n+b)^r=x^{nr}z^\beta=\frac{b^r}{(z^\alpha-a)^r}z^\beta$, $x^m=\frac{b^{\frac{m}{n}}}{(z^\alpha-a)^{\frac{m}{n}}}$, also

$$\int x^m(ax^n+b)^{\frac{\beta}{\alpha}}\partial x=-\int \frac{b^{\frac{m}{n}}}{(z^\alpha-a)^{\frac{m}{n}}}\cdot\frac{b^r}{(z^\alpha-a)^r}z^\beta\cdot\frac{\alpha b^{\frac{1}{n}}}{n}z^{\alpha-1}(z^\alpha-a)^{-\frac{1}{n}-1}\partial z=$$

$$-\frac{\alpha}{n}b^{\frac{m+1}{n}+r}\int z^{\alpha+\beta-1}(z^\alpha-a)^{-\left(\frac{m+1}{n}+1+r\right)}\partial z.$$

Da aber $m+nr+1=0$, so ist $\frac{m+1}{n}+r=0$, $\frac{m+1}{n}+1+r=1$, also

$$\int x^m(ax^n+b)^{\frac{\beta}{\alpha}}\partial x = -\frac{\alpha}{n}\int\frac{z^{\alpha+\beta-1}}{z^\alpha - a}\partial z,$$

welch letzteres Integral direkt zu denen in §. 37 gehört. Schliesslich ist $z=\left(\frac{ax^n+b}{x^n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$. Für ein ganzes r ist $\beta=r$, $\alpha=1$, also

$$\int x^m(ax^n+b)^r\partial x = -\frac{1}{n}\int\frac{z^r\partial z}{z-a},\ z=\frac{ax^n+b}{x^n}.$$

Einige Beispiele mögen das Verfahren erläutern.

I. Sey $\int\frac{x^5\partial x}{\sqrt{a^2-x^2}}$ zu bestimmen. Hier ist $m=5$, $r=-\frac{1}{2}$, $n=2$, $a=-1$, $b=a^2$, und also; wenn man m erniedrigen will, nach Formel (e):

$$\int\frac{x^5\partial x}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{x^4(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}}{5}+\frac{4a^2}{5}\int\frac{x^3}{\sqrt{a^2-x^2}}\partial x.$$

Auf das letzte Integral wendet man dieselbe Formel an, in der $m=3$ ist, und hat

$$\int\frac{x^3}{\sqrt{a^2-x^2}}\partial x = -\frac{x^2(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}}{3}+\frac{2a^2}{3}\int\frac{x\partial x}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

Das jetzt noch vorkommende Integral ist bereits in §. 36. IX bestimmt, gleich $-\sqrt{a^2-x^2}$, so dass

$$\int\frac{x^5\partial x}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\sqrt{a^2-x^2}\left[\frac{x^4}{5}+\frac{4a^2x^2}{15}+\frac{8a^4}{15}\right]+C.$$

II. Um $\int\frac{\partial x}{x^5\sqrt{a^2-x^2}}$ zu ermitteln, wird man die Formel (f) anwenden und finden:

$$\int\frac{\partial x}{x^5\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{x^{-4}(a^2-x)^{\frac{1}{2}}}{4a^2}+\frac{3}{4a^2}\int\frac{\partial x}{x^3\sqrt{a^2-x^2}},$$

$$\int\frac{\partial x}{x^3\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{x^{-2}(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}}{2a^2}+\frac{1}{2a^2}\int\frac{\partial x}{x\sqrt{a^2-x^2}}.$$

Um das letzte zu bestimmen, sey $\sqrt{a^2-x^2}=z$, $a^2-x^2=z^2$, $x^2=a^2-z^2$, $x\frac{\partial x}{\partial z}=-z$, $\frac{1}{x}\frac{\partial x}{\partial z}=-\frac{z}{x^2}=\frac{-z}{a^2-z^2}$, also

$$\int\frac{\partial x}{x\sqrt{a^2-x^2}}=\int\frac{1}{x}\frac{\partial x}{\partial z}\cdot\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\partial z=\int\frac{-z}{a^2-z^2}\cdot\frac{1}{z}\partial z=\int\frac{\partial z}{z^2-a^2}=-\frac{1}{2a}\int\frac{\partial z}{a+z}$$

$$+\frac{1}{2a}\int\frac{\partial z}{z-a}=\frac{1}{2a}l(z-a)-\frac{1}{2a}l(z+a)=\frac{1}{2a}l\left(\frac{\sqrt{a^2-x^2}-a}{\sqrt{a^2-x^2}+a}\right),$$

und also

$$\int\frac{\partial x}{x^5\sqrt{a^2-x^2}}=-\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{4a^2}\left[\frac{1}{x^4}+\frac{3}{2a^2x^2}\right]+\frac{3}{16a^5}l\left(\frac{\sqrt{a^2-x^2}-a}{\sqrt{a^2-x^2}+a}\right)+C.$$

III. Man soll $\int \frac{x^8 \partial x}{(2x^3+3)^5}$ ermitteln. Nach Formel (c), worin $m=8$, $n=3$, $r=-5$, $a=2$, $b=3$:

$$\int \frac{x^8 \partial x}{(2x^3+3)^5} = \frac{x^9(2x^3+3)^{-4}}{36} + \frac{1}{12}\int \frac{x^8 \partial x}{(2x^3+3)^4},$$

$$\int \frac{x^8 \partial x}{(2x^3+3)^4} = \frac{x^9(2x^3+3)^{-3}}{27}, \; (m=8, n=3, r=-4, a=2, b=3, m+nr+n+1=0),$$

also

$$\int \frac{x^8 \partial x}{(2x^3+3)^5} = \frac{x^9}{9(2x^3+3)^4}\left[\frac{1}{4} + \frac{2x^3+3}{36}\right] + C.$$

IV. Man soll $\int \frac{x^3 \partial x}{\sqrt{1+x^8}}$ bestimmen. Hier ist $m=3$, $n=8$, $r=-\frac{1}{2}$, also $m+nr+1=0$, so dass nach Nr. 3:

$$1+x^8 = x^8 z^2, \; x^8 = \frac{1}{z^2-1}, \; x = \frac{1}{(z^2-1)^{\frac{1}{8}}} = (z^2-1)^{-\frac{1}{8}}, \; \frac{\partial x}{\partial z} = -\frac{1}{4} z (z^2-1)^{-\frac{9}{8}}, \; \sqrt{1+x^8}$$

$$= x^4 z = \frac{z}{(z^2-1)^{\frac{1}{2}}}, \int \frac{x^3 \partial x}{\sqrt{1+x^8}} = -\frac{1}{4}\int \frac{(z^2-1)^{-\frac{3}{8}}(z^2-1)^{\frac{1}{2}}}{z}(z^2-1)^{-\frac{9}{8}} z \, \partial z = -\frac{1}{4}\int \frac{\partial z}{z^2-1},$$

und da (§. 38):

$$\frac{1}{z^2-1} = \frac{1}{2(z-1)} - \frac{1}{2(z+1)},$$

so ist

$$\int \frac{x^3 \partial x}{\sqrt{1+x^3}} = -\frac{1}{8} l(z-1) + \frac{1}{8} l(z+1) + C = \frac{1}{8} l\left(\frac{z+1}{z-1}\right) + C = \frac{1}{8}\left(\frac{\sqrt{1+x^8}+x^4}{\sqrt{1+x^2}-x^4}\right)$$
$+ C$,

und da $\frac{\sqrt{1+x^8}+x^4}{\sqrt{1+x^8}-x^4} = (\sqrt{1+x^8}+x^4)^2$, so ist auch

$$\int \frac{x^3 \partial x}{\sqrt{1+x^8}} = \frac{1}{4} l(x^4 + \sqrt{1+x^8}) + C.$$

V. Auf die hier betrachtete Integralform kommt zunächst das Integral

$$\int (ax+b)^m (a'x+b')^r \partial x$$

zurück. Setzt man nämlich $ax+b=z$, $x=\frac{z-b}{a}$, $\frac{\partial x}{\partial z}=\frac{1}{a}$, so ist

$$\int (ax+b)^m (a'x+b')^r \partial x = \frac{1}{a}\int z^m \left(\frac{a'z}{a} + b' - \frac{ba'}{a}\right)^r \partial z,$$

welches Integral zu der in diesem §. betrachteten Gattung gehört.

Dessgleichen lässt sich das Integral

$$\int (a+bx+cx^2)^r \partial x$$

auf dieselbe Form reduziren. Da nämlich

$$a+bx+cx^2 = c\left[x^2 + \frac{b}{c}x + \frac{a}{c}\right] = c\left[\left(x+\frac{b}{2c}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4c^2}\right],$$

so setze man

$$x + \frac{b}{2c} = z, \; \frac{\partial x}{\partial z} = 1, \; x = z - \frac{b}{2c},$$

und hat

$$\int (a+bx+cx^2)^r \partial x = c^r \int \left(z^2 + \frac{4ac-b^2}{4c^2}\right)^r \partial z,$$

welches Integral zu den oben betrachteten $(m=0)$ gehört.

VI. Für das Integral

$$\int x^m (a+bx+cx^2)^r \partial x$$

lässt sich direkt eine Rekursionsformel entwickeln. Setzt man in der Formel (41) des §. 36:

$$y=(a+bx+cx^2)^r, \quad \frac{\partial z}{\partial x}=x^m, \quad \frac{\partial y}{\partial x}=r(a+bx+cx^2)^{r-1}(b+2cx), \quad z=\frac{x^{m+1}}{m+1},$$

so ist

$$\int x^m (a+bx+cx^2)^r \partial x=\frac{x^{m+1}(a+bx+cx^2)^r}{m+1}-\frac{rb}{m+1}\int x^{m+1}(a+bx+cx^2)^{r-1}\partial x$$
$$-\frac{2cr}{m+1}\int x^{m+2}(a+bx+cx^2)^{r-1}\partial x, \qquad \text{(g)}$$

vermöge welcher Formel das vorgelegte Integral auf zwei andere derselben Art zurückgeführt ist. Setzt man zur Abkürzung $a+bx+cx^2=X$; ferner $r+1$ für r, $m-2$ für m, so folgt aus (g):

$$\int x^{m-2}X^{r+1}\partial x=\frac{x^{m-1}X^{r+1}}{m-1}-\frac{(r+1)b}{m-1}\int x^{m-1}X^r\partial x-\frac{2c(r+1)}{m-1}\int x^m X^r \partial x,$$

und da $\int x^{m-2}X^{r+1}\partial x=\int x^{m-2}X^r(a+bx+cx^2)\partial x=a\int x^{m-2}X^r\partial x+b\int x^{m-1}X^r\partial x$ $+c\int x^m X^r\partial x$, so ergibt sich aus vorstehender Gleichung leicht:

$$\int x^m X^r \partial x=\frac{x^{m-1}X^{r+1}}{(m+2r+1)c}-\frac{b(m+r)}{c(m+2r+1)}\int x^{m-1}X^r\partial x-\frac{a(m-1)}{c(m+2r+1)}\int x^{m-2}X^r\partial x. \qquad \text{(h)}$$

Setzt man hier $m+2$ für m, so zieht man auch daraus:

$$\int x^m X^r\partial x=\frac{x^{m+1}X^{r+1}}{(m+1)a}-\frac{b(m+r+2)}{a(m+1)}\int x^{m+1}X^r\partial x-\frac{c(m+2r+3)}{a(m+1)}\int x^{m+2}X^r\partial x. \qquad \text{(i)}$$

Ist m eine positive ganze Zahl, so kommt nach (h) das Integral $\int x^m X^r \partial x$ schliesslich auf $\int x X^r \partial x$ und $\int X^r \partial x$ zurück; ist m eine negative ganze Zahl dagegen auf $\int \frac{X^r}{x}\partial x$ und $\int X^r \partial x$. Von diesen Integralen ist $\int X^r \partial x$ bereits in V. erledigt. Ferner aus (h) für $m=1$:

$$\int x X^r \partial x=\frac{X^{r+1}}{2(r+1)c}-\frac{b(r+1)}{2c(r+1)}\int X^r\partial x=\frac{X^{r+1}}{2(r+1)c}-\frac{b}{2c}\int X^r\partial x. \qquad \text{(k)}$$

so dass auch dieses Integral als erledigt anzusehen ist.

Ferner ist

$$\int\frac{X^r}{x}\partial x=\int\frac{X^{r-1}(a+bx+cx^2)}{x}\partial x=a\int\frac{X^{r-1}}{x}\partial x+b\int X^{r-1}\partial x+c\int xX^{r-1}\partial x,$$

oder da

$$\int xX^{r-1}\partial x=\frac{X^r}{2rc}-\frac{b}{2c}\int X^{r-1}\partial x:$$

$$\int\frac{X^r}{x}\partial x=\frac{X^r}{2r}+a\int\frac{X^{r-1}}{x}\partial x+\frac{b}{2}\int X^{r-1}\partial x, \qquad \text{(l)}$$

vermöge welcher Formel das zu erledigende Integral auf ein anderes derselben Art zurückgeführt ist. Setzt man in (l) $-r+1$ für r, so erhält man:

$$\int \frac{\partial x}{x X^{r-1}} = \frac{-1}{2(r-1)X^{r-1}} + a\int \frac{\partial x}{x X^r} + \frac{b}{2}\int \frac{\partial x}{X^r},$$

$$\int \frac{\partial x}{x X^r} = \frac{1}{2(r-1)aX^{r-1}} - \frac{b}{2a}\int \frac{\partial x}{X^r} + \frac{1}{a}\int \frac{\partial x}{x X^{r-1}}. \qquad (m)$$

Diese Formeln genügen, um die sämmtlichen Integrale der angegebenen Art zu reduziren. (Vergleiche auch §. 45. III.)

§. 42.

Das Integral

$$\int \sin^m x \cos^n x \,\partial x$$

lässt sich leicht auf die Form in §. 41 reduziren, wenn man setzt $\cos x = z$; doch ist es besser, die Reduktionsformeln für dasselbe unmittelbar abzuleiten. Setzt man in der Formel (41) des §. 36:

$$y = \sin^{m-1} x,\quad \frac{\partial z}{\partial x} = \cos^n x \sin x,\quad \frac{\partial y}{\partial x} = (m-1)\sin^{m-2} x \cos x,\quad z = -\frac{\cos^{n+1} x}{n+1},$$

so ist $$\int \sin^m x \cos^n x \,\partial x = -\frac{\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{n+1} + \frac{m-1}{n+1}\int \sin^{m-2} x \cos^{n+2} x \,\partial x. \qquad (a)$$

Beachtet man, dass $\sin^{m-2} x \cos^{n+2} x = \sin^{m-2} x \cos^n x \cos^2 x = \sin^{m-2} x \cos^n x (1 - \sin^2 x) = \sin^{m-2} x \cos^n x - \sin^m x \cos^n x$, so gibt die Gleichung (a):

$$\int \sin^m x \cos^n x \,\partial x = -\frac{\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{n+1} + \frac{m-1}{n+1}\int \sin^{m-2} x \cos^n x \,\partial x - \frac{m-1}{n+1}\int \sin^m x \cos^n \partial x,$$

woraus sich ergibt:

$$\int \sin^m x \cos^n x \,\partial x = -\frac{\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n}\int \sin^{m-2} x \cos^n x \,\partial x. \qquad (b)$$

Setzt man hier $m+2$ an die Stelle von m, so ergibt sich leicht:

$$\int \sin^m x \cos^n x \,\partial x = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n+1} x}{m+1} + \frac{m+n+2}{m+1}\int \sin^{m+2} x \cos^n x \,\partial x. \qquad (c)$$

Hätte man anfänglich gesetzt $y = \cos^{n-1} x$, $\frac{\partial z}{\partial x} = \sin^m x \cos x$, $\frac{\partial y}{\partial x} = -(n-1)\cos^{n-2} x \sin x$, $z = \frac{\sin^{m+1} x}{m+1}$, so hätte man:

$$\int \sin^m x \cos^n x \,\partial x = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1}\int \sin^{m+2} x \cos^{n-2} x \,\partial x, \qquad (d)$$

woraus, da $\sin^{m+2} x \cos^{n-2} x = \sin^m x (1 - \cos^2 x) \cos^{n-2} x = \sin^m x \cos^{n-2} x - \sin^m x \cos^n x$, folgt:

$$\int \sin^m x \cos^n x \,\partial x = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n}\int \sin^m x \cos^{n-2} x \,\partial x, \qquad (e)$$

und endlich, wenn man $n+2$ statt n setzt:

$$\int \sin^m x \cos^n x \,\partial x = -\frac{\sin^{m+1} x \cos^{n+1} x}{n+1} + \frac{m+n+2}{n+1}\int \sin^m x \cos^{n+2} x \,\partial x. \qquad (f)$$

Für den Fall, dass m und n ganze (positive oder negative) Zahlen sind, führen diese Formeln schliesslich auf:

$$\int \partial x,\ \int \cos x\, \partial x,\ \int \sin x\, \partial x,\ \int \frac{\sin x}{\cos x}\partial x,\ \int \frac{\cos x\, \partial x}{\sin x},\ \int \frac{\partial x}{\sin x},\ \int \frac{\partial x}{\cos x},\ \int \frac{\partial x}{\sin x \cos x}.$$

Aber $\int \partial x = x$, $\int \cos x \partial x = \sin x$, $\int \sin x \partial x = -\cos x$ (§. 35), $\int \frac{\sin x}{\cos x}\partial x = -l(\cos x)$, $\int \frac{\cos x \partial x}{\sin x} = l(\sin x)$ (§. 36), so dass bloss die letzten drei Integrale zu bestimmen bleiben. Nun ist

$$\int \frac{\partial x}{\sin x \cos x} = \int \frac{\partial x}{\operatorname{tg} x \cos^2 x} = \int \frac{\partial z}{z} (z = \operatorname{tg} x) = l(z) = l(\operatorname{tg} x);$$

also
$$\int \frac{\partial x}{\sin x} = \frac{1}{2}\int \frac{\partial x}{\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \int \frac{\partial z}{\sin z \cos z} \left(\frac{x}{2} = z\right) = l(\operatorname{tg} z) = l\left(\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right),$$

$$\int \frac{\partial x}{\cos x} = -\int \frac{\partial z}{\sin z} \left(x = \frac{\pi}{2} - z\right) = -l(\operatorname{tg}\frac{1}{2} z) = -l\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}x\right)\right] = l\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}x\right)\right]$$

da $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}x\right) = \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}x\right)$ und $l \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}x\right) = -l \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$.

Die Integrale $\int \operatorname{tg}^m x \partial x$, $\int \operatorname{cotg}^n \partial x$ können gleichfalls nach diesen Formeln reduzirt werden.

Aus (a) oder (d) nämlich folgt (für $n = -m$, oder $m = -n$):

$$\int \operatorname{tg}^m x \partial x = \frac{\operatorname{tg}^{m-1} x}{m-1} - \int \operatorname{tg}^{m-2} x \partial x,$$

$$\int \operatorname{cotg}^n x \partial x = \frac{-\operatorname{cotg}^{n-1} x}{n-1} - \int \operatorname{cotg}^{n-2} x \partial x.$$

Wenn man will, so können als besonders zu benützende Formeln aufgestellt werden:

$$\int \sin^m x \partial x = -\frac{\sin^{m-1} x \cos x}{m} + \frac{m-1}{m}\int \sin^{m-2} x \partial x,$$

$$\int \sin^m x \partial x = \frac{\sin^{m+1} x \cos x}{m+1} + \frac{m+2}{m+1}\int \sin^{m+2} x \partial x,$$

$$\int \cos^n x \partial x = \frac{\sin x \cos^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x \partial x,$$

$$\int \cos^n x \partial x = -\frac{\sin x \cos^{n+1} x}{n+1} + \frac{n+2}{n+1}\int \cos^{n+2} x \partial x.$$

Beispiele hiezu liefern die Integraltafeln in Menge.

§. 43.

I. Die Integrale der Form

$$\int f(l(x))\frac{\partial x}{x},\ \int f(e^x)e^x \partial x,\ \int f(\cos x)\sin x \partial x,\ \int f(\sin x)\cos x \partial x,\ \ldots .$$

wo f ein beliebiges Funktionszeichen, kommen auf $\int f(z)\partial z$ zurück, wenn

man setzt $z = l(x)$, e^x, $\cos x$, $\sin x, \ldots$; das Integral $\int f(e^x)\partial x$ wird für $e^x = z$, $x = l(z)$, $\frac{\partial x}{\partial z} = \frac{1}{z}$, zu $\int \frac{f(z)\partial z}{z}$ u. s. w.

II. Gesetzt ferner, es sey P eine Funktion von x, so dass man $\int P\partial x$ nach den bisherigen Methoden ermitteln könne, und sey $\int P\partial x = Q$; ferner z eine Funktion von x, so dass, wenn man

$$\int Q\frac{\partial z}{\partial x}\partial x = R, \int R\frac{\partial z}{\partial x}\partial x = S, \ldots\ldots,$$

setzt, R, S, ... bekannte Funktionen von x sind, so ist nach §. 36:

$$\int Pz^n\partial x = Qz^n - n\int Qz^{n-1}\frac{\partial z}{\partial x}\partial x,$$

$$\int Qz^{n-1}\frac{\partial z}{\partial x}\partial x = Rz^{n-1} - (n-1)\int Rz^{n-2}\frac{\partial z}{\partial x}\partial x,$$

$$\int Rz^{n-2}\frac{\partial z}{\partial x}\partial x = Sz^{n-2} - (n-2)\int Sz^{n-3}\frac{\partial z}{\partial x}\partial x,$$

$$\vdots$$

also $\int Pz^n\partial x$ bestimmbar.

Sey z. B. $P = 1$, $z = l(x)$, $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{x}$, so ist

$$Q = x,\ R = x,\ S = x, \ldots\ldots$$

also $$\int l(x)^n\partial x = x\,[l(x)^n - n\,l(x)^{n-1} + n(n-1)\,l(x)^{n-2} - \ldots \pm n(n-1)\ldots\ldots 2\,l(x) \mp n(n-1)\ldots 1]\ (\S.\ 36).$$

Sey weiter $P = 1$, $z = \text{arc}(\sin x)$, also $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\int P\partial x = x = Q$, $R = \int\frac{x\partial x}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2}$, $S = -\int\partial x = -x$, $T = \sqrt{1-x^2}, \ldots\ldots$, also

$$\int(\text{arc}(\sin = x))^n\partial x = x\,\text{arc}(\sin = x)^n - n\int Q\frac{\partial z}{\partial x}z^{n-1}\partial x,$$

$$\int Q\frac{\partial z}{\partial x}z^{n-1}\partial x = -\sqrt{1-x^2}\,\text{arc}(\sin = x)^{n-1} - (n-1)\int Rz^{n-2}\frac{\partial z}{\partial x}\partial x,$$

$$\vdots$$

also endlich $$\int \text{arc}(\sin = x)^n\,\partial x = \text{arc}(\sin = x)^n\left[x + \frac{n\sqrt{1-x^2}}{\text{arc}(\sin = x)} - \frac{n(n-1)x}{\text{arc}(\sin = x)^2} - \frac{n(n-1)(n-2)\sqrt{1-x^2}}{\text{arc}(\sin = x)^3} + \ldots\right] + C.$$

III. Setzt man in der Formel (41) des §. 36: $y = e^{ax}$, $\frac{\partial z}{\partial x} = \cos bx$ oder $\sin bx$, also $\frac{\partial y}{\partial x} = a\,e^{ax}$ $z = \frac{\sin bx}{b}$ oder $-\frac{\cos bx}{b}$, so ist

$$\int e^{ax}\cos bx\,\partial x = \frac{e^{ax}\sin bx}{b} - \frac{a}{b}\int e^{ax}\sin bx\,\partial x,$$

$$\int e^{ax}\sin bx\,\partial x = -\frac{e^{ax}\cos bx}{b} + \frac{a}{b}\int e^{ax}\cos bx\,\partial x.$$

Setzt man in jede dieser Gleichungen auf der zweiten Seite den Werth des betreffenden Integrals aus der andern, so hat man:

$$\int e^{ax}\cos bx\,\partial x = \frac{e^{ax}\sin bx}{b} + \frac{a e^{ax}\cos bx}{b^2} - \frac{a^2}{b^2}\int e^{ax}\cos bx\,\partial x,$$

$$\int e^{ax}\sin bx\,\partial x = -\frac{e^{ax}\cos bx}{b} + \frac{a e^{ax}\sin bx}{b^2} - \frac{a^2}{b^2}\int e^{ax}\sin bx\,\partial x,$$

woraus ganz unmittelbar folgt:

$$\int e^{ax}\cos bx\,\partial x = \frac{e^{ax}(b\sin bx + a\cos bx)}{a^2+b^2} + C,$$

$$\int e^{ax}\sin bx\,\partial x = \frac{e^{ax}(a\sin bx - b\cos bx)}{a^2+b^2} + C.$$

IV. Für die Integrale $\int e^{ax}\sin^n x\,\partial x$, $\int e^{ax}\cos^n x\,\partial x$ ergeben sich ebenfalls leicht Reduktionsformeln.

Setzt man nämlich $y = \sin^n x$, $\frac{\partial z}{\partial x} = e^{ax}$, $\frac{\partial y}{\partial x} = n\sin^{n-1}x\cos x$, $z = \frac{e^{ax}}{a}$, so ist

$$\int e^{ax}\sin^n x\,\partial x = \frac{e^{ax}\sin^n x}{a} - \frac{n}{a}\int \sin^{n-1}x\cos x\, e^{ax}\,\partial x,$$

und wenn $y = \sin^{n-1}x\cos x$, $\frac{\partial z}{\partial x} = e^{ax}$, $\frac{\partial y}{\partial x} = (n-1)\sin^{n-2}x\cos^2 x - \sin^n x$

$= (n-1)\sin^{n-2}x(1-\sin^2 x) - \sin^n x = (n-1)\sin^{n-2}x - n\sin^n x$, $z = \frac{e^{ax}}{a}$:

$$\int e^{ax}\sin^{n-1}x\cos x\,\partial x = \frac{e^{ax}\sin^{n-1}x\cos x}{a} - \frac{n-1}{a}\int e^{ax}\sin^{n-2}x\,\partial x + \frac{n}{a}\int e^{ax}\sin^n x\,\partial x,$$

also:

$$\int e^{ax}\sin^n x\,\partial x = \frac{e^{ax}\sin^{n-1}x}{a^2}(a\sin x - n\cos x) + \frac{n(n-1)}{a^2}\int e^{ax}\sin^{n-2}x\,\partial x - \frac{n^2}{a^2}\int e^{ax}\sin^n x\,\partial x,$$

woraus $$\int e^{ax}\sin^n x\,\partial x = \frac{e^{ax}\sin^{n-1}x(a\sin x - n\cos x)}{a^2+n^2} + \frac{n(n-1)}{a^2+n^2}\int e^{ax}\sin^{n-2}x\,\partial x.$$

Eben so $$\int e^{ax}\cos^n x\,\partial x = \frac{e^{ax}\cos^{n-1}x(a\cos x + n\sin x)}{a^2+n^2} + \frac{n(n-1)}{a^2+n^2}\int e^{ax}\cos^{n-2}x\,\partial x.$$

Für positive ganze n führen diese Formeln schliesslich auf $\int e^{ax}\cos x\,\partial x$, $\int e^{ax}\sin x\,\partial x$, $\int e^{ax}\partial x$: Das letzte Integral ist $\frac{e^{ax}}{a}$, die zwei ersten ergeben sich durch die Formeln für $n = 1$:

$$\int e^{ax}\sin x\,\partial x = \frac{e^{ax}(a\sin x - \cos x)}{a^2+1} + C,$$

$$\int e^{ax}\cos x\,\partial x = \frac{e^{ax}(a\cos x + \sin x)}{a^2+1} + C. \quad \text{(Nr. III).}$$

Die Integrale $\int e^{ax}\sin^n bx\,\partial x$, $\int e^{ax}\cos^n bx\,\partial x$ werden, wenn $bx = z$, $\frac{\partial x}{\partial z} = \frac{1}{b}$ zu:

$$\frac{1}{b}\int e^{\frac{a}{b}z}\sin^n z\,\partial z,\quad \frac{1}{b}\int e^{\frac{a}{b}z}\cos^n z\,\partial z$$

und haben obige Form wieder. Setzt man oben $-n+2$ für n, so hat man:

$$\int\frac{e^{ax}\partial x}{\sin^{n-2}x}=\frac{e^{ax}(a\sin x+(n-2)\cos x)}{\sin^{n-1}x(a^2+(n-2)^2)}+\frac{(n-2)(n-1)}{a^2+(n-2)^2}\int\frac{e^{ax}}{\sin^n x}\partial x,$$

$$\int\frac{e^{ax}\partial x}{\cos^{n-2}x}=\frac{e^{ax}(a\cos x-(n-2)\sin x)}{\cos^{n-1}x(a^2+(n-2)^2)}+\frac{(n-2)(n-1)}{a^2+(n-2)^2}\int\frac{e^{ax}}{\cos^n x}\partial x,$$

woraus

$$\int\frac{e^{ax}}{\sin^n x}\partial x=-\frac{e^{ax}[a\sin x+(n-2)\cos x]}{(n-2)(n-1)\sin^{n-1}x}+\frac{a^2+(n-2)^2}{(n-2)(n-1)}\int\frac{e^{ax}\partial x}{\sin^{n-2}x},$$

$$\int\frac{e^{ax}}{\cos^n x}\partial x=-\frac{e^{ax}[a\cos x-(n-2)\sin x]}{(n-2)(n-1)\cos^{n-1}x}+\frac{a^2+(n-2)^2}{(n-2)(n-1)}\int\frac{e^{ax}\partial x}{\cos^{n-2}x}.$$

Für $n=2$ und $n=1$ sind diese Formeln nicht anwendbar.

V. Für die Integrale $\int x^m\sin x\,\partial x$, $\int x^m\cos x\,\partial x$ erhält man eben so

$$\int x^m\sin x\,\partial x=-x^m\cos x+m\int x^{m-1}\cos x\,\partial x,$$

$$\int x^m\cos x\,\partial x=x^m\sin x-m\int x^{m-1}\sin x\,\partial x,$$

wodurch immer eines dieser Integrale auf das andere reduzirt ist, was genügt. Setzt man hier $-m+1$ für m, so zieht man daraus:

$$\int\frac{\cos x}{x^m}\partial x=\frac{-\cos x}{(m-1)x^{m-1}}-\frac{1}{m-1}\int\frac{\sin x\,\partial x}{x^{m-1}},$$

$$\int\frac{\sin x}{x^m}\partial x=\frac{-\sin x}{(m-1)x^{m-1}}+\frac{1}{m-1}\int\frac{\cos x\,\partial x}{x^{m-1}}.$$

Die End-Integrale bei diesen Reduktionsformeln sind:

$$\int\sin x\,\partial x,\ \int\cos x\,\partial x,\ \int\frac{\sin x}{x}\partial x,\ \int\frac{\cos x}{x}\partial x,$$

von denen die zwei letzten nicht weiter angegeben werden können. (§. 36. V.)

Als Beispiel wollen wir das Integral $\int x^4\cos x\,\partial x$ wählen. Man hat:

$$\int x^4\cos x\,\partial x=x^4\sin x-4\int x^3\sin x\,\partial x,\ \int x^3\sin x\,\partial x=-x^3\cos x+3\int x^2\cos x\,\partial x,$$

$$\int x^2\cos x\,\partial x=x^2\sin x-2\int x\sin x\,\partial x,$$

$$\int x\sin x\,\partial x=-x\cos x+\int\cos x\,\partial x,\ \int\cos x\,\partial x=\sin x,\ \text{also:}$$

$$\int x^4\cos x\,\partial x=x^4\sin x+4x^3\cos x-12x^2\sin x-24x\cos x+24\sin x+C.$$

§. 44.

I. Wir wollen setzen

$$\int\frac{f+g\cos x}{(a+b\cos x)^n}\partial x=\frac{A\sin x}{(a+b\cos x)^{n-1}}+\int\frac{B+C\cos x}{(a+b\cos x)^{n-1}}\partial x,\qquad\text{(a)}$$

wo A, B, C noch zu bestimmende Grössen sind. Hieraus folgt durch Differentiation:

$$\frac{f+g\cos x}{(a+b\cos x)^n}=\frac{A.[\cos x(a+b\cos x)+(n-1)b\sin^2 x]}{(a+b\cos x)^n}+\frac{B+C\cos x}{(a+b\cos x)^{n-1}},$$

d. h. wenn man $\sin^2 x=1-\cos^2 x$ setzt:

$$f+g\cos x=(n-1)bA+Ba+(Aa+Ca+Bb)\cos x+(Ab+Cb-(n-1)Ab)\cos^2 x.$$

Bestimmt man also A, B, C so, dass

$$(n-1)bA+aB=f,\ aA+aC+bB=g,\ bC-(n-2)bA=0,$$

d. h. $$A=\frac{ag-bf}{(n-1)(a^2-b^2)},\ B=\frac{af-bg}{a^2-b^2},\ C=\frac{(n-2)(ag-bf)}{(n-1)(a^2-b^2)},\qquad (b)$$

so ist obige Gleichung identisch und die Gleichung (a) folglich richtig. Vermöge derselben ist das Integral erster Seite auf ein ähnliches reduzirt, in welchem nun B und C an die Stelle von f und g treten, damit die Rechnung wieder nach den Formeln (b) zu führen ist.

Die eben angegebene Reduktionsformel ist unbrauchbar, wenn $n=1$, oder $a^2=b^2$, da dann die Formeln (b) nicht benützt werden können. Diese Fälle hat man desshalb direkt zu erledigen.

II. Sey zunächst $a=b$, so ist das vorgelegte Integral

$$\int\frac{f+g\cos x}{a^n(1+\cos x)^n}\partial x=\int\frac{f-g+g(1+\cos x)}{a^n(1+\cos x)^n}\partial x=\frac{f-g}{a^n}\int\frac{\partial x}{(1+\cos x)^n}+\frac{g}{a^n}\int\frac{\partial x}{(1+\cos x)^{n-1}},$$

so dass man diese letzteren Integrale zu bestimmen hat. Man setze $x=2z$, $1+\cos 2z=2\cos^2 z$, so ist

$$\int\frac{\partial x}{(1+\cos x)^n}=\int\frac{2\partial z}{2^n\cos^{2n}z}=\frac{1}{2^{n-1}}\int\frac{\partial z}{\cos^{2n}z},\quad \int\frac{\partial x}{(1+\cos x)^{n-1}}=\frac{1}{2^{n-2}}\int\frac{\partial z}{\cos^{2n-2}z},$$

welche Integrale nach §. 42 erledigt werden können.

Sey weiter $b=-a$, also das Integral

$$\int\frac{f+g\cos x}{a^n(1-\cos x)^n}\partial x=\int\frac{f+g-(1-\cos x)g}{a^n(1-\cos x)^n}\partial x=\frac{f+g}{a^n}\int\frac{\partial x}{(1-\cos x)^n}-\frac{g}{a^n}\int\frac{\partial x}{(1-\cos x)^{n-1}},$$

worin wieder für $x=2z$:

$$\int\frac{\partial x}{(1-\cos x)^n}=\frac{1}{2^{n-1}}\int\frac{\partial z}{\sin^{2n}z},\quad \int\frac{\partial x}{(1-\cos x)^{n-1}}=\frac{1}{2^{n-2}}\int\frac{\partial z}{\sin^{2n-2}z}.$$

III. Ist weiter $n=1$, so ist

$$\int\frac{f+g\cos x}{a+b\cos x}\partial x=f\int\frac{\partial x}{a+b\cos x}+g\int\frac{\cos x\,\partial x}{a+b\cos x}.$$

Da ferner $$\int\frac{\cos x\,\partial x}{a+b\cos x}=\int\left(\frac{1}{b}-\frac{a}{b(a+b\cos x)}\right)\partial x,$$

so ist $$\int\frac{f+g\cos x}{a+b\cos x}\partial x=\frac{gx}{b}+\frac{bf-ag}{b}\int\frac{\partial x}{a+b\cos x},$$

so dass bloss das letzte Integral zu bestimmen ist. Man setze nun $\cos x=z$, $-\sin x\frac{\partial x}{\partial z}=1$, $\frac{\partial x}{\partial z}=-\frac{1}{\sin x}=\mp\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$, wo das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem $\sin x$ positiv oder negativ ist, so ist

$$\int\frac{\partial x}{a+b\cos x}=\mp\int\frac{\partial z}{(a+bz)\sqrt{1-z^2}},$$

welches letztere Integral nun nach §. 40 behandelt werden muss. Man setze also:

$$\sqrt{1-z^2}=(1-z)u,\ 1-z^2=(1-z)^2u^2,\ 1+z=(1-z)u^2,\ z=\frac{u^2-1}{u^2+1},\ \frac{\partial z}{\partial u}=\frac{4u}{(u^2+1)^2},$$

$$\sqrt{1-z^2}=\left(1-\frac{u^2-1}{u^2+1}\right)u=\frac{2u}{u^2+1},\ a+bz=\frac{(a+b)u^2+a-b}{u^2+1},\ \text{mithin}$$

$$\int\frac{\partial z}{(a+bz)\sqrt{1-z^2}}=\int\frac{u^2+1}{(a+b)u^2+(a-b)}\cdot\frac{u^2+1}{2u}\cdot\frac{4u}{(u^2+1)^2}\partial u=2\int\frac{\partial u}{a-b+(a+b)u^2}.$$

Sind nun $a-b$ und $a+b$ beide positiv, so ist diese Grösse $=\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\operatorname{arc}\left(tg=u\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}\right)$; sind weiter $b-a$ und $a+b$ eben so beide positiv, so ist sie:

$$\frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\,l\left(\frac{\sqrt{b-a}+\sqrt{b+a}\,u}{\sqrt{b-a}-\sqrt{b+a}\,u}\right).$$

Da aber $u=\frac{\sqrt{1-z^2}}{1-z}=\sqrt{\frac{1+z}{1-z}}=\sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}=\pm\cotg\frac{x}{2}$, wo das obere Zeichen zu wählen ist, wenn $\cotg\frac{x}{2}$ positiv, das untere, wenn $\cotg\frac{x}{2}$ negativ, indem u immer positiv ist, weil $\sqrt{1-z^2}$ und $1-z$ es sind, so ist jetzt also

$$\int\frac{\partial x}{a+b\cos x}=\mp\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\operatorname{arc}\left(tg=\pm\cotg\frac{x}{2}\cdot\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}\right),\ a^2>b^2$$

$$=\pm\frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\,l\left(\frac{\sqrt{b-a}\pm\sqrt{b+a}\cotg\frac{x}{2}}{\sqrt{b-a}\mp\sqrt{b+a}\cotg\frac{x}{2}}\right),\ a^2<b^2.$$

Was nun die Doppelzeichen anbelangt, so gilt zu Anfang das obere, wenn $\sin x>0$, das untere, wenn $\sin x<0$; im Ausdruck das obere, wenn $\cotg\frac{x}{2}>0$, das untere, wenn $\cotg\frac{x}{2}<0$. Da aber für $\sin x>0$, $\cotg\frac{x}{2}$ auch >0, für $\sin x<0$ auch $\cotg\frac{x}{2}<0$, so gehören die oberen Zeichen zusammen, eben so die unteren, und da

$$\operatorname{arc}(tg=-\alpha)=-\operatorname{arc}(tg=\alpha),\ l\left(\frac{a+b}{a-b}\right)=-l\left(\frac{a-b}{a+b}\right),$$

so hat man endlich

$$\int\frac{\partial x}{a+b\cos x}=-\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\operatorname{arc}\left(tg=\cotg\frac{x}{2}\cdot\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}\right)+C,\ a^2>b^2,\ a>0,$$

$$=\frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\,l\left(\frac{\sqrt{b-a}+\sqrt{b+a}\cotg\frac{x}{2}}{\sqrt{b-a}-\sqrt{b+a}\cotg\frac{x}{2}}\right)+C,\ a^2<b^2,\ b>0.$$

IV. Das Integral

$$\int\frac{f+g\sin x}{(a+b\sin x)^n}\partial x$$

wird für $x=\frac{\pi}{2}+z$ zu $\int\frac{f+g\cos z}{(a+b\cos z)^n}\partial z$

und ist also dem Vorstehenden gemäss zu behandeln.

Das Integral

$$\int \frac{\sin x\,\partial x}{(a+b\cos x)^n}$$

wird für $\cos x = z$ zu

$$-\int \frac{\partial z}{(a+bz)^n}$$

und ist also nach den früheren Methoden integrirbar. Aehnlich verhält es sich mit dem Integral $\int \frac{\cos x\,\partial x}{(a+b\sin x)^n}$, das für $\sin x = z$ zu $\int \frac{\partial z}{(a+bz)^n}$ wird. — Auch das Integral

$$\int \frac{\partial x}{(a+b\cos x+c\sin x)^n}$$

wird auf das frühere reduzirt, wenn man setzt

$$b = r\cos\alpha,\ c = r\sin\alpha,\ r = \sqrt{b^2+c^2},\ \cos\alpha = \frac{b}{r},\ \sin\alpha = \frac{c}{r},$$

woraus $a+b\cos x+c\sin x = a+r(\cos\alpha\cos x+\sin\alpha\sin x) = a+r\cos(x-\alpha)$. Setzt man nun $x-\alpha = z$, so ist

$$\int \frac{\partial x}{(a+b\cos x+c\sin x)^n} = \int \frac{\partial z}{(a+r\cos z)^n}.$$

V. Das Integral $\int \frac{\partial x}{a+b\cos x+c\cos^2 x}$ wird für $\cos x = z$, $\frac{\partial x}{\partial z} = \pm \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$ zu $\pm \int \frac{\partial z}{(a+bz+cz^2)\sqrt{1-z^2}}$ und gehört nun zu den in §. 40 betrachteten Integralen. Aehnlich verhält es sich mit den Integralen:

$$\int \frac{\partial x}{a+b\sin x+c\sin^2 x},\ \int \frac{\partial x}{a+b\sin x+c\cos^2 x},\ \int \frac{\partial x}{a+b\cos x+c\sin^2 x},\ \text{u. s. w.}$$

§. 45.

Gesetzt es sey α eine von x unabhängige Grösse, und ferner $f(x,\alpha)$ eine Funktion von x und α, so wird, wenn

$$\int f(x,\alpha)\,\partial x = F(x,\alpha) + C, \qquad \text{(a)}$$

die Grösse C, die nur konstant ist nach x, ganz wohl von α abhängen können. Daraus folgt, dass

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\int f(x,\alpha)\,\partial x = \frac{\partial F(x,\alpha)}{\partial\alpha} + \frac{\partial C}{\partial\alpha}.$$

Nun ist aber (§. 3)

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\int f(x,\alpha)\,\partial x = \text{Gr.}\left[\frac{\int f(x,\alpha+\Delta\alpha)\,\partial x - \int f(x,\alpha)\,\partial x}{\Delta\alpha}\right] = \text{Gr.}\left(\int \frac{f(x,\alpha+\Delta\alpha)-f(x,\alpha)}{\Delta\alpha}\,\partial x\right)$$

$$\text{(§. 35)} = \int \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}\,\partial x,$$

so dass also

$$\int \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial\alpha}\,\partial x = \frac{\partial F(x,\alpha)}{\partial\alpha} + \frac{\partial C}{\partial\alpha}.$$

Nun erhält C kein x, also wird auch $\frac{\partial C}{\partial\alpha}$ kein x enthalten, mithin kon-

stant nach x seyn, so dass, wenn wir $\frac{\partial C}{\partial \alpha} = C'$ setzen, C' eben eine (willkürliche) Konstante nach x ist. Aus der Gleichung (a) folgt somit

$$\int \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial \alpha} \partial x = \frac{\partial F(x,\alpha)}{\partial \alpha} + C'. \qquad \text{(b)}$$

Dieser Satz ist für die Bildung von Integralen sehr fruchtbar, wie wir nun an einigen Beispielen sehen werden.

I. Es ist (§. 36. VI):

$$\int \sin ax \, \partial x = -\frac{1}{a} \cos ax + C.$$

Daraus folgt, wenn man nach a differenzirt:

$$\int x \cos ax \, \partial x = \frac{1}{a^2} \cos ax + \frac{x}{a} \sin ax + C,$$

allgemein, wenn man n mal nach a differenzirt und beachtet, dass

$$\frac{\partial^n \sin ax}{\partial a^n} = x^n \sin\left(ax + \frac{n\pi}{2}\right) \text{ (§. 9):}$$

$$\int x^n \sin\left(ax + \frac{n\pi}{2}\right) \partial x = -\frac{\partial^n}{\partial a^n}\left(\frac{1}{a} \cos ax\right) + C.$$

Eben so $$\int x^n \cos\left(ax + \frac{n\pi}{2}\right) \partial x = \frac{\partial^n}{\partial a^n}\left(\frac{1}{a} \sin ax\right) + C.$$

Was die Differentialquotienten der zweiten Seiten anbelangt, so können sie, da

$$\frac{\partial^r}{\partial a^r}\left(\frac{1}{a}\right) = (-1)^r \frac{1.2\ldots r}{a^{r+1}}, \quad \frac{\partial^r}{\partial a^r} \cos ax = x^r \cos\left(ax + \frac{r\pi}{2}\right), \quad \frac{\partial^r \sin ax}{\partial a^r} = x^r \sin\left(ax + \frac{r\pi}{2}\right),$$

mittelst des Satzes in §. 10 leicht bestimmt werden. (Man vergl. §. 43. V.)

II. Da immer

$$\int \frac{\partial x}{a + b\cos x} = M + C$$

wo M von a und b abhängt (§. 44), so folgt hieraus, da

$$\frac{\partial^n}{\partial a^n}\left(\frac{1}{a + b\cos x}\right) = (-1)^n \frac{1.2\ldots n}{(a + b\cos x)^{n+1}}, \quad \frac{\partial^n}{\partial b^n}\left(\frac{1}{a + b\cos x}\right) = (-1)^n \frac{1.2\ldots n \cos^n x}{(a + b\cos x)^{n+1}}:$$

$$\int \frac{\partial x}{(a + b\cos x)^n} = \frac{(-1)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)} \frac{\partial^{n-1} M}{\partial a^{n-1}} + C, \quad \int \frac{\cos^{n-1} x \, \partial x}{(a + b\cos x)^n} = \frac{(-1)^{n-1}}{1\ldots(n-1)} \frac{\partial^{n-1} M}{\partial b^{n-1}} + C,$$

und da auch $$\frac{\partial^r}{\partial b^r}\left(\frac{1}{(a + b\cos x)^n}\right) = (-1)^r \frac{n(n+1)\ldots(n+r-1) \cos^r x}{(a + b\cos x)^{n+r}},$$

also wenn $n = m - r$:

$$\frac{\partial^r}{\partial b^r}\left(\frac{1}{(a + b\cos x)^{m-r}}\right) = (-1)^r \frac{(m-r)(m-r+1)\ldots(m-1)\cos^r x}{(a + b\cos x)^m},$$

so ist $$\int \frac{\cos^r x \, \partial x}{(a + b\cos x)^m} = \frac{(-1)^{m-1}}{1.2\ldots(m-1)} \frac{\partial^{m-1} M}{\partial a^{m-r-1} \partial b^r} + C.$$

III. Das Integral

$$\int\frac{\partial x}{a+bx+cx^2}$$

kann immer als eine Grösse A, welche von a, b, c abhängt, gefunden werden, so dass

$$\int\frac{\partial x}{a+bx+cx^2}=A+C.$$

Daraus ergibt sich, wie in II.:

$$\int\frac{\partial x}{(a+bx+cx^2)^n}=\frac{(-1)^{n-1}}{1.2\ldots(n-1)}\frac{\partial^{n-1}A}{\partial a^{n-1}}+C,$$

$$\int\frac{x^r\partial x}{(a+bx+cx^2)^m}=\frac{(-1)^{m-1}}{1.2\ldots(m-1)}\frac{\partial^{m-1}A}{\partial a^{m-r-1}\,\partial b^r}+C.$$

IV. Aus den Werthen von $\int e^{ax}\sin bx\,\partial x$, $\int e^{ax}\cos bx\,\partial x$ in §. 43. III folgen durch n malige Differention nach a:

$$\int x^n e^{ax}\sin bx\,\partial x=\frac{\partial^n}{\partial a^n}\left(\frac{e^{ax}(a\sin bx-b\cos bx)}{a^2+b^2}\right)+C,$$

$$\int x^n e^{ax}\cos bx\,\partial x=\frac{\partial^n}{\partial a^n}\left(\frac{e^{ax}(b\sin bx+a\cos bx)}{a^2+b^2}\right)+C.$$

§. 46.

Gesetzt

$$u_1+u_2+u_3+\ldots\ldots.$$

sey eine unendliche Reihe, deren Glieder Funktionen von x sind und sey diese Reihe innerhalb gewisser Gränzen von x konvergent, so wie U deren Summe, so ist auch, innerhalb derselben Gränzen

$$\int u_1\partial x+\int u_2\partial x+\int u_3\partial x+\ldots.=\int U\partial x+C.$$

Denn sey

$$u_1+u_2+\ldots\ldots u_n=U-R_n,$$

so wird R_n mit wachsendem n sich der Gränze 0 immer mehr nähern. Aber es ist hieraus sicher

$$\int u_1\partial x+\int u_2\partial x+\ldots.+\int u_n\partial x=\int U\partial x-\int R_n\partial x+C,$$

woraus, wenn man n immer mehr wachsen lässt und beachtet, dass weil $\frac{\partial}{\partial x}\int R_n\,\partial x=R_n$ mit unendlichem n verschwindet $\int R_n\partial x$ konstant ist, der Satz unmittelbar folgt. Es ergibt sich übrigens daraus, dass der Differentialquotient von

$$\int u_1\partial x+\int u_2\partial x+\int u_3\partial x+\ldots. \qquad (a)$$

gleich $u_1+u_2+u_3+\ldots.$, also endlich ist, dass auch die Reihe (a) selbst stetig ist. Da nun ihr Differentialquotient gleich U ist, so muss sie gleich $\int U\partial x+C$ seyn. Man sieht hieraus, dass eine Integralreihe, die aus einer konvergenten Reihe entsteht, innerhalb derselben Gränzen immer konvergirt.

Hierauf gründet sich die Methode der Integration mittelst unendlicher Reihen. Soll man nämlich das Integral $\int U \partial x$ bestimmen und ist im Stande, U in eine konvergente unendliche Reihe zu entwickeln, so erhält man, wenn $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots . = U$:

$$\int U \partial x = \int u_1 \partial x + \int u_2 \partial x + \int u_3 \partial x + \ldots . + C.$$

Die Entwicklung selbst kann in beliebiger Weise geschehen, etwa nach dem Mac-Laurin'schen Satze (§. 16), oder in anderer Art. Es lässt sich übrigens auch eine direkte Formel aufstellen.

Man hat nämlich, wenn man in der Gleichung (27) des §. 15 setzt:

$$F(x) = \int u \partial x, \quad h = -x, \quad F(0) = C:$$

$$C = \int u \partial x - \frac{x}{1} u + \frac{x^2}{1.2} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{x^3}{1.2.3} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \ldots + \frac{(-1)^n x^n}{1.2 \ldots n} \frac{\partial^{n-1} u}{\partial x^{n-1}} + \frac{(-1)^{n+1} x^{n+1} u_1}{1.2 .. (n+1)},$$

wo u_1 gleich ist dem Werthe von $\frac{\partial^n u}{\partial x^n}$, wenn man nach der Differentiation an die Stelle von x setzt $(1-\Theta)x$ oder Θx, da auch $1-\Theta$ zwischen 0 und 1 liegt. Daraus folgt

$$\int u \partial x = C + xu - \frac{x^2}{2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{x^3}{2.3} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \ldots . \pm \frac{x^n}{2.3 .. n} \frac{\partial^{n-1} u}{\partial x^{n-1}} \mp \frac{x^{n+1} u_1}{2.3 .. (n+1)}$$

Einige Beispiele mögen wieder das Verfahren erläutern.

I. Man soll $\int \frac{\partial \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}$, $e^2 < 1$

bestimmen. Da (§. 17) für $e^2 < 1$:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} = (1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} e^2 \sin^2 \varphi + \frac{1.3}{2.4} e^4 \sin^4 \varphi + \frac{1.3.5}{2.4.6} e^6 \sin^6 \varphi + \ldots,$$

so ist

$$\int \frac{\partial \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} = \varphi + \frac{1}{2} e^2 \int \sin^2 \varphi \partial \varphi + \frac{1.3}{2.4} e^4 \int \sin^4 \varphi \partial \varphi + \frac{1.3.5}{2.4.6} e^6 \int \sin^6 \varphi \partial \varphi + .. + C,$$

wo nun die noch vorkommenden Integrale nach §. 42 ermittelt werden.

II. Um $\int \frac{\sqrt{1 - e^2 x^2}}{\sqrt{1 - x^2}} \partial x$ zu bestimmen, wenn $e^2 < 1$ und x^2 eben so < 1, hat man:

$$\sqrt{1 - e^2 x^2} = 1 - \frac{1}{2} e^2 x^2 - \frac{1.1}{2.4} e^4 x^4 - \frac{1.1.3}{2.4.6} e^6 x^6 - \ldots .,$$

also

$$\int \frac{\sqrt{1 - e^2 x^2}}{\sqrt{1 - x^2}} \partial x = \int \frac{\partial x}{\sqrt{1 - x^2}} - \frac{1}{2} e^2 \int \frac{x^2 \partial x}{\sqrt{1 - x^2}} - \frac{1.1}{2.4} e^4 \int \frac{x^4 \partial x}{\sqrt{1 - x^2}} - \frac{1.1.3}{2.4.6} e^6 \int \frac{x^6 \partial x}{\sqrt{1 - x^2}} - \ldots . + C.$$

Was nun die hier vorkommenden Integrale anbelangt, so ist in §. 41 (e): $m = 2n$, $r = -\frac{1}{2}$, $n = 2$, $a = -1$, $b = 1$. also $\int \frac{x^{2n} \partial x}{\sqrt{1 - x^2}} = -\frac{x^{2n-1} \sqrt{1 - x^2}}{2n} + \frac{2n-1}{2n} \int \frac{x^{2n-2} \partial x}{\sqrt{1 - x^2}}$, vermöge welcher Reduktionsformel jedes dieser Integrale bestimmt werden kann.

Man erhält allgemein:

$$\int \frac{x^{2n}\,\partial x}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2}\left[\frac{x^{2n-1}}{2n} + \frac{2n-1}{2n}\,\frac{x^{2n-3}}{2n-2} + \frac{2n-3}{2n-2}\cdot\frac{2n-1}{2n}\,\frac{x^{2n-5}}{2n-4} + \ldots\ldots + \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 3}{2n.2n-2\ldots 4}\,\frac{x}{2}\right] + \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 1}{(2n)(2n-2)\ldots 2}\,\mathrm{arc}(\sin = x) + C.$$

III. Man soll $\int \frac{\partial x}{\sqrt{(1-e^2x^2)(1-\varepsilon^2x^2)}}$ bestimmen, wo e^2 und ε^2 kleiner als 1 und dessgleichen x^2 unter 1 ist. Da sowohl $\frac{1}{\sqrt{1-e^2x^2}}$ als $\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2x^2}}$ sich nach §. 17 in unendliche konvergente Reihen entwickeln lassen, so ist dies auch mit $\frac{1}{\sqrt{(1-e^2x^2)(1-\varepsilon^2x^2)}}$ der Fall. Sey also

$$\frac{1}{\sqrt{(1-e^2x^2)(1-\varepsilon^2x^2)}} = A_0 + A_1x^2 + A_2x^4 + \ldots\ldots,$$

wo man offenbar berechtigt ist, nur gerade Potenzen von x zuzulassen; alsdann ist

$$\frac{1}{(1-e^2x^2)(1-\varepsilon^2x^2)} = (A_0 + A_1x^2 + A_2x^4 + \ldots\ldots)^2$$
$$= A_0^2 + 2A_0A_1x^2 + (A_1^2 + 2A_0A_2)x^4 + (2A_0A_3 + 2A_1A_2)x^6 + \ldots\ldots,$$

woraus, wenn man mit $(1-e^2x^2)(1-\varepsilon^2x^2) = 1-(e^2+\varepsilon^2)x^2 + e^2\varepsilon^2x^4$ multiplizirt:
$1 = A_0^2 + [2A_0A_1 - A_0^2(e^2+\varepsilon^2)]x^2 + [A_1^2 + 2A_0A_2 - 2A_0A_1(e^2+\varepsilon^2) + A_0^2\varepsilon^2e^2]x^4 + \ldots\ldots$, mithin

$$A_0^2 = 1,\ A_0 = 1,$$
$$2A_0A_1 - A_0^2(e^2+\varepsilon^2) = 0,$$
$$A_1^2 + 2A_0A_2 - 2A_0A_1(e^2+\varepsilon^2) + A_0^2e^2\varepsilon^2 = 0,$$
$$\vdots$$

aus welchen Gleichungen nun $A_0, A_1, A_2, \ldots.$ folgen. *

Hieraus folgt dann:

---

* Will man das allgemeine Gesetz dieser Gleichungen erhalten, so beachte man, dass $(A_0 + A_1x^2 + \ldots\ldots)^2 = A_0^2 + 2A_0A_1x^2 + \ldots + (A_n^2 + 2A_{n-1}A_{n+1} + 2A_{n-2}A_{n+2} + \ldots\ldots + 2A_0A_{2n})x^{4n} + 2(A_nA_{n+1} + A_{n-1}A_{n+2} + \ldots + A_0A_{2n+1})x^{4n+2} + \ldots$, so dass also, wenn man mit $1-(e^2+\varepsilon^2)x^2 + e^2\varepsilon^2x^4$ multiplizirt, folgende allgemeine Gleichungen entstehen:

$$A_n^2 + 2A_{n-1}A_{n+1} + 2A_{n-2}A_{n+2} + \ldots + 2A_0A_{2n} - 2(e^2+\varepsilon^2)(A_{n-1}A_n + A_{n-2}A_{n+1} + \ldots. + A_0A_{2n-1}) + e^2\varepsilon^2(A_{n-1}^2 + 2A_{n-2}A_n + 2A_{n-3}A_{n+1} + \ldots + 2A_0A_{2n-2}) = 0,$$

$$2(A_nA_{n+1} + A_{n-1}A_{n+2} + \ldots + A_0A_{2n+1}) - (e^2+\varepsilon^2)(A_n^2 + 2A_{n-1}A_{n+1} + 2A_{n-2}A_{n+2} + \ldots + 2A_0A_{2n}) + 2e^2\varepsilon^2(A_{n-1}A_n + A_{n-2}A_{n+1} + \ldots A_0A_{2n-1}) = 0,$$

woraus, bei bekanntem $A_0, A, \ldots, A_{2n-1}$ folgen: A_{2n}, A_{2n+1} und zwar unzweideutig. Hiernach würde obige Reihe sich in folgender Weise fortsetzen:

$$2(A_1A_2 + A_0A_3) - (e^2+\varepsilon^2)(A_1^2 + 2A_0A_2) + 2e^2\varepsilon^2A_0A_1 = 0,$$
$$A_2^2 + 2A_1A_3 + 2A_0A_4 - 2(e^2+\varepsilon^2)(A_1A_2 + A_0A_3) + e^2\varepsilon^2(A_1^2 + 2A_0A_2) = 0,$$
$$2(A_2A_3 + A_1A_4 + A_0A_5) - (e^2+\varepsilon^2)(A_2^2 + 2A_1A_3 + 2A_0A_4) + 2e^2\varepsilon^2(A_1A_2 + A_0A_3) = 0.$$
$$A_3^2 + 2A_2A_4 + 2A_1A_5 + 2A_0A_6 - 2(e^2+\varepsilon^2)(A_2A_3 + A_1A_4 + A_0A_5) + e^2\varepsilon^2(A_2^2 + 2A_1A_3 + 2A_0A_4) = 0,$$
$$2(A_3A_4 + A_2A_5 + A_1A_6 + A_0A_7) - (e^2+\varepsilon^2)A_3^2 + 2A_2A_4 + 2A_1A_5 + 2A_0A_6) + 2e^2\varepsilon^2(A_2A_3 + A_1A_4 + A_0A_5) = 0.$$
$$\vdots$$

$$\int\frac{\partial x}{\sqrt{(1-e^2x^2)(1-\varepsilon^2x^2)}}=A_0x+\frac{A_1x^3}{3}+\frac{A_2x^5}{5}+\ldots+C.$$

Es versteht sich von selbst, dass man dasselbe Integral auch nach Nr. II. behandeln könnte, da $\frac{1}{\sqrt{1-e^2x^2}}=1+\frac{1}{2}e^2x^2+\frac{1.3}{2.4}e^4x^4+\ldots.$, also

$$\int\frac{\partial x}{\sqrt{(1-e^2x^2)(1-\varepsilon^2x^2)}}=\int\frac{\partial x}{\sqrt{1-\varepsilon^2x^2}}+\frac{1}{2}e^2\int\frac{x^2\partial x}{\sqrt{1-\varepsilon^2x^2}}+\frac{1.3}{2.4}e^4\int\frac{x^4\partial x}{\sqrt{1-\varepsilon^2x^2}}+\ldots\ldots+C.$$

IV. Um $\int\frac{\partial x}{\sqrt{x+x^4}}$ zu bestimmen, wenn $x>1$, setze man

$$\frac{1}{\sqrt{x+x^4}}=\frac{1}{x^2\sqrt{1+\frac{1}{x^3}}}=\frac{1}{x^2}\left(1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^3}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{x^6}-\ldots\ldots\right)$$

und hat jetzt

$$\int\frac{\partial x}{\sqrt{x+x^4}}=\int\frac{\partial x}{x^2}-\frac{1}{2}\int\frac{\partial x}{x^5}+\frac{1.3}{2.4}\int\frac{\partial x}{x^8}-\ldots\ldots+C,$$

wo, da $\frac{1}{x^3}<1$, die Reihe konvergirt.

Eben so für $x>1$:

$$\int\frac{\partial x}{\sqrt{x+x^3}}=\int\frac{\partial x}{x\sqrt{x}}-\frac{1}{2}\int\frac{\partial x}{x^2\sqrt{x}}+\frac{1.3}{2.4}\int\frac{\partial x}{x^3\sqrt{x}}-\ldots+C,$$

wo nun die einzelnen Integrale nach der Formel

$$\int\frac{\partial x}{x^n\sqrt{x}}=\int x^{\frac{-(2n+1)}{2}}\partial x=-\frac{2}{2n-1}\cdot x^{-\left(\frac{2n-1}{2}\right)}=-\frac{2}{2n-1}\cdot\frac{\sqrt{x}}{x^n}$$

bestimmt werden.

V. Da (für $x^2<1$)

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1.3}{2.4}x^4+\ldots.,$$

so ist

$$\int\frac{\partial x}{\sqrt{1-x^2}}=x+\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5}+\ldots.+C,$$

und da

$$\int\frac{\partial x}{\sqrt{1-x^2}}=\text{arc}(\sin=x),\text{ so ist also}$$

$$\text{arc}(\sin=x)=\frac{x}{1}+\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5}+\frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{x^7}{7}+\ldots.,\quad x^2<1.$$

wo die willkürliche Konstante sogleich weggelassen wurde, indem sowohl $\text{arc}(\sin=x)$, als auch die unendliche Reihe Null geben für $x=0$, also $C=0$ seyn muss.

Dieselbe Reihe hätte man auch aus §. 10. V ableiten können. Bezeichnet man nämlich durch $y_0, y_0', y_0'', \ldots$ die Werthe von $y, \frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \ldots$ für $x=0$, so ist

$$y_0^{n}=(n-2)^2y_0^{n-2},\ y_0=0,\ y_0'=1,\ y_0''=0.$$

Daraus folgt dann, dass $y_0^4, y_0^6, \ldots$ Null; ferner:

$$y_0^3=y_0'=1,\ y_0^5=3^2y_0^3=3^2,\ y_0^7=5^2y_0^5=5^23^2,\ldots,\ y_0^{2n+1}=(2n-1)^2(2n-3)^2\ldots3^2$$

also da (§. 16) $\quad \text{arc}(\sin=x)=y_0+y_0'\frac{x}{1}+\frac{y_0''x^2}{1.2}+y_0^3\frac{x^3}{1.2.2}+\ldots..,$

so ist $\quad \text{arc}(\sin=x)=\frac{x}{1}+\frac{x^3}{2.3}+\frac{1.3}{2.4}\frac{x^5}{5}+\ldots+\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots2n}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots,$

welche Reihe konvergirt für $x^2<1$ und auch für $x^2=1$. (§. 17. V.)

VI. Ganz eben so findet man

$$\int \frac{\partial x}{1+x^2} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots\ldots + C, \text{ woraus}$$

$$\text{arc}(\text{tg} = x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots\ldots, \quad x^2 < 1.$$

Dieselbe Reihe könnte man aus §. 10. VI in der so eben angegebenen Weise ableiten, indem dort:

$$y_0^n = -(n-2)(n-1)y_0^{n-2}, \; y_0 = 0, \; y_0' = 1, \; y_0'' = 0.$$

VII. Dass man auch endliche Reihen mittelst des obigen Verfahrens summiren kann, ist wohl klar und es mögen einige Beispiele zur Erläuterung dienen.

Sey

$$(a+nb)(c+nd)\ldots\ldots(k+nl)x^{n\alpha} \qquad (a)$$

das allgemeine Glied einer Reihe, deren einzelne Glieder erhalten werden, wenn man $n=0, 1, 2, \ldots.$ setzt; bezeichne ferner y die Summe der $n+1$ ersten Glieder, so ist

$$\beta\int y x^\gamma \partial x = \frac{ac\ldots k\beta}{\gamma+1}x^{\gamma+1} + \frac{(a+b)(c+d)\ldots(k+l)\beta}{\alpha+\gamma+1}x^{\alpha+\gamma+1} + \ldots\ldots$$
$$+ \frac{(a+nb)(c+nd)\ldots(k+nl)\beta}{n\alpha+\gamma+1}x^{n\alpha+\gamma+1} + C.$$

Bestimmt man nun β und γ so, dass für jedes n:

$$(a+nb)\beta = n\alpha+\gamma+1, \text{ d. h. } a\beta = \gamma+1, \; b\beta = \alpha; \; \beta = \frac{\alpha}{b}, \; \gamma = \frac{a\alpha - b}{b},$$

was immer möglich ist, so ist

$$\beta\int y x^\gamma \partial x = c\ldots k x^{\gamma+1} + (c+d)\ldots(k+l)x^{\alpha+\gamma+1} + \ldots + (c+nd)\ldots(k+nl)x^{n\alpha+\gamma+1}, \quad (a')$$

Gesetzt man könne die hier vorkommende Reihe summiren und sey z deren Summe, so ist

$$\beta y x^\gamma = \frac{\partial z}{\partial x}, \text{ also } y = \frac{1}{\beta x^\gamma}\frac{\partial z}{\partial x},$$

wodurch y gefunden wird. Was aber die Reihe z anbelangt, so hat, abgesehen von dem Faktor $x^{\gamma+1}$, ihr allgemeines Glied die Form

$$(c+nd)\ldots(k+nl)x^{n\alpha}, \qquad (b)$$

d. h. wie das Glied (a), nur fehlt ein Faktor im Koeffizienten. So wie man von (a) auf (a′) gelangt, kommt man jetzt von (b) auf

$$\beta'\int z x^{\gamma'} \partial x = e\ldots k x^{\gamma'+1} + (e+f)\ldots(k+l)x^{\alpha+\gamma'+1} + \ldots + (e+nf)\ldots(k+nl)x^{\alpha n+\gamma'+1}.$$

wenn

$$\beta' = \frac{\alpha}{d}, \; \gamma' = \frac{c\alpha - d}{d},$$

so dass, die Summe der bleibenden Reihe $=u$ gesetzt, man hat

$$z = \frac{1}{\beta' x^{\gamma'}}\frac{\partial u}{\partial x}.$$

Wie man hier weiter geht, ist klar. Schliesslich hat man die Reihe

$$k + (k+l)x^\alpha + \ldots. + (k+nl)x^{n\alpha}$$

zu summiren. Ist s die Summe, so hat man abermals

$$\beta_1\int s x^{\gamma_1}\partial x = x^{\gamma_1+1} + x^{\alpha+\gamma_1+1} + \ldots. + x^{n\alpha+\gamma_1+1} = x^{\gamma_1+1}\frac{[x^{n\alpha} - 1]}{x^\alpha - 1},$$

wenn
$$\beta_1 = \frac{\alpha}{1},\ \gamma_1 = \frac{k\alpha - 1}{1},$$
und dann
$$s = \frac{1}{\beta_1 x^{\gamma_1}} \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{x^{\gamma_1+1}(x^{n\alpha}-1)}{x^{\alpha}-1}\right].$$

In ähnlicher Weise kann eine Reihe, deren allgemeines Glied
$$\frac{x^{n\alpha}}{(a+nb)(c+nd)\ldots(k+nl)} \qquad \text{(c)}$$
ist, auf eine andere zurückgeführt werden, in der das allgemeine Glied einen Faktor weniger im Nenner hat. Ist nämlich y die Summe der $n+1$ ersten Glieder der Reihe (c), so hat man
$$\beta\frac{\partial(yx^{\gamma})}{\partial x} = \frac{\beta\gamma x^{\gamma-1}}{ac..k} + \frac{\beta(\alpha+\gamma)x^{\alpha+\gamma-1}}{(a+b)(c+d)\ldots(k+nl)} + \ldots + \frac{\beta(\alpha n+\gamma)x^{n\alpha+\gamma-1}}{(a+nb)(c+nd)\ldots(k+nl)},$$
und wenn nun
$$\beta(\alpha n+\gamma) = a+nb,\ \alpha\beta = b,\ \beta\gamma = a;\ \beta = \frac{b}{\alpha},\ \gamma = \frac{a\alpha}{b},$$
so ist
$$\beta\frac{\partial(yx^{\gamma})}{\partial x} = x^{\gamma-1}\left[\frac{1}{c\ldots k} + \frac{x^{\alpha}}{(c+d)\ldots(k+l)} + \ldots + \frac{x^{n\alpha}}{(c+nd)\ldots(k+nl)}\right],$$
und wenn man diese Reihe summiren kann, so ist (ihre Summe $= z$ gesetzt):
$$\beta y x^{\gamma} = \int x^{\gamma-1} z\,\partial x,\quad y = \frac{1}{\beta x^{\gamma}}\int x^{\gamma-1} z\,\partial x.$$

Da für $x = 0$ immerhin $y = \frac{1}{ac..k}$, so kann die eintretende willkürliche Konstante leicht bestimmt werden. Durch mehrfache Anwendung desselben Verfahrens gelangt man schliesslich zur Reihe:
$$\frac{1}{k} + \frac{x^{\alpha}}{k+1} + \frac{x^{2\alpha}}{k+2l} + \ldots + \frac{x^{n\alpha}}{k+nl},$$
für welche sich ergibt (wenn s deren Summe):
$$\beta'\frac{\partial(sx^{\gamma'})}{\partial x} = x^{\gamma'-1} + x^{\alpha+\gamma'-1} + \ldots + x^{n\alpha+\gamma'-1} = x^{\gamma'-1}\left[\frac{x^{n\alpha}-1}{x^{\alpha}-1}\right],$$
vorausgesetzt, es sey
$$\beta' = \frac{1}{\alpha},\ \gamma' = \frac{k\alpha}{1},$$
so dass
$$s = \frac{1}{\beta' x^{\gamma'}}\int x^{\gamma'-1}\left[\frac{x^{n\alpha}-1}{x^{\alpha}-1}\right]\partial x.$$

Die Reihe, deren allgemeines Glied
$$\frac{(a+nb)(c+nd)\ldots(k+nl)}{(a'+nb')(c'+nd')\ldots k'+nl')}x^{n\alpha} \qquad \text{(d)}$$
lässt sich durch Anwendung beider obigen Verfahrungsweisen auf eine andere reduziren, in der in Zähler und Nenner ein Faktor ausgefallen ist. Heisst nämlich y die Summe der $n+1$ ersten Glieder der Reihe (d), so bekommt man:
$$\beta\int y x^{\gamma}\partial x = \sum_0^n \frac{(c+nd)\ldots(k+nl)}{(a'+nb')(c'+nd')\ldots(k'+nl')}x^{n\alpha+\gamma+1},$$
wenn wir durch $\sum\limits_0^n$ die Summe der Glieder bezeichnen, die man erhält, wenn man $n = 0, 1, \ldots n$ setzt, vorausgesetzt es seyen β und γ bestimmt durch die Gleichungen
$$b\beta = \alpha,\ \gamma+1 = a\beta.$$

Ist ferner

$$\sum_0^n \frac{(c+nd)\ldots(k+nl)}{(a'+nb')\ldots k'+nl')} x^{n\alpha} = z,$$

so ist
$$\beta' \frac{\partial(zx^{\gamma'})}{\partial x} = \sum_0^n \frac{(c+nd)\ldots(k+nl)}{(c'+nd')\ldots(k'+nl')} x^{n\alpha+\gamma'-1}, \qquad (d')$$

wenn
$$\alpha\beta' = b', \ \beta'\gamma' = a';$$

ferner ist dann

$$\beta \int y x^\gamma \partial x = z x^{\gamma+1}, \text{ also } y = \frac{1}{\beta x^\gamma} \frac{\partial (x^{\gamma+1} z)}{\partial x};$$

während die Ermittlung von z möglich ist, wenn man die Summe (d′) bestimmt. Es ist leicht, diese Betrachtungen zum Schlusse zu führen, was wir dem Leser überlassen wollen.

§. 47.

Da die Grösse $\int f(x)\partial x$ wieder eine Funktion von x ist, so kann man ganz eben so ihr Integral suchen, was man durch $\int\left(\int f(x)\partial x\right)\partial x$, oder abkürzungsweise durch $\int^2 f(x)\partial x^2$ bezeichnet. Daraus wird schon klar seyn, was man durch das Zeichen

$$\int^n f(x)\partial x^n$$

bezeichnet. Es lassen sich nun leicht einige Formeln aufstellen, mittelst derer man solche vielfache Integrale bestimmen kann. Ist nämlich y eine Funktion von x, so ist (§. 36)

$$\int y\partial x = \int y\partial x,$$
$$\int^2 y\partial x^2 = x\int y\partial x - \int xy\partial x,$$
$$\int^3 y\partial x^3 = x\int^2 y\partial x^2 - \int\left(x\int y\partial x\right)\partial x$$
$$= x^2\int y\partial x - x\int xy\partial y - \frac{x^2}{2}\int y\partial x + \frac{1}{2}\int x^2 y\partial x$$
$$= \frac{1}{2}x^2\int y\partial x - x\int xy\partial x + \frac{1}{2}\int x^2 y\partial x.$$
$$\vdots$$

Man schliesst hieraus, dass allgemein:

$$1.2\ldots(n-1)\int^n y\partial x^n = x^{n-1}\int y\partial x - \frac{n-1}{1}x^{n-2}\int xy\partial x + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2}x^{n-3}\int x^2 y\partial x$$
$$- \ldots\ldots \pm \frac{n-1}{1}x\int x^{n-2} x\partial x \mp \int x^{n-1} y\partial x$$

sey. Der Beweis dieser Formel geschieht durch den Schluss von n auf n+1. Da nämlich

$$\int\left[x^{n-r}\int x^{r-1} y\partial x\right]\partial x = \frac{x^{n-r+1}}{n-r+1}\int x^{r-1} y\partial x - \frac{1}{n-r+1}\int x^n y\partial x.$$

so erhält man aus obiger Formel durch nochmalige Integration:

$$1.2..(n-1)\int^{n+1} y\partial x^{n+1} = \frac{x^n}{n}\int y\partial x - x^{n-1}\int xy\partial x + \frac{n-1}{1.2}x^{n-2}\int x^2 y\partial x - \ldots\ldots$$
$$-\frac{1}{n}\int x^n y\partial x + \int x^n y\partial x - \frac{n-1}{1.2}\int x^n y\partial x + \ldots\ldots$$
$$\pm\frac{n-1}{1.2}x^2\int x^{n-2} y\partial x \mp \frac{x}{1}\int x^{n-1} y\partial x,$$
$$\mp\frac{n-1}{1.2}\int x^n y\partial x \pm \int x^n y\partial x.$$

Nun ist

$$-\frac{1}{n}+1-\frac{n-1}{1.2}+\ldots\mp\frac{n-1}{1.2}\pm 1 = -\frac{1}{n}\left[1-\frac{n}{1}+\frac{n(n-1)}{1.2}-\ldots\pm\frac{n(n-1)}{1.2}\mp n\right]$$
$$= -\frac{1}{n}\left[1-\frac{n}{1}+\frac{n(n-1)}{1.2}+\ldots\pm\frac{n(n-1)}{1.2}\mp n\pm 1\right]\pm\frac{1}{n} = -\frac{1}{n}(1-1)^n\pm\frac{1}{n}=\pm\frac{1}{n},$$

also wenn man mit n multiplizirt:

$$1.2\ldots n\int^{n+1} y\partial x^{n+1} = x^n\int y\partial x - \frac{n}{1}x^{n-1}\int xy\partial x + \frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2}\int x^2 y\partial x - \ldots\ldots$$
$$\mp\frac{n}{1}x\int x^{n-1} y\partial x \pm \int x^n y\partial x,$$

welche Formel aus der früheren entsteht, wenn man $n+1$ für n setzt, und also deren Richtigkeit beweist, da sie für $n=2$ gilt.

Da man bei jeder Integration eine willkürliche Konstante zufügen soll, so wird man schliesslich bei $\int^n y\partial x^n$ hinzusetzen müssen $ax^{n-1}+bx^{n-2}+\ldots$ $\ldots+k$, wo a, b..., k, der Anzahl nach n, willkürliche Konstanten sind.

Anm. Der so eben angegebene Satz führt die Bestimmung eines vielfachen Integrals auf die von einfachen Integralen zurück. Man hat auch weitere Sätze aufgestellt, nach denen die Bestimmung vielfacher Integrale von zusammengesetzten Formen auf die der einfacheren zurückkommt. So wenn y und z Funktionen von x sind, hat man

$$\int^n yz\partial x^n = y\int^n z\partial x^n - \frac{n}{1}\frac{\partial y}{\partial x}\int^{n+1} z\partial x^{n+1} + \frac{n(n+1)}{1.2}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$
$$\int^{n+2} z\partial x^{n+2} - \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\int^{n+3} z\partial x^{n+3} + \ldots,$$

welche Reihe ins Unendliche gehen kann. Da jedoch diese Untersuchungen für uns von geringerem Interesse sind, so mögen sie im Augenblick dahingestellt bleiben.

Es bleibt uns nur noch Einiges in Bezug auf vielfache Integrale von mehreren unabhängig Veränderlichen zu sagen übrig. Die Grösse

$$\iint f(x,y)\partial x\partial y$$

ist ein doppeltes Integral für die zwei unabhängig Veränderlichen x und y. Schreibt man sie in folgender Weise:

$$\int\partial x\int f(x,y)\partial y,$$

so ist dadurch deutlicher angegeben, was zu thun sey. Man hat nämlich zuerst die Grösse $\int f(x,y)\partial y$ zu bestimmen, wobei x die Rolle einer Konstanten spielt; ist diese Integration vollzogen, so integrirt man nochmals nach x. Ist nun

$$\int f(x,y)\partial y = F(x,y),$$

so wird allgemeiner

$$\int f(x,y)\partial y = F(x,y) + \varphi(x)$$

seyn, wo $\varphi(x)$ eine ganz willkürliche Funktion von x ist, indem ja die sonst zuzufügende Konstante wohl von x, das hier konstant ist, abhängen kann. Hieraus folgt:

$$\int \partial x \int f(x,y)\partial y = \int F(x,y)\partial x + \int \varphi(x)\partial x + \psi(y),$$

wo $\psi(y)$ eine willkürliche Funktion von y ist. Da auch $\int \varphi(x)\partial x$ wegen des willkürlichen $\varphi(x)$ eine willkürliche Funktion von x ist, so ist allgemein

$$\int \partial x \int f(x,y)\partial y = \int F(x,y)\partial x + \psi(y) + \varphi_1(x),$$

wo $\psi(y)$ eine ganz willkürliche Funktion von y, ohne x; $\varphi_1(x)$ eine eben so willkürliche Funktion von x, ohne y, ist.

Als Beispiel wählen wir etwa das Doppelintegral

$$\int\int \frac{\partial x \partial y}{x^2+y^2}.$$

Zunächst ist
$$\int \frac{\partial y}{x^2+y^2} = \frac{1}{x}\operatorname{arc}\left(tg = \frac{y}{x}\right),$$

also ist
$$\int\int \frac{\partial x \partial y}{x^2+y^2} = \int \frac{1}{x}\operatorname{arc}\left(tg = \frac{y}{x}\right)\partial x + Y + X,$$

wo Y eine willkürliche Funktion von y, X von x bedeutet. Das Integral, das hier noch vorkommt, und in welchem y konstant ist, könnte etwa nach §. 46 ermittelt werden.

Man wird beachten, dass wenn

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = f(x,y),$$

daraus folgt
$$u = \int\int f(x,y)\partial x \partial y + X + Y,$$

wo wieder X, Y Grössen sind, wie oben. Da nun in $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$ die Ordnung der Differentiation ganz willkürlich ist (§. 12), so wird auch in dem Integral $\int\int f(x,y)\partial x \partial y$ die Ordnung der Integration eine durchaus willkürliche seyn, immer natürlich unter der Voraussetzung, es sey $f(x,y)$ immer eine endliche Grösse.

Ganz eben so folgt aus

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = f(x,y,z);\quad u = \int\int\int f(x,y,z)\partial x \partial y \partial z + \varphi(x,y) + \psi(x,z) + \lambda(y,z),$$

wo $\varphi(x,y)$ eine willkürliche Funktion von x, y: $\psi(x,z)$ eine willkürliche Funktion vnn x, z; $\lambda(y,z)$ eine eben solche von y, z ist. In dem dreifachen Integrale $\int\int\int f(x,y,z)\partial x \partial y \partial z$ ist die Ordnung der Integration eine ganz beliebige, in so ferne nur $f(x,y,z)$ endlich ist.

Man ersieht hieraus schon im Allgemeinen, was man unter dem vielfachen Integrale

$$\int\int\int \ldots f(x,y,z,\ldots)\,\partial x\,\partial y\,\partial z\ldots$$

zu verstehen hat. Dabei ist die Ordnung der Integration willkürlich, so dass man also zunächst $f(x,y,z,\ldots)$ nach x integriren kann, wobei alle anderen Grössen $y, z, \ldots$ als Konstanten betrachtet werden. Diese so erhaltene Grösse integrirt man sodann nach y, wobei $x, z, \ldots$ konstant sind, u. s. w.; schliesslich werden dem Resultate willkürliche Funktionen zugefügt von je allen Veränderlichen, eine ausgeschlossen, also so viele, als es Veränderliche sind. So ist etwa

$$\int\int\int xyz\,\partial x\,\partial y\,\partial z = \frac{x^2y^2z^2}{8} + \varphi(x,y) + \varphi_1(x,z) + \varphi_2(y,z),$$

wo $\varphi, \varphi_1, \varphi_2$ ganz willkürliche Funktionen sind.

Allerdings genügt das Integral

$$\int\int f(x,y)\,\partial x\,\partial y = u,$$

wo u eine bestimmte Funktion von x und y, ohne die zuzufügenden willkürlichen Funktionen, ist, der Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = f(x,y),$$

ist aber nicht ihre allgemeine Lösung, da dieselbe befriedigt ist, wenn man zu obigem Werthe von u noch willkürliche Funktionen von x und y hinzufügt. Wollte man nun gemäss §. 29 an die Stelle der unabhängig Veränderlichen x, y, andere, φ und ψ etwa, einführen, so würde man nach §. 29 wohl $\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}$ durch die Differentialquotienten von u nach φ und ψ ausdrücken können; für das Integral $\int\int f(x,y)\,\partial x\,\partial y$ wäre damit Nichts gewonnen. Wollen wir überhaupt dieses letztere umformen, so werden wir uns gar nicht an die obige Differentialgleichung zu halten haben, die ja doch mit dem Integral in einem lockeren Zusammenhang steht, sondern wir werden kurzweg das Integral als eine Reihe auf einander folgender einfacher Integrationen ansehen, und somit nach §. 36 für jede einzelne Integration zu verfahren haben. Da wir jedoch im nächsten Abschnitt hievon allgemeiner handeln werden, so wollen wir die Lösung dieser Frage dorthin verschieben.

Neunter Abschnitt.

Das bestimmte Integral.

§. 48.

Seyen a und b zwei bestimmte, endliche Grössen, f(x) eine Funktion von x, die für alle Werthe von x, von a bis b, endlich bleibe; ferner $a_1, a_2,$

..., a_n eine Reihe von Werthen zwischen a und b, so dass wenn $b > a$, auch $a_1 > a$, $a_2 > a_1, \ldots, a_n > a_{n-1}$, $b > a_n$, und wenn $b < a$, auch $a_1 < a$, $a_2 < a_1, \ldots, a_n < a_{n-1}$, $b < a_n$, dass mithin die Differenzen

$$a_1 - a,\ a_2 - a_1,\ a_3 - a_2, \ldots, a_n - a_{n-1},\ b - a_n$$

sämmtlich dasselbe Zeichen haben, so heissen wir die Grösse, der sich

$$(a_1 - a) f(a) + (a_2 - a_1) f(a_1) + (a_3 - a_2) f(a_2) + \ldots + (a_n - a_{n-1}) f(a_{n-1}) + (b - a_n) f(a_n) \quad (a)$$

mehr und mehr nähert, je kleiner die Differenzen $a_1 - a$, $a_2 - a_1, \ldots, b - a_n$ werden, d. h. je mehr man Werthe zwischen a und b einschiebt, das bestimmte Integral von f(x), genommen zwischen den Gränzen a und b, und bezeichnen dieselbe durch $\int_a^b f(x)\partial x$, so dass als Erklärung dieses Zeichens die Gleichung gilt:

$$\int_a^b f(x)\partial x = \text{Gr.}\Big[(a_1 - a) f(a) + (a_2 - a_1) f(a_1) + (a_3 - a_2) f(a_2) + \ldots + (a_n - a_{n-1}) f(a_{n-1}) + (b - a_n) f(a_n)\Big]. \quad (43)$$

Was nun die Grösse zweiter Seite in (43) anbelangt, so wird, da die Differenzen $a_1 - a$, $a_2 - a_1, \ldots, b - a_n$ sämmtlich dasselbe Zeichen haben, die Grösse

$$(a_1 - a) f(a) + (a_2 - a_1) f(a_1) + \ldots + (b - a_n) f(a_n) \quad (\alpha)$$

ihrem absoluten Werthe nach (d. h. ohne Rücksicht auf das Zeichen) kleiner seyn, als diejenige Grösse, die man erhält, wenn man für $f(a)$, $f(a_1) \ldots$, $f(a_n)$ die grösste dieser Grössen setzt, und grösser als das, was man erhält, wenn man die kleinste setzt. Sind die obigen Differenzen alle positiv, so ist dies von selbst klar, da dadurch jede einzelne Grösse zu gross oder zu klein wird, und alle addirt werden, da sie dann natürlich sämmtlich dasselbe Zeichen haben; sind die Differenzen alle negativ, so nehme man sie mit den entgegengesetzten Zeichen und hat dasselbe Resultat. Ist also $f(a_r)$ die grösste, $f(a_s)$ die kleinste der Grössen $f(a)$, $f(a_1), \ldots, f(a_n)$, so liegt die Grösse (α) immer zwischen

$$(a_1 - a) f(a_r) + (a_2 - a_1) f(a_r) + \ldots + (a_n - a_{n-1}) f(a_r) + (b - a_n) f(a_r) = (b - a) f(a_r) \text{ und}$$
$$(a_1 - a) f(a_s) + (a_2 - a_1) f(a_s) + \ldots + (a_n - a_{n-1}) f(a_s) + (b - a_n) f(a_s) = (b - a) f(a_s),$$

so dass man also sagen kann, es sey dieselbe gleich einem Werthe zwischen $(b - a) f(a_r)$ und $(b - a) f(a_s)$. Schiebt man zwischen a und b mehr und Werthe ein, so wird man immer mehr Werthe von f(x) erhalten, so dass man wird sagen können, alle Werthe von f(x), für $x = a$ bis zu $x = b$ seyen nach und nach erschienen. Da immer (α) gleich ist $(b - a)$ multiplizirt mit einem Zwischenwerthe zwischen $f(a_r)$ und $f(a_s)$, und da man alle Zwischenwerthe zwischen $f(a_r)$ und $f(a_s)$ erhält, wenn man in f(x) x von a bis b gehen lässt, so kann man offenbar sagen, es sey $\int_a^b f(x)\partial x$ gleich $(b - a)$ multiplizirt mit einem Werthe von f(x), für den x zwischen a und b liegt. Bezeichnen wir denselben durch $a + \Theta(b - a)$, wo Θ zwischen 0 und 1 liegt (vergl. §. 13. II), so ist also

$$\int_a^b f(x)\partial x = (b-a)f[a+\Theta(b-a)]. \qquad (44)$$

Anm. Es folgt hieraus sofort, dass wenn $f(x)$ endlich ist von $x=a$ bis $x=b$ die Grösse $\int_a^b f(x)\partial x$ sich der Null nähert, wenn b sich a nähert. Denn ist $b-a=\alpha$, so ist $\int_a^b f(x)\partial x = \alpha f[a+\Theta\alpha]$, und da $f[a+\Theta\alpha]$ endlich ist, so nähert sich diese Grösse der Null, wenn α sich Null nähert, d. h. wenn $b=a$ zu werden strebt.

Es fragt sich nun vor Allem, ob die gewählte Einschiebungsweise der Werthe $a_1, a_2, \ldots, a_n$, die wir nach irgend einem Gesetze geschehen uns denken können, nicht von Einfluss ist auf den Werth des bestimmten Integrals $\int_a^b f(x)\partial x$. Zu dem Ende wollen wir zunächst in

$$(a_1-a)f(a)+(a_2-a_1)f(a_1)+\ldots+(a_n-a_{n-1})f(a_{n-1})+(b-a_n)f(a_n) \qquad (\alpha)$$

zwischen a und a_1, a_1 und $a_2, \ldots$ weitere Grössen einschieben, und zwar zwischen a und a_1 die Grössen $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$, zwischen a_1 und a_2 die Grössen $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_r$; zwischen a_n und b die Grössen $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s$, so wird statt (α) jetzt erscheinen:

$$\left.\begin{aligned}&(\beta_1-a)f(a)+(\beta_2-\beta_1)f(\beta_1)+\ldots.+(\beta_m-\beta_{m-1})f(\beta_{m-1})+(a_1-\beta_m)f(\beta_m)\\&+(\gamma_1-a_1)f(a_1)+(\gamma_2-\gamma_1)f(\gamma_1)+\ldots.+(\gamma_r-\gamma_{r-1})f(\gamma_{r-1})+(a_2-\gamma_r)f(\gamma_r)\\&+\ldots..\\&\quad\vdots\\&+(\xi_1-a_n)f(a_n)+(\xi_2-\xi_1)f(\xi_1)+\ldots.+(\xi_s-\xi_{s-1})f(\xi_{s-1})+(b-\xi_s)f(\xi_s).\end{aligned}\right\}(\alpha')$$

Genau wie oben wird man aber zeigen können, dass jede einzelne Zeile von (α') als ein Zwischenwerth darzustellen ist und zwar, wenn wir sogleich uns denken, es seyen schon an und für sich genügend viele Werthe $a_1, a_2, \ldots, a_n$ vorhanden gewesen, wird man die Grösse (α') setzen können gleich

$$(a_1-a)f[a+\Theta_1(a_1-a)]+(a_2-a_1)f[a_1+\Theta_2(a_2-a_1)]+\ldots+(b-a_n)f[a_n+\Theta_n(b-a_n)],$$

wo $\Theta_1, \ldots, \Theta_n$ zwischen 0 und 1 liegen. Da aber a_1-a, $a_2-a_1, \ldots\ldots, a_n-a_{n-1}$ immer kleiner werden, je grösser n ist, so wird man setzen können:

$$f[a+\Theta_1(a_1-a)]=f(a)+\varepsilon_0,\ f[a_1+\Theta_2(a_2-a_1)]=f(a_1)+\varepsilon_1, \ldots, f[a_n+\Theta(b-a_n)]$$
$$=f(a_n)+\varepsilon_n,$$

wo $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ mit a_1-a, $a_2-a_1, \ldots, b-a_n$ verschwindend klein werden. Also ist (α') gleich

$$(a_1-a)f(a)+(a_2-a_1)f(a_1)+\ldots.+(b-a_n)f(a_n)$$
$$+(a_1-a)\varepsilon_0+(a_2-a_1)\varepsilon_1+\ldots.+(b-a_n)\varepsilon_n,$$

d. h. die Differenz zwischen dem Werthe von (α) und dem von (α') ist

$$(a_1-a)\varepsilon_0+(a_2-a_1)\varepsilon_1+\ldots.+(b-a_n)\varepsilon_n. \qquad (\beta)$$

Diese Grösse liegt aber zwischen $(b-a)\varepsilon_r$ und $(b-a)\varepsilon_s$, wenn ε_r und ε_s die grösste und kleinste der Grössen $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ sind, und da mit wachsendem n diese Grössen immer mehr abnehmen, so wird also der Werth von (β) sich immer mehr der Null nähern, so dass mit unendlichem n, d. h. wenn man zur Gränze übergeht, der Werth von (α) und der von (α') einander gleich sind. Daraus folgt also, dass das Einschieben von weiteren Zwischenwerthen keinen Einfluss auf den Werth des bestimmten Integrals hat.

Aber auch eine ganz andere Einschiebungsweise, als die anfänglich gewählte, hat keinen Einfluss. Denn seyen anfänglich eingeschoben $a_1, \ldots,$ a_n; dann wieder einmal $b_1, \ldots, b_m$, wo natürlich schliesslich n und m unendlich gross sind, und auch von $b_1, \ldots, b_m$ angenommen wird, dass $b_1 - a$, $b_2 - b_1, \ldots, b - b_m$ sämmtlich dasselbe Zeichen haben, so werden die Gränzen von

$$\left.\begin{array}{l}(a_1 - a) f(a) + (a_2 - a_1) f(a_1) + \ldots + (b - a_n) f(a_n) \\ (b_1 - a) f(a) + (b_2 - b_1) f(b_1) + \ldots + (b - b_m) f(b_m)\end{array}\right\} (\delta)$$

und

einander gleich seyn. Denn man denke sich zwischen a und b alle Grössen $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m$ in der gehörigen Ordnung eingeschoben, so wird diese neue Eintheilung nothwendig in Bezug auf jede der durch (δ) angegebenen Eintheilungsweisen eine solche seyn, die man erhalten hätte, wenn man in (δ) Zwischenwerthe eingeschoben hätte. Da nun, dem Obigen gemäss, der Gränzwerth dieser neuen Grösse derselbe ist, wie die Gränzwerthe der beiden Grössen (δ), so müssen diese letzteren Gränzwerthe selbst einander gleich seyn.

Wie man also auch in (43) die nach einander folgenden Zwischenwerthe $a_1, \ldots, a_n$ wähle, der Werth von $\int_a^b f(x)\,\partial x$ ist immer derselbe.

Wählen wir also diese Zwischenwerthe so, dass sie alle gleich weit von einander abstehen, d. h. setzen wir $\frac{b-a}{n} = \Delta x$, so ist, wenn Gr. sich auf ein unendlich wachsendes n, also unendlich abnehmendes Δx bezieht, auch

$$\int_a^b f(x)\,\partial x = \text{Gr.}\,\Delta x [f(a) + f(a + \Delta x) + f(a + 2\Delta x) + \ldots + f(a + \overline{n-1}\,\Delta x)], \quad (45)$$

wenn man $a_1 = a + \Delta x$, $a_2 = a + 2\Delta x, \ldots a_n = a + (n-1)\Delta x$ setzt.

Man kann das oben Gesagte auch noch in etwas anderer Form aussprechen, was für manche Anwendungen von grosser Wichtigkeit ist. Sind nämlich zwischen a und b die Werthe $a_1, a_2, \ldots a_n$ eingeschoben, und man lässt n mehr und mehr gross werden, so werden die Differenzen $a_1 - a$, $a_2 - a_1$, $\ldots, b - a_n$ immer kleiner und man wird also sagen dürfen, sie werden unendlich klein (§. 3), statt zu sagen, man gehe zur Gränze über. Da die Grössen $f(a), f(a_1), \ldots, f(a_n)$ sämmtlich endlich vorausgesetzt wurden, so sind dann die Grössen $(a_1 - a) f(a)$, $(a_2 - a_1) f(a_1), \ldots, (b - a_n) f(a_n)$ auch unendlich klein, und bilden das, was man die Elemente des bestimmten Integrals nennt. Dasselbe ist somit gleich der Summe seiner unendlich vielen unendlich kleinen Elemente. Sobald man also irgendwo auf eine solche Summation kommt, so hat man immer ein bestimmtes Integral zu ermitteln.

Fig. 17.

A M N

Anm. Es mag vielleicht zur klaren Einsicht in das Wesen der letzten Angabe beitragen, wenn wir an einem Beispiele erläutern, wie dies zu verstehen ist. Gesetzt, ein Körper bewege sich auf der Geraden AM (Fig 17) und sey am Ende der Zeit t nach M gelangt; seine Geschwindigkeit in M sey $= f(t)$, so dass also dieselbe zu jeder Zeit bekannt ist; man will wissen, welchen Weg

der Körper in der Zeit z, von Anfang an gerechnet, zurückgelegt habe, wenn die Bewegung in A angefangen hat. Sey τ eine unendlich kleine Zeit — ein Zeitelement — v die Geschwindigkeit des Körpers in M, gleich $f(t)$, so ist der in der Zeit τ zurückgelegte Weg $= v\tau = f(t)\tau$ (§. 34. I), welcher Weg nun das Element des ganzen zurückgelegten Weges bildet. Theilt man also die Zeit z in unendlich viele unendlich kleine (gleich grosse oder verschieden grosse) Zeittheilchen τ ab, so hat man für den Weg in jedem derselben einen Ausdruck wie den obigen, so dass die Summe aller derselben, d. h.

$$f(0)\tau + f(\tau)\tau + f(2\tau)\tau + \ldots + f(z-\tau)\tau$$

der zurückgelegte Weg ist. Derselbe wird also gegeben seyn durch die Formel:

$$x = \int_0^z f(t)\partial t.$$

Dass man dasselbe Resultat auch in der strengeren Form erhalten kann, ist leicht zu übersehen. Man würde jetzt sagen, der in der Zeit τ zurückgelegte Weg sey zwischen $v\tau$ und $(v+\Delta v)\tau$ enthalten, wenn Δv die Zunahme der Geschwindigkeit während der Zeit τ ist. Er ist also $=(v+\varepsilon)\tau$, wo ε eine Grösse ist, die mit τ verschwindet. Daraus folgt, dass der ganze Weg gleich

$$(v_0+\varepsilon_0)\tau + (v_1+\varepsilon_1)\tau + \ldots + (v_n+\varepsilon_n)\tau,$$

wenn $v_0, v_1, \ldots, v_n$ die Geschwindigkeiten in den Zeitmomenten $0, \tau, 2\tau, \ldots$ sind. Diese Summe ist gleich

$$v_0\tau + v_1\tau + \ldots + v_n\tau + (\varepsilon_0 + \ldots + \varepsilon_n)\tau,$$

und bleibt, was auch τ sey, dem Wege gleich. Lässt man aber τ immer mehr abnehmen, so wird der erste Theil $v_0\tau + \ldots + v_n\tau$ als Gränzwerth die Grösse $\int_0^z v\partial t = \int_0^z f(t)\partial t$ haben, während der zweite $(\varepsilon_0 + \ldots + \varepsilon_n)\tau$ sich mit unendlich abnehmendem τ der Gränze 0 nähert (§. 34, II). Daraus folgt dann obige Gleichung. (Man vergl. §. 53.)

§. 49.

In §. 13. III wurde gezeigt, dass

$$\text{Gr. } \Delta x[F'(x) + F'(x+\Delta x) + \ldots + F'(x+h-\Delta x)] = F(x+h) - F(x).$$

Setzt man hier $x = a$, $h = b - a$, $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, also $x + h - \Delta x = b - \frac{b-a}{n} = \frac{nb-b+a}{n} = a + (n-1)\Delta x$, so ist

$$\text{Gr. } \Delta x[F'(a) + F'(a+\Delta x) + \ldots + F'(a+\overline{n-1}\,\Delta x)] = F(b) - F(a).$$

Demnach, wenn

$$F(x) = \int f(x)\partial x, \quad F'(x) = f(x),$$

und (§. 48)

$$\text{Gr. } \Delta x[f(a) + f(a+\Delta x) + \ldots + f(a+\overline{n-1}\,\Delta x)] = \int_a^b f(x)\partial x,$$

so ist

$$\int_a^b f(x)\partial x = F(b) - F(a), \quad \text{wo } \int f(x)\partial x = F(x). \tag{46}$$

Vermittelst dieser Formel ist die Ermittlung des bestimmten Integrals $\int_a^b f(x)\partial x$ auf die des **unbestimmten Integrals** $\int f(x)\partial x$ zurückgeführt, und wenn $\int f(x)\partial x = F(x)$, so ist $\int_a^b f(x)\partial x$ gleich der Differenz der Werthe von $F(x)$ für $x = b$ und $x = a$. Die Werthe a und b von x heissen die **Gränzen** des bestimmten Integrals. Man sieht leicht, dass die Zufügung

der willkürlichen Konstanten bei der unbestimmten Integration nicht nothwendig ist, da wenn $\int f(x)\partial x = F(x) + C$, der Werth für $x = b$ ist $F(b) + C$, für $x = a$: $F(a) + C$ und die Differenz beider ist $F(b) - F(a)$, wo nun die willkürliche Konstante verschwunden ist. Dies setzt natürlich voraus, dass C dieselbe Grösse ist für $x = a$ und für $x = b$. Gemäss §. 35 wird dies der Fall seyn, wenn $f(x)$ endlich ist von $x = a$ bis $x = b$, oder „innerhalb der Gränzen der Integration", was wir auch immer vorausgesetzt haben und noch voraussetzen werden. Eben so muss nothwendig die Grösse $F(x)$ stetig verlaufen von $x = a$ bis $x = b$, d. h. ein jeder folgende Werth muss unendlich wenig verschieden seyn vom vorhergehenden. Diese Bedingung ist von grosser Wichtigkeit und es könnte, wenn sie übersehen wird, leicht ein ganz falsches Resultat zum Vorschein kommen. (Vergl. §. 50.) Die Fundamentalgleichung (46) rechtfertigt auch die Bezeichnung des bestimmten Integrals, da es nichts Anderes ist, als die Differenz zweier Werthe des unbestimmten. Dass übrigens z. B.

$$\int_a^b f(x)\partial x = \int_a^b f(z)\partial z = \int_a^b f(u)\partial u,$$

ist wohl von selbst klar, da wenn $\int f(x)\partial x = F(x)$, auch $\int f(z)\partial z = F(z)$, $\int f(u)\partial u = F(u)$, also

$$\int_a^b f(x)\partial x = F(b) - F(a), \int_a^b f(z)\partial z = F(b) - F(a), \int_a^b f(u)\partial u = F(b) - F(a).$$

Wie man also die „Integrations-Veränderliche" auch bezeichnen mag, ist ganz gleichgiltig. Wir können nun mittelst des Vorstehenden sogleich einige wichtige Sätze über die bestimmten Integrale nachweisen.

I. Es ist immer $\int_a^b f(x)\partial x = -\int_b^a f(x)\partial x.$

Denn ist $\int f(x)\partial x = F(x)$, so ist

$$\int_a^b f(x)\partial x = F(b) - F(a), \int_b^a f(x)\partial x = F(a) - F(b),$$

woraus der Satz folgt.

II. Sind c, e, m, n beliebige Grössen, so ist

$$\int_a^b f(x)\partial x = \int_a^c f(x)\partial x + \int_c^e f(x)\partial x + \int_e^m f(x)\partial x + \int_m^n f(x)\partial x + \int_n^b f(x)\partial x.$$

Beachtet man, dass

$$\int_a^c f(x)\partial x = F(c) - F(a), \int_c^e f(x)\partial x = F(e) - F(c), \ldots\ldots, \int_n^b f(x)\partial x = F(b) - F(n),$$

so wird der Satz ganz von selbst folgen. Dabei ist nur vorausgesetzt, dass $f(x)$ innerhalb aller Integrationsgränzen endlich sey, da sonst von einem bestimmten Integral keine Rede seyn kann. Man heisst den in obiger Formel ausgesprochenen Satz den von der **Einschiebung der Gränzen**. So also wäre

$$\int_a^b f(x)\partial x = \int_a^c f(x)\partial x + \int_c^b f(x)\partial x = \int_a^c f(x)\partial x + \int_c^e f(x)\partial x + \int_e^b f(x)\partial x, \text{ u. s. w.}$$

III. Ist C eine Konstante, so ist

$$\int_a^b Cf(x)\partial x = C\int_a^b f(x)\partial x.$$

Dieser Satz folgt unmittelbar daraus, dass

$$\int Cf(x)\partial x = C\int f(x)\partial x.$$

Eben so ist

$$\int_a^b (y \pm z \pm ..)\partial x = \int_a^b y\partial x \pm \int_a^b z\partial x \pm .....$$

IV. Da wenn x als Funktion von z angesehen wird, man hat (§. 36):

$$\int f(x)\partial x = \int f(x)\frac{\partial x}{\partial z}\partial z,$$

wo $f(x)\frac{\partial x}{\partial z}$ zuerst in z auszudrücken ist, so ist auch

$$\int_a^b f(x)\partial x = \int_\alpha^\beta f(x)\frac{\partial x}{\partial z}\partial z,$$

worin α und β die Werthe von z, die den Werthen a und b von x zugehören.

Denn es sey

$$\int f(x)\partial x = F(x), \int f(x)\frac{\partial x}{\partial z}\partial z = \varphi(z),$$

so geht F(x) in $\varphi(z)$ über, wenn man x durch z ersetzt, und $\varphi(z)$ in F(x), wenn man z durch x ausdrückt. Folgt also aus der Annahme $x = a$ nothwendig und unzweideutig $z = \alpha$, aus $x = b$ hingegen $z = \beta$, so ist

$$F(a) = \varphi(\alpha),\ F(b) = \varphi(\beta),$$

also

$$F(b) - F(a) = \varphi(\beta) - \varphi(\alpha), \text{ d. h. } \int_a^b f(x)\partial x = \int_\alpha^\beta f(x)\frac{\partial x}{\partial z}\partial z.$$

Was die Werthe von α und β anbelangt, so sieht man leicht, dass sie im Allgemeinen durch Auflösung einer Gleichung zu erhalten seyn werden. Ist nämlich $\psi(x,z) = 0$ die Gleichung, welche den Zusammenhang zwischen x und z ausdrückt, so folgt aus der Gleichung $\psi(a,z) = 0$ der Werth α von z, und aus $\psi(b,z) = 0$ der Werth β von z. Dabei kann es sich nun ereignen, dass eine solche Gleichung mehrere Wurzeln zulässt, und man also in Zweifel kommen kann, welchen der Werthe man zu nehmen hat. Im Allgemeinen lässt sich hierüber Nichts aussagen, und man wird also im speziellen Falle durch demselben angemessene Betrachtungen sich entscheiden müssen, desshalb auch möglichst vermeiden, in solche Lage zu kommen. Es kann aber noch eine zweite Schwierigkeit auftauchen. Man hat nämlich in $f(x)\frac{\partial x}{\partial z}$ die Grösse x durch ihren Werth in z zu ersetzen, wozu im Allgemeinen ebenfalls die Auflösung einer Gleichung nothwendig ist. Wenn nun diese Gleichung mehrere Wurzeln zulässt, so entsteht die Frage, welche derselben man zu wählen habe. Auch hier muss der spezielle Fall entscheiden. Es lässt sich darüber nur Folgendes im Allgemeinen sagen. Gesetzt für $x = a$ sey $z = \alpha$ und für $x = b$ sey $z = \beta$, welche Werthe unzweideutig seyen und sey $z = \varphi(x)$ die Gleichung, welche den Zusammenhang zwischen x und z

ausdrückt. Gesetzt nun $\varphi(x)$ wachse beständig, oder nehme beständig ab von $x=a$ bis $x=b$ ($\varphi'(x)$ habe dasselbe Zeichen innerhalb dieser Gränzen), so muss dasselbe auch mit z der Fall seyn, und es kann daher auch nur ein Werth von x aus der Gleichung folgen, indem sonst zu zwei verschiedenen Werthen von x derselbe Werth von z, oder zu zwei verschiedenen Werthen von z derselbe Werth von x gehören müsste, was unmöglich ist. Hat aber $\varphi(x)$ zwischen $x=a$ und $x=b$ Maxima oder Minima, so verhält sich die Sache freilich anders. Gesetzt es komme ein solcher Werth zwischen a und b vor für $x=c$, so wird von $x=a$ bis $x=c$ der eine der Werthe in z, für $x=c$ bis $x=b$ der andere gelten, d, h. wenn für $x=c: z=\gamma$, so wird man von $z=\alpha$ bis $z=\gamma$ den einen Werth von x in z, von $z=\gamma$ bis $z=\beta$ den andern setzen. Welchen, wird man in jedem Falle leicht entscheiden. — Man wird sich das hier Gesagte am Bequemsten an einer Kurve zur Anschauung bringen (Fig. 18). Sey Ox Axe der x, Oz der z, ferner $z=\varphi(x)$ die Gleichung der Kurve, Oa die Abszisse, die der unteren Gränze des Integrals ($x=a$) zugehört. Geht nun die obere Gränze des Integrals nicht über Ob hinaus, so wird zu jedem Werthe von x auch ein einziger reeller Werth von z gehören und umgekehrt, so dass für x aus $z=\varphi(x)$ auch nur ein einziger reeller Werth (innerhalb der betreffenden Gränzen) folgen kann. Liegt dagegen die obere Gränze des Integrals $\int_a^b f(x)\partial x$ zwischen Ob und Oc, so werden zu demselben Werthe von z mehrfach zwei verschiedene Werthe von x gehören, so dass jetzt nothwendig aus $\varphi(x)=z$ zwei, aber auch nur zwei reelle Werthe von x in z folgen müssen; davon wird der eine von $x=Oa$ bis $x=Ob$, der andere von $x=Ob$ an gelten, d. h. von $z=aA$ bis $z=bB$ der eine, von $z=bB$ an der andere. Liegt die obere Gränze des Integrals zwischen Oc und Od, so werden zu demselben z drei verschiedene Werthe von x gelten können, so dass also jetzt auch drei Werthe von x in z folgen müssen. Der eine gilt von $x=Oa$ bis $x=Ob$, d, h. von $z=aA$ bis $z=bB$, der andere von $x=Ob$ bis $x=Oc$, d. h. von $z=bB$ bis $z=cC$, der dritte gilt von hier an. Wie man diese Betrachung weiter verfolgen kann, ist leicht einzusehen.

Fig. 18.

V. Da (§. 36)

$$\int y\frac{\partial z}{\partial x}\partial x = yz - \int z\frac{\partial y}{\partial x}\partial x,$$

so ist auch

$$\int_a^b y\frac{\partial z}{\partial x}\partial x = (yz)_{x=b} - (yz)_{x=a} - \int_a^b z\frac{\partial y}{\partial x}\partial x,$$

worin durch $(yz)_{x=b}$ der Werth von yz für $x=b$ u. s. w. angedeutet wird.

VI. Die Grössen

$$\int_a^{\infty} f(x)\partial x, \quad \int_{-\infty}^{a} f(x)\partial x, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\partial x$$

sind die Werthe von $\int_a^{\frac{1}{\varepsilon}} f(x)\partial x$, $\int_{-\frac{1}{\varepsilon}}^{a} f(x)\partial x$, $\int_{-\frac{1}{\varepsilon}}^{\frac{1}{\varepsilon'}} f(x)\partial x$, wenn man darin ε und ε' unendlich klein werden lässt. Sind also letztere Grössen noch endlich und bestimmt, so sind es auch die ersten. Man wird also, wenn unendlich grosse Integrationsgränzen vorkommen, damit zunächst rechnen, wie mit endlichen Gränzen und sehen, ob das Ergebniss ein endliches ist oder nicht. Ist es endlich, so wird man es als richtig ansehen müssen; ist es unendlich, so kann man das bestimmte Integral in der Rechnung nicht weiter zulassen. Dabei ist natürlich immer vorausgesetzt, dass f(x) innerhalb der Integrationsgränzen endlich sey.

VII. Ist in dem Integrale $\int_a^b f(x)\partial x$ die Funktion f(x) so beschaffen, dass sie von $x=a$ bis $x=\frac{1}{2}(a+b)$ dieselben Werthe hat, wie von $x=\frac{1}{2}(a+b)$ bis zu $x=b$, gleichgiltig, in welcher Ordnung diese Werthe auf einander folgen, so ist (Nr. II):

$$\int_a^b f(x)\partial x = \int_a^{\frac{1}{2}(a+b)} f(x)\partial x + \int_{\frac{1}{2}(a+b)}^b f(x)\partial x,$$

und wenn $\Delta x = \frac{b-a}{2m} = \frac{\frac{1}{2}(a+b)-a}{m} = \frac{b-\frac{1}{2}(a+b)}{m}$:

$$\int_a^{\frac{1}{2}(a+b)} f(x)\partial x = \text{Gr.}\,\Delta x[f(a)+f(a+\Delta x)+\ldots+f(\tfrac{1}{2}(a+b)-\Delta x)],$$

$$\int_{\frac{1}{2}(a+b)}^b f(x)\partial x = \text{Gr.}\,\Delta x[f(\tfrac{1}{2}(a+b))+f(\tfrac{1}{2}(a+b)+\Delta x)+\ldots+f(b-\Delta x)];$$

mithin, da die Summen $f(a)+\ldots+f[\frac{1}{2}(a+b)-\Delta x]$, $f[\frac{1}{2}(a+b)]+\ldots\ldots+f(b-\Delta x)$ einander gleich:

$$\int_a^{\frac{1}{2}(a+b)} f(x)\partial x = \int_{\frac{1}{2}(a+b)}^b f(x)\partial x,$$

also

$$\int_a^b f(x)\partial x = 2\int_a^{\frac{1}{2}(a+b)} f(x)\partial x.$$

Wären dagegen von $x=a$ bis $x=\frac{1}{2}(a+b)$ die Werthe von f(x) zwar gleich denen von $x=\frac{1}{2}(a+b)$ bis $x=b$, jedoch immer mit entgegengesetztem Zeichen, so wäre offenbar

$$\int_a^{\frac{1}{2}(a+b)} f(x)\partial x = -\int_{\frac{1}{2}(a+b)}^b f(x)\partial x,\ \int_a^b f(x)\partial x = 0.$$

Es lassen sich diese Sätze leicht auch in anderer Weise nachweisen. Sey nämlich in dem Integral $\int_a^{\frac{1}{2}(a+b)} f(x)\partial x$ für x gesetzt $\frac{1}{2}(a+b)-z$, so ist $\frac{\partial x}{\partial z} = -1$ und für $x=a$ ist $z=\frac{1}{2}(b-a)$ für $x=\frac{1}{2}(a+b): z=0$, also nach IV:

$$\int_a^{\frac{1}{2}(a+b)} f(x)\partial x = -\int_{\frac{1}{2}(b-a)}^0 f[\tfrac{1}{2}(a+b)-z]\partial z.$$

Ferner setze man in dem Integral $\int_{\frac{1}{2}(a+b)}^{b} f(x)\partial x : x = \frac{1}{2}(a+b)+z$, also $\frac{\partial x}{\partial z} = 1$, und die Gränzen von $z: 0$ und $\frac{1}{2}(b-a)$, also

$$\int_{\frac{1}{2}(a+b)}^{b} f(x)\partial x = \int_0^{\frac{1}{2}(b-a)} f[\tfrac{1}{2}(b+a)+z]\partial z.$$

Demnach ist

$$\int_a^b f(x)\partial x = \int_0^{\frac{1}{2}(b-a)} f[\tfrac{1}{2}(a+b)+z]\partial z - \int_{\frac{1}{2}(b-a)}^{0} f[\tfrac{1}{2}(a+b)-z]\partial z$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}(b-a)} f[\tfrac{1}{2}(a+b)+z]\partial z + \int_0^{\frac{1}{2}(b-a)} f[\tfrac{1}{2}(a+b)-z]\partial z \quad (I)$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}(b-a)} \{f[\tfrac{1}{2}(a+b)+z] + f[\tfrac{1}{2}(a+b)-z]\}\partial z \quad (III).$$

In dem einen der beiden obigen Fälle ist $f[\frac{1}{2}(a+b)-z] = f[\frac{1}{2}(a+b)+z]$, im andern $f[\frac{1}{2}(a+b)-z] = -f[\frac{1}{2}(a+b)+z]$, also entweder

$$\int_a^b f(x)\partial x = 2\int_0^{\frac{1}{2}(b-a)} f[\tfrac{1}{2}(a+b)+z]\partial z \text{ oder } = 0.^*$$

Setzt man aber $\frac{1}{2}(a+b)+z = x$, $\frac{\partial z}{\partial x} = 1$. so sind die Gränzen von x für $z=0: \frac{1}{2}(a+b)$, für $z = \frac{1}{2}(b-a): b$, also

$$\int_a^b f(x)\partial x = 2\int_{\frac{1}{2}(a+b)}^{b} f(x)\partial x, \text{ oder } = 0.$$

Dass man eben so auch

$$\int_a^b f(x)\partial x = 2\int_a^{\frac{1}{2}(a+b)} f(x)\partial x$$

erhalten könnte, ist wohl klar.

Wie man ähnliche Sätze aufstellen kann, ist so leicht zu übersehen, dass wir uns dabei nicht weiter aufhalten wollen.

VIII. Sey $\psi(x)$ eine Funktion von x, die von $x=a$ bis $x=b$ endlich bleibt und immer dasselbe Zeichen beibehält, $\varphi(x)$ endlich von $x=a$ bis $x=b$, so ist

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x)\partial x = \varphi[a+\Theta(b-a)]\int_a^b \psi(x)\partial x,$$

wo Θ zwischen 0 und 1 liegt. Denn es ist (§. 48):

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x)\partial x = \text{Gr.}[\varphi(a)\psi(a)+\varphi(a+\Delta x)\psi(a+\Delta x)+\ldots+\varphi(b-\Delta x)\psi(b-\Delta x)]\Delta x.$$

Da nun die Grössen $\psi(a), \psi(a+\Delta x), \ldots, \psi(b-\Delta x)$ sämmtlich von demselben Zeichen sind, so liegt die Grösse

$$\text{Gr.}[\varphi(a)\psi(a)+\varphi(a+\Delta x)\psi(a+\Delta x)+\ldots+\varphi(b-\Delta x)\psi(b-\Delta x)]\Delta x$$

nothwendig zwischen den Werthen

---

* Eigentlich $= \int_0^{\frac{1}{2}(b-a)} 0\partial x$, und da $\int 0\partial x = C$, so ist $\int_0^{\frac{1}{2}(a-b)} 0\partial x = C - C = 0$.

$$\text{Gr.}\, \Delta x \varphi(a+r\Delta x)[\psi(a)+\psi(a+\Delta x)+\ldots+\psi(b-\Delta x)] = \varphi(a+r\Delta x)\int_a^b \psi(x)\partial x$$

und $$\text{Gr.}\, \Delta x \varphi(a+s\Delta x)[\psi(a)+\psi(a+\Delta x)+\ldots+\psi(b-\Delta x)] = \varphi(a+s\Delta x)\int_a^b \psi(x)\partial x,$$

wenn $\varphi(a+r\Delta x)$, $\varphi(a+s\Delta x)$ der grösste und kleinste der Werthe $\varphi(a)$, $\varphi(a+\Delta x), \ldots, \varphi(b-\Delta x)$ sind. Daraus folgt die Behauptung ganz unmittelbar. Für $\psi(x)=1$ folgt hieraus die Formel (44) in §. 48.

IX. Gesetzt endlich man solle $\int_a^b y\partial x$ bestimmen und es sey $y=f(x)$ von $x=a$ bis $x=c$; $y=F(x)$ von $x=c$ bis $x=b$, wo c zwischen a und b liegt, so hat man

$$\int_a^b y\partial x = \int_a^c y\partial x + \int_c^b y\partial x = \int_a^b f(x)\partial x + \int_c^b F(x)\partial x.$$

Wie man in anderen ähnlichen Fällen sich zu helfen habe, folgt hieraus unmittelbar.

Anm. Wir haben immer auf die wesentliche Bedingung aufmerksam gemacht, dass in $\int_a^b f(x)\partial x$ die Grösse $f(x)$ endlich seyn müsse innerhalb der Gränzen der Integration. Diese Bedingung ist auch ganz unerlässlich. Nichts desto weniger kann es sich ereignen, dass wir bestimmte Integrale betrachten werden, für die $f(x)$ an den Gränzen, d. h. für $x=a$ oder $x=b$ unendlich ist. Kann man nachweisen, dass man nach den allgemeinen Methoden für solche Integrale endliche Werthe erhält, so muss man dieselben gelten lassen, da die Gleichung (46) nur wesentlich voraussetzt, dass $f(x)$ innerhalb der Integrationsgränzen endlich sey. Doch gehört immer gehörige Vorsicht bei der Anwendung solcher Integrale, zumal bei deren Auswerthung dazu, nicht in Irrthümer zu verfallen.

§. 50.

Ehe wir zu Beispielen übergehen, wollen wir nochmals auf die schon in §. 49 gemachte Bemerkung hinweisen, dass nämlich die Formel (46) ganz nothwendig voraussetzt, nicht nur dass $f(x)$ endlich sey von $x=a$ bis $x=b$, sondern auch dass $F(x)$ innerhalb derselben Gränzen stetig verlaufe, d. h. dass wenn man x von a bis b sich stetig verlaufend denkt, auch die auf einander folgenden Werthe von $F(x)$ in derselben Lage sind. Im Allgemeinen wird dies nun auch wohl der Fall bei $F(x)$ seyn (§. 35), doch können Fälle eintreten, die als zweifelhaft erscheinen. Betrachten wir z. B. die Grösse $\text{arc}\left(\text{tg}=\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right)$ und lassen x von $-a$ bis $+a$ gehen, wobei wir immer $\text{arc}(\text{tg}=z)$ zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ wählen, so wird für $x=-a$, $\sqrt{a^2-x^2}=0$, also $\text{arc}\left(\text{tg}=\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right)=0$; eben so für $x=a$ wird $\text{arc}\left(\text{tg}=\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}\right)=0$. Aber die Grösse $\text{arc}\left(\text{tg}=\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right)$ verläuft nicht stetig von 0 zu 0. Denn lässt man x gehen von $-a$ bis 0, so wird $\text{arc}\left(\text{tg}=\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right)$ allerdings stetig verlaufen von 0 bis $-\frac{\pi}{2}$; von $x=0$ bis $x=+a$ aber wird sie

nicht von $-\frac{\pi}{2}$ nach 0 zurückkehren, da jetzt $\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}$ positiv ist, vielmehr wird sie für $x=0$ von $-\frac{\pi}{2}$ zu $+\frac{\pi}{2}$ überspringen und dann stetig von $\frac{\pi}{2}$ nach 0 zurückkehren. In diesem Falle muss man das Integral in zwei abtrennen. Da $\frac{\partial}{\partial x}\operatorname{arc}\left(tg=\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right)=-\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$, so ist also $\int\frac{\partial x}{\sqrt{a^2-x^2}}=-\operatorname{arc}\left(tg=\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right)$ und wenn man setzten wollte $\int_{-a}^{+a}\frac{\partial x}{\sqrt{a^2-x^2}}=-\operatorname{arc}(tg=0)+\operatorname{arc}(tg=0)=0$, so würde man einen wesentlichen Irrthum begehen. Man hat jetzt:

$$\int_{-a}^{+a}\frac{\partial x}{\sqrt{a^2-x^2}}=\int_{-a}^{0}\frac{\partial x}{\sqrt{a^2-x^2}}+\int_{0}^{+a}\frac{\partial x}{\sqrt{a^2-x^2}}=-\operatorname{arc}(tg=-\infty)+\operatorname{arc}(tg=0)$$
$$-\operatorname{arc}(tg=0)+\operatorname{arc}(tg=\infty)=\pi,$$

wie auch schon daraus folgt, dass (§. 49. VII)

$$\int_{-a}^{+a}\frac{\partial x}{\sqrt{a^2-x^2}}=2\int_{0}^{a}\frac{\partial x}{\sqrt{a^2-x^2}}=-2\operatorname{arc}(tg=0)+2\operatorname{arc}(tg=+\infty)=\pi.$$

Uebrigens ist auch $\int\frac{\partial x}{\sqrt{a^2-x^2}}=\operatorname{arc}\left(\sin=\frac{x}{a}\right)$, woraus, da von $x=-a$ bis $x=+a$, $\operatorname{arc}\left(\sin=\frac{x}{a}\right)$ stetig von $-\frac{\pi}{2}$ zu $+\frac{\pi}{2}$ verläuft, folgt $\int_{-a}^{+a}\frac{\partial x}{\sqrt{a^2-x^2}}=\operatorname{arc}(\sin=1)-\operatorname{arc}(\sin=-1)=\pi$. Man kann überdiess noch bemerken, dass wir in §. 5 in Wahrheit nicht gezwungen waren, $\operatorname{arc}(tg=x)$ zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ anzunehmen, indem immerhin $\cos^2 y=\frac{1}{1+tg^2 y}$ seyn wird; wohl aber wäre nicht $\cos y=+\sqrt{1-\sin^2 y}$, wenn man nicht $\operatorname{arc}(\sin=x)$ zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ nähme.

I. Da $\int x^m\partial x=\frac{x^{m+1}}{m+1}$, so ist (da bei $m+1>0$, $x^{m+1}=0$, für $x=0$)

$$\int_0^1 x^m\partial x=\frac{1}{m+1},\quad m+1>0.$$

Da ferner (§. 36) $\int\frac{\partial x}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arc}\left(tg=\frac{x}{a}\right)$, und bei $a>0$ für $x=\infty$ nothwendig $\operatorname{arc}\left(tg=\frac{x}{a}\right)=\frac{\pi}{2}$, so ist

$$\int_0^\infty\frac{\partial x}{a^2+x^2}=\frac{\pi}{2a},\quad\int_0^a\frac{\partial x}{a^2+x^2}=\frac{\pi}{4a},\quad a>0.$$

Eben so (da e^{-ax} Null für $x=\infty$, wenn $a>0$):

$$\int_0^\infty e^{-ax}\partial x=\frac{1}{a},\ a>0;\quad\int_0^\pi\sin ax\,\partial x=\frac{1-\cos a\pi}{a},\quad\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\,\partial x=\frac{\pi}{4}.$$

II. Nach §. 42 ist

$$\int \sin^{2n} x \,\partial x = -\frac{\sin^{2n-1} x \cos x}{2n} + \frac{2n-1}{2n}\int \sin^{2n-2} x \,\partial x,$$

demnach da für $x = \frac{\pi}{2}$, $\cos x = 0$, für $x = 0$: $\sin^{2n-1} x = 0$, nach §. 49, V:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x \,\partial x = \frac{2n-1}{2n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-2} x \,\partial x.$$

Eben so:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x \,\partial x = \frac{2n}{2n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1} x \,\partial x, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x \,\partial x = \frac{2n-1}{2n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-2} x \,\partial x,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} x \,\partial x = \frac{2n}{2n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-1} x \,\partial x.$$

Diesen Reduktionsformeln gemäss ist, da $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \partial x = \frac{\pi}{2}$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \,\partial x = 1$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \,\partial x = 1$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x \,\partial x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x \,\partial x = \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 1}{2n(2n-2)\ldots 2}\cdot\frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} x \,\partial x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} x \,\partial x = \frac{2n(2n-2)\ldots 2}{(2n+1)(2n-1)\ldots 3}.$$

III. Setzt man in §. 43, IV $-a$ für a, so ist

$$\int e^{-ax} \sin^n x \,\partial x = \frac{e^{-ax}\sin^{n-1} x\,(a\sin x + n\cos x)}{a^2+n^2} + \frac{n(n-1)}{n^2+a^2}\int e^{-ax}\sin^{n-2} x \,\partial x,$$

$$\int e^{-ax} \cos^n x \,\partial x = \frac{e^{-ax}\cos^{n-1} x\,(n\sin x - a\cos x)}{a^2+n^2} + \frac{n(n-1)}{n^2+a^2}\int e^{-ax}\cos^{n-2} x \,\partial x.$$

Da für $x = \infty$: $e^{-ax} = 0$, wenn $a > 0$, und sowohl $(a\sin x + n\cos x)\sin^{n-1} x$ als $(n\sin x - a\cos x)\cos^{n-1} x$ für $x = \infty$ nicht ∞ sind; da ferner für $x = 0$: $\sin^{n-1} x = 0$, wenn $n > 1$, und für $x = \frac{\pi}{2}$: $\cos^{n-1} x = 0$, wenn $n > 1$, so folgt hieraus;

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} \sin^n x \,\partial x = \frac{n(n-1)}{a^2+n^2}\int_0^{\infty} e^{-ax}\sin^{n-2} x \,\partial x, \qquad n > 1,\ a > 0.$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} e^{-ax} \cos^n x \,\partial x = \frac{n(n-1)}{a^2+n^2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} e^{-ax}\cos^{n-2} x \,\partial x.$$

Unterscheidet man ein gerades und ungerades n, und beachtet, dass (§. 43):

$$\int_0^{\infty} e^{-ax}\partial x = \frac{1}{a}, \quad \int_0^{\infty} e^{-ax}\sin x \,\partial x = \frac{1}{a^2+1}, \quad \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} e^{-ax}\partial x = \frac{e^{-\frac{a\pi}{2}}}{a},$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\infty} e^{-ax}\cos x \,\partial x = \frac{-e^{-\frac{a\pi}{2}}}{1+a^2},$$

so ist

$$\int_0^\infty e^{-ax}\sin^{2m}x\,\partial x = \frac{2m(2m-1)\ldots 2.1}{[a^2+(2m)^2][a^2+(2m-2)^2]\ldots[a^2+2^2]}\cdot\frac{1}{a},$$

$$\int_0^\infty e^{-ax}\sin^{2m+1}x\,\partial x = \frac{(2m+1)2m\ldots 3.2}{[a^2+(2m+1)^2][a^2+(2m-1)^2]\ldots[a^2+3^2]}\cdot\frac{1}{a^2+1},$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^\infty e^{-ax}\cos^{2m}x\,\partial x = \frac{2m(2m-1)\ldots.2.1}{[a^2+(2m)^2][a^2+(2m-2)^2]\ldots.[a^2+2^2]}\cdot\frac{e^{-\frac{a\pi}{2}}}{a},$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^\infty e^{-ax}\cos^{2m+1}x\,\partial x = -\frac{(2m+1)(2m)\ldots 3.2}{[a^2+(2m+1)^2][a^2+(2m-1)^2]\ldots[a^2+3^2]}\cdot\frac{e^{-\frac{a\pi}{2}}}{a^2+1},\ a>0.$$

Ganz eben so aus §. 43. III:

$$\int_0^\infty e^{-ax}\sin bx\,\partial x = \frac{b}{a^2+b^2},\quad \int_0^\infty e^{-ax}\cos bx\,\partial x = \frac{a}{a^2+b^2},\ a>0.$$

IV. Soll das Integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\partial x}{a+b\cos x}$$

ermittelt werden, so hat man sich zunächst an die Formeln in §. 44. III zu halten. Sind nun a und b von demselben Zeichen und zwar beide positiv, so wird $a+b\cos x$ nicht 0 von $x=0$ bis $x=\frac{\pi}{2}$, so dass das bestimmte Integral zulässig ist. Wären aber a und b von verschiedenem Zeichen, so würde $a+b\cos x$ Null für $\cos x=\frac{-a}{b}$, d. h. für einen Werth von x, der zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ liegt; also ist das Integral unzulässig. Sind a und b negativ, so hat das Integral denselben Werth, wie für positive a und b, nur von entgegengesetztem Zeichen, so dass es genügt, a und b als positiv anzusehen. Sey also $a>0$, $b>0$, so ist

$$\int\frac{\partial x}{a+b\cos x} = \begin{cases} -\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\,\mathrm{arc}\left(\mathrm{tg}=\mathrm{cotg}\frac{x}{2}\cdot\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}\right),\ a>b,\\ \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\,l\left(\frac{\sqrt{b-a}\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}+\sqrt{b+a}}{\sqrt{b-a}\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}-\sqrt{b+a}}\right),\ b>a,\\ \frac{1}{a}\mathrm{tg}\frac{x}{2},\ b=a.\end{cases}$$

Demnach, da $\mathrm{tg}\frac{x}{2}$ und $\mathrm{cotg}\frac{x}{2}$ stetig verlaufen von $x=0$ bis $x=\frac{\pi}{2}$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\partial x}{a+b\cos x} = -\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\,\mathrm{arc}\left(\mathrm{tg}=\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}\right)+\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\,\frac{\pi}{2} =$$

$$\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\left[\frac{\pi}{2}-\mathrm{arc}\left(\mathrm{tg}=\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}\right)\right] = \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\mathrm{arc}\left(\mathrm{tg}=\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\right)^{*},\ a>b>0:$$

* Es ist immer $\mathrm{arc}\,(\mathrm{tg}=z)+\mathrm{arc}\left(\mathrm{tg}=\frac{1}{z}\right)=\frac{\pi}{2}$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial x}{a+b\cos x} = \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\, l\left(\frac{\sqrt{b-a}+\sqrt{b+a}}{\sqrt{b-a}-\sqrt{b+a}}\right) - \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\, l(-1)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\, l\left(\frac{\sqrt{b+a}+\sqrt{b-a}}{\sqrt{b+a}-\sqrt{b-a}}\right) = \frac{2}{\sqrt{b^2-a^2}}\, l\left(\frac{\sqrt{b+a}+\sqrt{b-a}}{\sqrt{2a}}\right),\ b>a>0,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial x}{a+b\cos x} = \frac{1}{a},\ a=b>0.$$

V. Es ist, wie man aus §. 36 leicht findet:

$$\int x^n e^{-x} \partial x = -x^n e^{-x} + n\int x^{n-1} e^{-x} \partial x.$$

Ist nun $n>0$, so ist für $x=0$: $x^n e^{-x}=0$, und für $x=\infty$: $x^n e^{-x}=0$, wie sich aus §. 22. II ergibt. Demnach

$$\int_0^\infty x^n e^{-x} \partial x = n\int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} \partial x,$$

woraus, da $\int_0^\infty e^{-x}\partial x = 1$:

$$\int_0^\infty e^{-x} x^n \partial x = n.(n-1)(n-2)\ldots 1,\ n>0.$$

So folgt aus §. 36. IV auch:

$$\int_0^1 x^n\, l(x)\partial x = -\frac{1}{(n+1)^2},\ n+1>0\ (\S.\ 22).$$

VI. Es ist (§. 49, VII):

$$\int_0^\pi \sin x\,\partial x = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,\partial x,\ \int_0^\pi \cos x\,\partial x = 0,\ \int_0^\pi \sin^n x\,\partial x = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,\partial x,$$

$$\int_0^\pi \cos^{2n} x\,\partial x = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x\,\partial x,\ \int_0^\pi \cos^{2n+1} x\,\partial x = 0,\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial x}{a^2+x^2} = 2\int_0^\infty \frac{\partial x}{a^2+x^2},$$

$$\int_{-a}^{+a} \frac{\partial x}{\sqrt{a^2+x^2}} = 2\int_0^a \frac{\partial x}{\sqrt{a^2+x^2}},\ \int_0^{2\pi} \sin^{2n} x\,\partial x = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} x\,\partial x,\ \int_0^{2} \sin^{2n+1} x\,\partial x = 0,$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,\partial x = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,\partial x,\ \int_{-a}^{+a} f(x^{2n})\partial x = 2\int_0^a f(x^{2n})\partial x,\ \int_{-a}^{+a} (Ax^3+Bx^5)\partial x = 0.$$

VII. Man soll

$$\int_{-a}^{+a} \frac{\partial x}{(r^2-x^2)\sqrt{a^2-x^2}}$$

worin $r>a>0$ ist, ermitteln. Man setze $x=a\cos\varphi$, was immer gestattet ist, da ja $x<a$, so ist (§. 44):

$$\int \frac{\partial x}{(r^2-x^2)\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{-a\sin\varphi\,\partial\varphi}{(r^2-a^2\cos^2\varphi)\sqrt{a^2-a^2\cos^2\varphi}} = -\int \frac{\partial\varphi}{r^2-a^2\cos^2\varphi}$$

$$= -\frac{1}{2r}\int\left(\frac{1}{r+a\cos\varphi}+\frac{1}{r-a\cos\varphi}\right)\partial x = -\frac{1}{2r}\left[-\frac{2}{\sqrt{r^2-a^2}}\,\text{arc}\left(\text{tg} = \sqrt{\frac{r+a}{r-a}}\,\text{cotg}\frac{\varphi}{2}\right)\right.$$

$$\left.-\frac{2}{\sqrt{r^2-a^2}}\,\text{arc}\left(\text{tg} = \sqrt{\frac{r-a}{r+a}}\,\text{cotg}\frac{\varphi}{2}\right)\right] = \frac{1}{r\sqrt{r^2-a^2}}\left[\text{arc}\left(\text{tg} = \sqrt{\frac{r+a}{r-a}}\,\text{cotg}\frac{\varphi}{2}\right)\right.$$

$+\operatorname{arc}\left(\operatorname{tg}=\sqrt{\frac{r-a}{r+a}}\operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2}\right)\Big]$.

Für $x=-a$ ist $\cos\varphi=-1$, also $\varphi=\pi$; für $x=+a$ ist $\cos\varphi=+1$, also $\varphi=0$, so dass man φ von π bis 0 zu nehmen hat (§. 49, IV). Für $\varphi=\pi$ ist $\operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2}=\operatorname{cotg}\frac{\pi}{2}=0$; für $\varphi=0$ ist $\operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2}=\operatorname{cotg}0=\infty$, also folgt, da alle Grössen von $\varphi=\pi$ bis $\varphi=0$ stetig verlaufen:

$$\int_{-a}^{+a}\frac{\partial x}{(r^2-x^2)\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{1}{r\sqrt{r^2-a^2}}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{r\sqrt{r^2-a^2}}.$$

VIII. Sey $f\left(ax+\frac{b}{x}\right)$ eine Funktion von $ax+\frac{b}{x}$ (die man also erhält, wenn man in $f(z)$ für z setzt $ax+\frac{b}{x}$) und sey das Integral

$$\int_0^\infty f\left(ax+\frac{b}{x}\right)\partial x$$

vorgelegt, von dem wir annehmen wollen, dass es zulässig sey, d. h. dass $f\left(ax+\frac{b}{x}\right)$ endlich sey von $x=0$ bis $x=\infty$. Man setze nun

$$ax+\frac{b}{x}=z,\quad x=\frac{z}{2a}\pm\frac{1}{2a}\sqrt{z^2-4ab},\quad \frac{\partial x}{\partial z}=\frac{1}{2a}\pm\frac{z}{2a\sqrt{z^2-4ab}},$$

so ist (§. 36):

$$\int f\left(ax+\frac{b}{x}\right)\partial x=\frac{1}{2a}\int\left(1\pm\frac{z}{\sqrt{z^2-4ab}}\right)f(z)\partial z,$$

und es frägt sich nun, welches der zwei Zeichen im bestimmten Integral zuzulassen ist (§. 49, IV). Setzen wir a und b positiv voraus, so ist $ax+\frac{b}{x}$ unendlich für $x=0$ und $x=\infty$, aber immer positiv innerhalb dieser Gränzen; diese Grösse erreicht ihren kleinsten Werth für $a-\frac{b}{x^2}=0$ (§. 24), d. h. $x=\sqrt{\frac{b}{a}}$; von $x=0$ bis $x=\sqrt{\frac{b}{a}}$ nimmt also $ax+\frac{b}{x}$, mithin auch z, fortwährend ab (von ∞ bis $a\sqrt{\frac{b}{a}}+b\sqrt{\frac{a}{b}}=2\sqrt{ab}$); von $x=\sqrt{\frac{b}{a}}$ bis $x=\infty$ nimmt dagegen $ax+\frac{b}{x}$ (also auch z) fortwährend zu und zwar von $2\sqrt{ab}$ bis ∞. Demnach muss z gehen: erstens abnehmend von $z=\infty$ bis $z=2\sqrt{ab}$ $\left(x \text{ von Null bis } \sqrt{\frac{b}{a}}\right)$, zweitens zunehmend von $z=2\sqrt{ab}$ bis $z=\infty$ (x von $\sqrt{\frac{b}{a}}$ bis ∞).

Soll aber für $z=\infty$ die Grösse $x=0$ seyn, so ist dies nur möglich, wenn das untere Zeichen gilt, da $\frac{z}{2a}+\frac{1}{2a}\sqrt{z^2-4ab}$ für $z=\infty$ nicht 0 ist; soll für $z=\infty$ die Grösse $x=\infty$ seyn, so muss das obere Zeichen gelten. Demnach:

von $x=0$ bis $x=\sqrt{\frac{b}{a}}$, d. h. von $z=\infty$ bis $z=2\sqrt{ab}$ gilt das untere Zeichen,

von $x=\sqrt{\frac{b}{a}}$ bis $x=\infty$, d. h. von $z=2\sqrt{ab}$ bis $z=\infty$ gilt das obere Zeichen,

und man sieht leicht, dass dann wirklich allen Bedingungen Genüge geschieht. Somit ist

$$\int_0^\infty f\left(ax+\frac{b}{x}\right)\partial x = \int_0^{\sqrt{\frac{b}{a}}} f\left(ax+\frac{b}{x}\right)\partial x + \int_{\sqrt{\frac{b}{a}}}^\infty f\left(ax+\frac{b}{x}\right)\partial x$$

$$= \frac{1}{2a}\int_\infty^{2\sqrt{ab}} f(z)\left(1-\frac{z}{\sqrt{z^2-4ab}}\right)\partial z + \frac{1}{2a}\int_{2\sqrt{ab}}^\infty f(z)\left(1+\frac{z}{\sqrt{z^2-4ab}}\right)\partial z$$

$$= \frac{1}{2a}\int_\infty^{2\sqrt{ab}} f(z)\partial z - \frac{1}{2a}\int_\infty^{2\sqrt{ab}} \frac{zf(z)}{\sqrt{z^2-4ab}}\partial z + \frac{1}{2a}\int_{2\sqrt{ab}}^\infty f(z)\partial z + \frac{1}{2a}\int_{2\sqrt{ab}}^\infty \frac{zf(z)\partial z}{\sqrt{z^2-4ab}},$$

d. h. gemäss §. 49, I:

$$\int_0^\infty f\left(ax+\frac{b}{x}\right)\partial x = \frac{1}{a}\int_{2\sqrt{ab}}^\infty \frac{zf(z)\partial z}{\sqrt{z^2-4ab}}.$$

Letzteres Integral lässt sich nochmals umformen. Setzt man nämlich $z^2-4ab=u^2$, $z\frac{\partial z}{\partial u}=u$, $\sqrt{z^2-4ab}=u$, so sind die Gränzen nach u : 0 und ∞, so dass

$$\int_0^\infty f\left(ax+\frac{b}{x}\right)\partial x = \frac{1}{a}\int_0^\infty \frac{uf(\sqrt{u^2+4ab})\partial u}{u} = \frac{1}{a}\int_0^\infty f(\sqrt{u^2+4ab})\partial u, \text{ (a und b pos.).}$$

IX. Sey das Integral $\int_0^{2\pi} f(a\cos x + b\sin x)\,\partial x$ umzuformen, wobei a und b positiv sind.

Setzt man $a\cos x + b\sin x = z$, so wird, wenn $\frac{b}{a} = \operatorname{tg}\varrho$, z ein Maximum erreichen für $x=\varrho\left(<\frac{\pi}{2}\right)$, und alsdann $=\sqrt{a^2+b^2}$ seyn, während für $x=\pi+\varrho$ das Minimum von $z=-\sqrt{a^2+b^2}$ ist. Sey also $\sqrt{a^2+b^2}=k$, so ist

z stetig von $x=0$ bis $x=\varrho$, und hat die Gränzwerthe a und k,
z stetig von $x=\varrho$ bis $x=\pi+\varrho$, und hat die Gränzwerthe k und $-k$,
z stetig von $x=\pi+\varrho$ bis $x=2\pi$, und hat die Gränzwerthe $-k$ und a.

Ferner ist $z = a\cos x + b\sin x = a[\cos x + \operatorname{tg}\varrho\sin z] = \frac{a\cos(\varrho-x)}{\cos\varrho}$, $\cos(\varrho-x) = \frac{z\cos\varrho}{a}$; $\frac{\partial x}{\partial z} = \frac{1}{b\cos x - a\sin x} = \frac{1}{a[\operatorname{tg}\varrho\cos x - \sin x]} = \frac{\cos\varrho}{a\sin(\varrho-x)} = \pm\frac{\cos\varrho}{a\sqrt{1-\frac{z^2\cos^2\varrho}{a^2}}}$ $= \pm\frac{\cos\varrho}{\sqrt{a^2-z^2\cos^2\varrho}}$. Hier gilt das obere Zeichen von $x=0$ bis $x=\varrho$, und $x=\pi+\varrho$ bis $x=2\pi$, da dann $\sin(\varrho-x)>0$; von $x=\varrho$ bis $x=\pi+\varrho$ gilt das untere Zeichen. Man hat also

$$\int_0^{2\pi} f(a\cos x+b\sin x)\partial x = \int_0^\varrho f(a\cos x+b\sin x)\partial x + \int_\varrho^{\pi+\varrho} f(a\cos x+b\sin x)\partial x$$

$$+\int_{\pi+\varrho}^{2\pi} f(a\cos x+b\sin x)\,\partial x$$

$$=\int_a^k \frac{f(z)\cos\varrho\,\partial z}{\sqrt{a^2-z^2\cos^2\varrho}}-\int_k^{-k} \frac{f(z)\cos\varrho\,\partial z}{\sqrt{a^2-z^2\cos^2\varrho}}+\int_{-k}^{a} \frac{f(z)\cos\varrho\,\partial z}{\sqrt{a^2-z^2\cos^2\varrho}}$$

$$=\int_{-k}^{+k} \frac{f(z)\cos\varrho\,\partial z}{\sqrt{a^2-z^2\cos^2\varrho}}+\int_{-k}^{+k} \frac{f(z)\cos\varrho\,\partial z}{\sqrt{a^2-z^2\cos^2\varrho}}=2\int_{-k}^{+k} \frac{f(z)\cos\varrho\,\partial z}{\sqrt{a^2-z^2\cos^2\varrho}} \quad (§. 49, II, I).$$

Da $z\cos\varrho < a \left(\text{weil } \cos\varrho=\frac{a}{k}\right)$, so sey $z\cos\varrho = a\sin\varphi$, also $\frac{\partial z}{\partial\varphi}=\frac{a\cos\varphi}{\cos\varrho}$ $=k\cos\varphi$, so sind die Gränzen von φ: $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$, und da $z=k\sin\varphi$, so ist endlich

$$\int_0^{2\pi} f(a\cos x+b\sin x)\,\partial x = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} f(k\sin\varphi)\,\partial\varphi,\quad k=\sqrt{a^2+b^2}.$$

X. Ist das Integral $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin 2x)\cos x\,\partial x$ vorgelegt, so hat man (§. 49, II):

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin 2x)\cos x\,\partial x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\sin 2x)\cos x\,\partial x + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f(\sin 2x)\cos x\,\partial x.$$

Da aber $\sin 2x$ von $x=\frac{\pi}{4}$ bis $x=\frac{\pi}{2}$ ganz dieselben Werthe hat, wie $\sin 2x$ von $x=\frac{\pi}{4}$ bis 0, und dessgleichen $\cos x$ von $x=\frac{\pi}{4}$ bis $\frac{\pi}{2}$ dieselben Werthe wie $\sin x$ von $x=\frac{\pi}{4}$ bis 0, so ist

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} f(\sin 2x)\cos x\,\partial x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\sin 2x)\sin x\,\partial x,$$

was man auch findet, wenn man $x=\frac{\pi}{2}-z$ setzt. Also:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin 2x)\cos x\,\partial x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\sin 2x)(\cos x+\sin x)\,\partial x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(\sin 2x)\sqrt{1+\sin 2x}\,\partial x.$$

Man setze nun $\sin 2x=\cos^2 z$, was man darf, da $\sin 2x$ immer positiv ist von 0 bis $\frac{\pi}{4}$ für x, so ist

$$\cos 2x\frac{\partial x}{\partial z}=-\sin z\cos z,\quad \frac{\partial x}{\partial z}=-\frac{\sin z\cos z}{\cos 2x}.$$

Die Grösse $\cos 2x$ ist positiv von $x=0$ bis $x=\frac{\pi}{4}$, also ist

$$\frac{\partial x}{\partial z}=-\frac{\sin z\cos z}{\sqrt{1-\sin^2 2x}}=-\frac{\sin z\cos z}{\sqrt{1-\cos^4 z}}=-\frac{\sin z\cos x}{\sqrt{1-\cos^2 z}\sqrt{1+\cos^2 z}}=-\frac{\cos z}{\sqrt{1+\cos^2 z}},$$

und mithin

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin 2x)\cos x\,\partial x = -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{f(\cos^2 z)\sqrt{1+\cos^2 z}\cos z\,\partial z}{\sqrt{1+\cos^2 z}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos^2 z)\cos z\,\partial z,$$

so dass
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin 2x)\cos x\,\partial x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos^2 x)\cos x\,\partial x.$$

XI. Es ist allgemein

$$f(a+h)-f(a)=\int_a^{a+h} f'(x)\,\partial x.$$

Setzt man hier

$$x=a+h-z,\ \frac{\partial x}{\partial z}=-1,\ z \text{ von } h \text{ bis } 0,$$

so ist
$$\int_a^{a+h} f'(x)\,\partial x = -\int_h^0 f'(a+h-z)\,\partial z = \int_0^h f'(a+h-z)\,\partial z.$$

Aber (§. 49, V und §. 36):

$$\int f'(a+h-z)\,\partial z = z f'(a+h-z) + \int z f''(a+h-z)\,\partial z,$$

$$\int_0^h f'(a+h-z)\,\partial z = h f'(a) + \int_0^h z f''(a+h-z)\,\partial z;$$

$$\int z f''(a+h-z)\,\partial z = \frac{z^2}{2} f''(a+h-z) + \int \frac{z^2}{2} f^3(a+h-z)\,\partial z,$$

$$\int_0^h z f''(a+h-z)\,\partial z = \frac{h^2}{2} f''(a) + \int_0^h \frac{z^2}{2} f^3(a+h-z)\,\partial z;$$

$$\vdots$$

$$\int \frac{z^{n-1}}{2..(n-1)} f^n(a+h-z)\,\partial z = \frac{z^n}{2\ldots n} f^n(a+h-z) + \int \frac{z^n}{2\ldots n} f^{n+1}(a+h-z)\,\partial z,$$

$$\int_0^h \frac{z^{n-1}}{2.3\ldots(n-1)} f^n(a+h-z)\,\partial z = \frac{h^n}{2.3..n} f^n(a) + \int_0^h \frac{z^n}{2\ldots n} f^{n+1}(a+h-z)\,\partial z.$$

Demnach

$$f(a+h)-f(a) = h f'(a) + \frac{h^2}{2} f''(a) + \frac{h^3}{2.3} f^3(a) + \ldots + \frac{h^n}{2.3\ldots n} f^n(a) + \int_0^h \frac{z^n}{2.3..n} f^{n+1}(a+h-z)\,\partial z.$$

Da z^n von $z=0$ bis $z=h$ immer dasselbe Zeichen behält, so ist (§. 49, VIII):

$$\int_0^h \frac{z^n}{2.3..n} f^{n+1}(a+h-z)\,\partial z = f^{n+1}(a+h-\Theta h)\int_0^h \frac{z^n}{2.3..n}\,\partial z = \frac{h^{n+1}}{2.3..(n+1)} f^{n+1}[a+(1-\Theta)h].$$

Die Grösse Θ ist zwischen 0 und 1; also eben so $1-\Theta$. Setzt man desshalb kurzweg Θ für $1-\Theta$, so ist

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1} f'(a) + \frac{h^2}{1.2} f^2(a) + \ldots + \frac{h^n}{1.2..n} f^n(a) + \frac{h^{n+1}}{1.2..(n+1)} f^{n+1}(a+\Theta h).$$

Dass dieser Satz nichts Anderes ist, als (27) in §. 15 ist ganz unmittelbar ersichtlich, so dass dieser wichtige Satz hier in einer vom Früheren ganz unabhängigen Weise abgeleitet ist. Die Voraussetzung, die wir dabei machen müssen, ist, dass $f^{n+1}(a+h-z)$ endlich sey von $z=0$ bis $z=h$, d. h. $f^{n+1}(z)$ endlich von $z=a$ bis $z=a+h$, da sonst das bestimmte Integral nicht zulässig wäre.

Man kann dem Restgliede noch eine andere Form geben. Nach §. 48, Formel (44) ist auch

$$\int_0^h z^n f^{n+1}(a+h-z)\partial z = h\,.\,(\Theta h)^n f^{n+1}(a+h-\Theta h),$$

also wenn man $1-\Theta$ für Θ setzt:

$$\int_0^h z^n f^{n+1}(a+h-z)\partial z = (1-\Theta)^n h^{n+1} f^{n+1}(a+\Theta h), \quad \text{und}$$

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1}f'(a) + \frac{h^2}{1.2}f''(a) + \ldots + \frac{h^n}{1\ldots n}f^n(a) + \frac{(1-\Theta)^n h^{n+1}}{1.2\ldots n}f^{n+1}(a+\Theta h).$$

Diese Formel ist dieselbe mit (27′) in §. 15.

XII. Gesetzt man kenne die Summen der beiden Reihen

$$A+Bx+Cx^2+\ldots\ldots = X,$$

$$A'+\frac{B'}{x}+\frac{C'}{x^2}+\ldots\ldots = X',$$

wo X und X' Funktionen von x sind, so erhält man, indem man beide multiplizirt, eine Reihe, in der Glieder mit negativen und mit positiven Potenzen von x vorkommen, so wie eine Anzahl Glieder, die kein x enthalten. Diese letzteren sind offenbar

$$AA'+BB'+CC'+\ldots\ldots,$$

während die ersteren die Form $\frac{\alpha}{x^n}$, die zweiten βx^n haben, wo $n=1, 2, \ldots\ldots$ ist. Man hat also

$$XX' = AA'+BB'+CC'+\ldots\ldots+\Sigma\frac{\alpha}{x^n}+\Sigma\beta x^n,$$

wo die Σ die Summen der Glieder erster und zweiter Art bezeichnen. Man setze nun hier (§. 17)

$$x = \cos z + i\sin z \text{ und } x = \cos z - i\sin z,$$

wodurch XX' zu Z und Z' werde, so ist wegen

$$\frac{1}{(\cos z \pm i\sin z)^n} = \cos nz \mp i\sin nz,\ (\cos z \pm i\sin z)^n = \cos nz \pm i\sin nz:$$

$$Z = AA'+BB'+\ldots+\Sigma\alpha(\cos nz - i\sin nz)+\Sigma\beta(\cos nz + i\sin nz),$$

$$Z' = AA'+BB'+\ldots+\Sigma\alpha(\cos nz + i\sin nz)+\Sigma\beta(\cos nz - i\sin nz),$$

also

$$Z+Z' = 2(AA'+BB'+\ldots)+2\Sigma\alpha\cos nz+2\Sigma\beta\cos nz,$$

und folglich da

$$\int_0^\pi \cos nz\,\partial z = 0,$$

$$AA'+BB'+CC'+\ldots\ldots = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi (Z+Z')\,\partial z,$$

vermittelst welcher Gleichung die Summe der (endlichen oder unendlichen) Reihe erster Seite gefunden wird.

Anm. Wir haben bei den hier mitgetheilten Beispielen immer darauf gesehen, dass die

unbestimmte Integration ausgeführt werden konnte, so dass also das bestimmte Integral unter geschlossener Form erschien. Es versteht sich jedoch von selbst, dass man von der in §. 46 angegebenen Integration mittelst unendlicher Reihen unbedingt Gebrauch machen darf, unter der Voraussetzung, die erscheinende Reihe sey konvergent. So wäre,

$$\int_0^1 \frac{\partial x}{\sqrt{(1-e^2x^2)(1-\varepsilon^2x^2)}} = \int_0^1 \frac{\partial x}{\sqrt{1-\varepsilon^2x^2}} + \frac{1}{2}e^2\int_0^1 \frac{x^2\partial x}{\sqrt{1-\varepsilon^2x^2}} + \frac{1.3}{2.4}e^4\int_0^1 \frac{x^4\partial x}{\sqrt{1-\varepsilon^2x^2}} + \dots\dots,$$

wo nun die noch vorkommenden Integrale leicht zu bestimmen sind.

Umgekehrt lässt sich aus bestimmten Integralen auch auf die Konvergenz unendlicher Reihen ein Rückschluss machen. Sey nämlich

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots\dots \qquad (a)$$

eine unendliche Reihe, in der wir voraussetzen, dass von dem Gliede u_m an (wo m beliebig gross seyn kann) alle Glieder positiv sind und von da an abnehmen. Da u_n eine Funktion von n seyn wird, die wir $= f(n)$ setzen wollen, so heisst die Reihe auch

$$f(1) + f(2) + f(3) + \dots\dots, \qquad (a')$$

und es wird dieselbe konvergiren, wenn $f(m) + f(m+1) + \dots$ endlich ist; divergiren, wenn diese Grösse unendlich gross ist. Gesetzt nun, $f(x)$ sey eine stetige Funktion von x, so ist, da $f(x)$ abnimmt mit wachsendem x, für $b > a$ nach §. 48, Formel (44):

$$\int_a^b f(x)\partial x = (b-a)f[a+\Theta(b-a)], \text{ d. h.} \int_a^b f(x)\partial x > (b-a)f(b) \text{ und } < (b-a)f(a).$$

Demnach ist

$$\int_m^{m+1} f(x)\partial x > f(m+1), \int_{m+1}^{m+2} f(x)\partial x > f(m+2), \int_{m+2}^{m+3} f(x)\partial x > f(m+3), \dots\dots,$$
$$< f(m), \qquad < f(m+1), \qquad < f(m+2), \dots\dots$$

Daraus folgt, wenn man §. 49, II beachtet:

$$\int_m^{\infty} f(x)\partial x < f(m) + f(m+1) + \dots, \quad \int_m^{\infty} f(x)\partial x > f(m+1) + f(m+2) + \dots\dots$$

Ist demnach $\int_m^{\infty} f(x)\partial x$ endlich, so ist es auch $f(m+1) + f(m+2) + \dots$, d. h. die Reihe (a′) konvergirt; ist $\int_m^{\infty} f(x)\partial x$ unendlich, so ist es auch $f(m) + f(m+1) + \dots$, d. h. die Reihe (a′) divergirt.

Ist z. B. $f(n) = \frac{1}{n^a}$, so ist $\int_m^{\infty} \frac{\partial x}{x^a} = \frac{1}{1-a}\cdot\frac{1}{\infty^{a-1}} - \frac{1}{1-a}\cdot\frac{1}{m^{a-1}}$. Da aber $\frac{1}{\infty^{a-1}}$ für $a < 1$ unendlich ist, dagegen 0 für $a > 1$, so konvergirt die Reihe $\frac{1}{1^a} + \frac{1}{2^a} + \frac{1}{3^a} + \dots$ für $a > 1$, divergirt für $a < 1$. Für $a = 1$ ist $\int \frac{\partial x}{x} = l(x)$, was für $x = \infty$ zu ∞ wird, so dass die Reihe noch divergirt für $a = 1$. (Vergl. „Grundzüge" S. 25.)

Ist $f(n) = \frac{l(n)}{n}$, so ist $\int \frac{l(x)}{x}\partial x = \frac{1}{2}[l(x)]^2$, welche Grösse für $x = \infty$ zu ∞ wird, so dass die unendliche Reihe $\frac{l(1)}{1} + \frac{l(2)}{2} + \dots$ divergirt. Das unendliche Produkt $\sqrt[2]{2}\,.\,\sqrt[3]{3}\,.\,\sqrt[4]{4}\,\dots\dots$ ist also unendlich, da sein natürlicher Logarithmus, gemäss dem Gefundenen, unendlich ist.

§. 51.

Setzt man $\frac{\beta - \alpha}{n} = \varDelta y$, und ist f(x, y) eine Funktion der zwei unabhängig Veränderlichen x und y, so ist nach §. 48 die Grösse $\int_\alpha^\beta f(x, y)\,\partial y$ der Werth von

$$\varDelta y[f(x,\alpha)+f(x,\alpha+\varDelta y)+f(x,\alpha+2\varDelta y)+\ldots+f(x,\beta-\varDelta y)]$$

mit unendlich abnehmendem $\varDelta y$, d. h. mit unendlich wachsendem n. Daraus folgt, dass wenn $\frac{b-a}{m} = \varDelta x$, die Grösse $\int_a^b \partial x \int_\alpha^\beta f(x,y)\partial y$ der Werth von

$$\begin{aligned}
&\varDelta x\varDelta y[f(a,\alpha)+f(a+\varDelta x,\alpha)+f(a+2\varDelta x,\alpha)+\ldots+f(b-\varDelta x,\alpha)]\\
&+\varDelta x\varDelta y[f(a,\alpha+\varDelta y)+f(a+\varDelta x,\alpha+\varDelta y)+f(a+2\varDelta x,\alpha+\varDelta y)+\ldots\ldots\\
&\qquad+f(b-\varDelta x,\alpha+\varDelta y)] \qquad\qquad (a)\\
&+\varDelta x\varDelta y[f(a,\alpha+2\varDelta y)+f(a+\varDelta x,\alpha+2\varDelta y)+f(a+2\varDelta x,\alpha+2\varDelta y)+\ldots\ldots\\
&\qquad+f(b-\varDelta x,\alpha+2\varDelta y)]\\
&\vdots\\
&+\varDelta x\varDelta y[f(a,\beta-\varDelta y)+f(a+\varDelta x,\beta-\varDelta y)+f(a+2\varDelta x,\beta-\varDelta y)+\ldots\ldots\\
&\qquad+f(b-\varDelta x,\beta-\varDelta y)]
\end{aligned}$$

mit unendlich abnehmenden $\varDelta x$ und $\varDelta y$ ist. Die Grösse (a) lässt sich jedoch auch in folgender Weise schreiben (indem man horizontal statt vertikal ordnet):

$$\begin{aligned}
&\varDelta x\varDelta y[f(a,\alpha)+f(a,\alpha+\varDelta y)+\ldots+f(a,\beta-\varDelta y)]\\
&+\varDelta x\varDelta y[f(a+\varDelta x,\alpha)+f(a+\varDelta x,\alpha+\varDelta y)+\ldots+f(a+\varDelta x,\beta-\varDelta y)] \qquad (a')\\
&\vdots\\
&+\varDelta x\varDelta y[f(b-\varDelta x,\alpha)+f(b-\varDelta x,\alpha+\varDelta y)+\ldots+f(b-\varDelta x,\beta-\varDelta y)]
\end{aligned}$$

und kommt jetzt auf $\int_\alpha^\beta \partial y \int_a^b f(x,y)\partial x$ zurück. Aus der Vergleichung der Grössen (a) und (a′) folgt ganz unmittelbar, dass

$$\int_a^b \partial x \int_\alpha^\beta f(x,y)\partial y = \int_\alpha^\beta \partial y \int_a^b f(x,y)\partial x \qquad (48)$$

seyn wird. Dabei ist jedoch wesentlich vorausgesetzt, dass die Grössen a, b, α, β von x und y ganz unabhängig seyen, so wie dass f(x, y) innerhalb der Integrationsgränzen endlich sey. Was nun die Auswerthung einer solchen Grösse anbelangt, so ist wohl klar, dass wenn

$$\int_\alpha^\beta f(x,y)\partial y = F(x), \qquad (b)$$

man haben werde:

$$\int_a^b \partial x \int_\alpha^\beta f(x,y)\partial y = \text{Gr.}\,\varDelta x[F(a)+F(a+\varDelta x)+\ldots+F(b-\varDelta x)], \qquad (b')$$

indem, wie man leicht sieht, für ein unendlich kleines $\varDelta y$:

$$\begin{aligned}
&F(a) = \varDelta y[f(a,\alpha)+f(a,\alpha+\varDelta y)+\ldots+f(a,\beta-\varDelta y)],\\
&\vdots\\
&F(b-\varDelta x) = \varDelta y[f(b-\varDelta x,\alpha)+f(b-\varDelta x,\alpha+\varDelta y)+\ldots+f(b-\varDelta x,\beta-\varDelta y)],
\end{aligned}$$

woraus dann, nach (a′), die (b′) folgt. Demnach ist, wenn (b) richtig ist:

$$\int_a^b \partial x \int_\alpha^\beta f(x,y)\partial y = \int_a^b F(x)\partial x.$$

Gesetzt also (§. 47) es sey

$$\int \partial x \int f(x,y)\,\partial y = F(x,y) + \varphi(x) + \psi(y), \qquad (c)$$

wo $\varphi(x)$ und $\psi(y)$ willkürliche Funktionen von x und y sind, so ist

$$\int \partial x \int_\alpha^\beta f(x,y)\,\partial y = F(x,\beta) - F(x,\alpha) + \psi(\beta) - \psi(\alpha),$$

und also
$$\int_a^b \partial x \int_\alpha^\beta f(x,y)\,\partial y = F(b,\beta) - F(b,\alpha) - F(a,\beta) + F(a,\alpha), \qquad (c')$$

was man auch in folgender Weise ableiten kann. Aus (c) folgt:

$$\int f(x,y)\,\partial y = \frac{\partial F(x,y)}{\partial x} + \varphi'(x), \quad \int_\alpha^\beta f(x,y)\,\partial y = \frac{\partial [F(x,\beta) - F(x,\alpha)]}{\partial x}$$

da $\varphi'(x)$ von y unabhängig ist. Daraus folgt:

$$\int \partial x \int_\alpha^\beta f(x,y)\,\partial y = F(x,\beta) - F(x,\alpha) + \psi(y),$$

$$\int_a^b \partial x \int_\alpha^\beta f(x,y)\,\partial y = F(b,\beta) - F(b,\alpha) - F(a,\beta) + F(a,\alpha), \qquad (c')$$

da $\psi(y)$ von x unabhängig ist.

Man kann also sagen, es sey das doppelt bestimmte Integral $\int_a^b \partial x \int_\alpha^\beta f(x,y)\,\partial y$ eine Summe von Flementen der Form $\Delta x \Delta y\, f(x,y)$, wenn x und y alle möglichen Werthe zwischen $x=a$ und $x=b$, so wie $y=\alpha$ und $y=\beta$ annehmen, wobei die x um (das unendlich kleine) Δx, die y um Δy wachsen.

Es kann sich aber ereignen, dass die Gränzen für y nicht konstant nach x (oder umgekehrt) sind. In diesem Falle hat man eine Grösse, die man durch

$$\int_a^b \partial x \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,\partial y \text{ oder } \int_\alpha^\beta \partial y \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)\,\partial x \qquad (d)$$

bezeichnen würde. Was die Bedeutung dieser Grössen anbelangt, so mag es genügen, die der ersten zu erläutern. Denken wir uns, es nehme x alle möglichen Werthe von $x=a$ bis $x=b$ an, wo wir, der Bequemlichkeit wegen (§. 48), x um gleiche (unendlich kleine) Differenzen Δx wollen wachsen (oder abnehmen) lassen, so werden $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ jeweils auch verschiedene Werthe annehmen. Gesetzt nun in den Grössen

$$f(a,y),\ f(a+\Delta x, y),\ f(a+2\Delta x, y), \ldots, f(b-\Delta x, y) \qquad (e)$$

lasse man y, in der ersten von $\varphi(a)$ bis $\psi(a)$, in der zweiten von $\varphi(a+\Delta x)$ bis $\psi(a+\Delta x), \ldots$, in der letzten von $\varphi(b-\Delta x)$ bis $\psi(b-\Delta x)$ durch unendlich kleine (etwa gleich grosse) Unterschiede wachsen, summire dann all die Grössen, die so aus der ersten (e) entstehen, und multiplizire die Summe mit dem Unterschiede, um den y gewachsen; eben so verfahre man für die zweite der Grössen (e),.... und für die letzte; die Summe all dieser Summen, mit Δx multiplizirt, ist die erste der Grössen (d). Geht also y von $\varphi(a)$ zu $\psi(a)$ durch die unendlich kleinen Unterschiede ε_1, von $\varphi(a+\Delta x)$

bis $\psi(a+\Delta x)$ durch $\varepsilon_2, \ldots\ldots$, von $\varphi(b-\Delta x)$ zu $\psi(b-\Delta x)$ durch ε_n, so ist

$$\begin{aligned}\int_a^b \partial x \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,\partial y = \varepsilon_1 \Delta x\,[f(a,\varphi(a)) + f(a,\varphi(a)+\varepsilon_1) + \ldots + f(a,\psi(a)-\varepsilon_1)] \\ + \varepsilon_2 \Delta x\,[f(a+\Delta x, \varphi(a+\Delta x)) + f(a+\Delta x, \varphi(a+\Delta x)+\varepsilon_2) + \ldots\ldots \\ + f(a+\Delta x, \psi(a+\Delta x)-\varepsilon_2)] + \ldots. \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \\ + \varepsilon_n \Delta x\,[f(b-\Delta x, \varphi(b-\Delta x)) + f(b-\Delta x, \varphi(b-\Delta x)+\varepsilon_n) + \ldots\ldots \\ + f(b-\Delta x, \psi(b-\Delta x)-\varepsilon_n)].\end{aligned} \tag{f}$$

Was die Auswerthung eines solchen Integrals anbelangt, so ist leicht ersichtlich, dass wenn

$$\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,\partial y = F(x),$$

man haben werde:

$$\int_a^b \partial x \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\,\partial y = \int_a^b F(x)\,\partial x,$$

da wie man leicht sieht, die Grössen $\Delta x F(a)$, $\Delta x F(a+\Delta x)$, ..., $\Delta x F(b-\Delta x)$ geradezu die einzelnen Zeilen des Ausdrucks (f) sind.

Hiebei ist klar, dass die Ordnung der Integration nothwendig vorgeschrieben ist, und man davon nicht abgehen kann, während nach (48) bei konstanten Gränzen diese Ordnung ganz willkürlich war.

Was man unter drei- oder mehrfachem bestimmtem Integrale zu verstehen habe, ist hiemit wohl klar, so dass es einer weiteren Erörterung nicht bedarf. So lange dabei die Integrationsgränzen konstant sind, ist die Ordnung der Integration eine ganz willkürliche.

Es wäre jedoch auch denkbar, dass in einem bestimmten Doppelintegrale (d) die Ordnung der Integration willkürlich wäre, d. h. dass man, statt z u e r s t nach y und d a n n nach x zu integriren, auch in umgekehrter Ordnung verfahren könnte; nur müssten in diesem Falle die Gränzen für x als Funktionen von y gehörig bestimmt werden. Es ereignet sich dieser Fall namentlich bei geometrischen Anwendungen. Allgemeines lässt sich hierüber Nichts aussagen. Dasselbe gilt von einem dreifachen Integrale

$$\int_a^b \partial x \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \partial y \int_{\varphi_1(x,y)}^{\psi_1(x,y)} f(x,y,z)\,\partial z,$$

in dem $\varphi(x)$, $\psi(x)$ Funktionen von x, $\varphi_1(x,y)$ und $\psi_1(x,y)$ Funktionen von x und y sind. Doch muss hier der spezielle Fall maassgebend seyn.

Findet man jedoch bei veränderlichen Gränzen einen Anstand, so lässt sich ein jedes doppelt bestimmte Integral leicht in ein anderes verwandeln, dessen Gränzen konstant sind. Sey nämlich das Integral

$$\int_a^b \partial x \int_\xi^\zeta f(x,y)\,\partial y$$

vorgelegt, wo ξ und ζ Funktionen von x sind, so hat man, dem Obigen gemäss, zuerst die Grösse

$$\int_\xi^\zeta f(x,y)\partial y,$$

bei der x konstant ist, zu ermitteln. Man setze nun hier (§. 49):

$$y=\xi+(\zeta-\xi)z,\ \frac{\partial y}{\partial z}=\zeta-\xi,$$

so sind die Gränzen für z: 0 und 1, und demnach

$$\int_\xi^\zeta f(x,y)\partial y=(\zeta-\xi)\int_0^1 f[x,\xi+(\zeta-\xi)z]\partial z=(\zeta-\xi)\int_0^1 f[x,\xi+(\zeta-\xi)y]\partial y,$$

so dass
$$\int_a^b\partial x\int_\xi^\zeta f(x,y)\partial y=\int_a^b(\zeta-\xi)\partial x\int_0^1 f[x,\xi+(\zeta-\xi)y]\partial y \qquad (g)$$

seyn wird, wodurch der Zweck erreicht ist. In dem letzten Integrale ist nun die Ordnung der Integration eine willkürliche.

Setzt man hier $\xi=0$, so ist

$$\int_a^b\partial x\int_0^\zeta f(x,y)\partial y=\int_a^b\zeta\partial x\int_0^1 f(x,\zeta y)\partial y. \qquad (g')$$

Da nun
$$\int_\xi^\zeta f(x,y)\partial y=\int_0^\zeta f(x,y)\partial y-\int_0^\xi f(x,y)\partial y,$$

so folgt aus (g), dass auch

$$\int_a^b\partial x\int_\xi^\zeta f(x,y)\partial y=\int_a^b\zeta\partial x\int_0^1 f(x,\zeta y)\partial y-\int_a^b\xi\partial x\int_0^1 f(x,\xi y)\partial y \qquad (h)$$

sey. Dieser Satz führt oft leicht zur Auswerthung mehrfacher Integrale. So ist z. B.

$$\int_0^r\partial x\int_{\sqrt{r^2-rx}}^{\sqrt{r^2-x^2}}\frac{\partial y}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}}=\int_0^r\sqrt{r^2-x^2}\,\partial x\int_0^1\frac{\partial y}{\sqrt{r^2-x^2-(r^2-x^2)y^2}}-\int_0^r\sqrt{r^2-rx}\,\partial x$$

$$\int_0^1\frac{\partial y}{\sqrt{r^2-x^2-(r^2-rx)y^2}}=\int_0^r\partial x\int_0^1\frac{\partial y}{\sqrt{1-y^2}}-\int_0^r\frac{\sqrt{r^2-rx}}{\sqrt{r-x}}\partial x\int_0^1\frac{\partial y}{\sqrt{r+x-ry^2}}=$$

$$\int_0^r\partial x.\frac{\pi}{2}-\sqrt{r}\int_0^r\partial x\int_0^1\frac{\partial y}{\sqrt{r+x-ry^2}}=\frac{r\pi}{2}-\sqrt{r}\int_0^1\partial y\int_0^r\frac{\partial x}{\sqrt{r+x-ry^2}}=\frac{r\pi}{2}-$$

$$\sqrt{r}\int_0^1\partial y\left[2\sqrt{2r-ry^2}-2\sqrt{r-ry^2}\right]=\frac{r\pi}{2}-2r\int_0^1(\sqrt{2-y^2}-\sqrt{1-y^2})\partial y=\frac{r\pi}{2}$$

$$-2r\left[\frac{1}{2}+\operatorname{arc}\left(\sin=\sqrt{\frac{1}{2}}\right)-\frac{1}{2}\operatorname{arc}(\sin=1)\right]=\frac{r\pi}{2}-2r\left(\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)=r\left(\frac{\pi}{2}-1\right).$$

Dass man ähnliche Sätze für dreifache Integrale aufstellen kann, versteht sich ganz von selbst. Eben so lassen sich viele der Sätze in §. 49 ganz unmittelbar auf mehrfach bestimmte Integrale übertragen. Für den Augenblick mag es für uns hauptsächlich von Wichtigkeit seyn, zu bemerken, dass die Bestimmung (Auswerthung) eines vielfachen bestimmten Integrals immer auf eine mehrfach wiederholte einfache Integration zwischen bestimmten Gränzen zurückkömmt.

§. 52.

I. Sey P eine bekannte Funktion von x und y und man wolle in dem bestimmten Doppelintegrale

$$\int_a^b \partial x \int_\alpha^\beta P \partial y \qquad \text{(a)}$$

an die Stelle von x und y zwei neue unabhängig Veränderliche u, v einführen, welche mit x und y durch die Gleichungen

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v) \qquad \text{(b)}$$

zusammenhängen, welche Gleichungen sicher allgemein genug sind, da man ja immerhin x und y muss durch u und v ausdrücken können, wenn man eine durchführbare Umformung haben will. In dem Integrale (a) setzen wir die Gränzen als konstant voraus, und wie immer die Grösse unter den Integral-Zeichen endlich innerhalb der Gränzen der Integration.

Betrachten wir nun zuerst das Integral

$$\int_\alpha^\beta P \partial y, \qquad \text{(c)}$$

so ist in demselben x als Konstante betrachtet; wollen wir statt y die Veränderliche v einführen, so werden wir aus (b) die Grösse u eliminiren, um die Gleichung zwischen y und v, in der freilich auch noch das konstante x vorkommt, zu erhalten. Gesetzt diese Gleichung sey

$$f(x, y, v) = 0, \qquad \text{(d)}$$

so werden die Gränzen α', β' von v aus den zwei Gleichungen

$$f(x, \alpha, \alpha') = 0, \quad f(x, \beta, \beta') = 0 \qquad \text{(d')}$$

zu entnehmen seyn. Ist es möglich, von x unabhängige Werthe von α' und β' aus diesen Gleichungen zu erhalten, so hat man (§. 49)

$$\int_\alpha^\beta P \partial y = \int_{\alpha'}^{\beta'} P \frac{\partial y}{\partial v} \partial v, \qquad \text{(e)}$$

wo $\frac{\partial y}{\partial v}$ aus der Gleichung (d) zu ziehen ist. Aber die (d) entsteht, wenn man in der zweiten Gleichung (b) die Grösse u durch den Werth ersetzt, den sie in der ersten hat; demnach wird auch u als eine Funktion von v zu behandeln seyn, während x konstant bleibt. Man hat also

$$\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial \psi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial v} + \frac{\partial \psi}{\partial v}, \quad 0 = \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial v} + \frac{\partial \varphi}{\partial v},$$

also $\frac{\partial u}{\partial v} = -\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial v}}{\frac{\partial \varphi}{\partial u}}$, und $\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{-\frac{\partial \psi}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial \psi}{\partial v}\frac{\partial \varphi}{\partial u}}{\frac{\partial \varphi}{\partial u}}$, welche Grösse in (e) einzuführen ist, und dann y und u nach (b) zu ersetzen sind. Geschieht dies, so ist die Grösse (a) gleich

$$\int_a^b \partial x \int_{\alpha'}^{\beta'} \frac{\left(\frac{\partial \psi}{\partial v}\frac{\partial \varphi}{\partial u} - \frac{\partial \psi}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right) P}{\frac{\partial \varphi}{\partial u}} \partial v, \qquad \text{(a')}$$

und da hier wieder die Gränzen konstant sind, so kann man die Ordnung der Integration ändern und also zuerst nach x integriren. Betrachten wir nunmehr das Integral

$$\int_a^b \frac{\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial\varphi}{\partial u}-\frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v}}{\frac{\partial\varphi}{\partial u}} P\,\partial x, \qquad (\alpha)$$

und drücken in demselben (es enthält nur x und v), da v konstant ist, x durch u aus, so wird die erste Gleichung (b) geradezu den Zusammenhang zwischen x und u geben. Aus ihr folgt $\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{\partial\varphi}{\partial u}$, also wenn a', b' aus

$$a=\varphi(a',v),\quad b=\varphi(b',v) \qquad (f)$$

bestimmt werden, und man von v unabhängige Werthe von b und b' daraus erhält, so ist $(\alpha)=$

$$\int_{a'}^{b'}\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial\varphi}{\partial u}-\frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)P\,\partial u,$$

also endlich, wenn man die Ordnung der Integration nochmals umkehrt:

$$\int_a^b\partial x\int_\alpha^\beta P\,\partial y=\int_{a'}^{b'}\partial u\int_{\alpha'}^{\beta'}P\left(\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial\varphi}{\partial u}-\frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)\partial v, \qquad (A)$$

wo y und x durch u und v nach (b) ausgedrückt werden, und die Gränzen aus (d') und (f) unabhängig von x und v gefunden werden müssen. (Vgl. übrigens III.)

II. Es kann sich nun ganz wohl ereignen, dass (d') keine konstanten Werthe von α' und β' liefern. In diesem Falle drücke man in

$$\int_a^b P\,\partial x$$

x durch v aus, suche also a' und b' zu bestimmen aus

$$f(a,y,a')=0,\quad f(b,y,b')=0 \qquad (g)$$

und zwar unabhängig von y; alsdann ist

$$\int_a^b P\,\partial x=\int_{a'}^{b'}P\frac{\partial x}{\partial v}\partial v.$$

Die Grösse $\frac{\partial x}{\partial v}$ bestimmt sich aus:

$$\frac{\partial x}{\partial v}=\frac{\partial\varphi}{\partial v}+\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial v},\quad 0=\frac{\partial\psi}{\partial v}+\frac{\partial\psi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial v},$$

so dass

$$\int_a^b P\,\partial x=\int_{a'}^{b'}\frac{P\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial u}-\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)}{\frac{\partial\psi}{\partial u}}\partial v,$$

$$\int_a^b\partial x\int_\alpha^\beta P\,\partial y=\int_{a'}^{b'}\partial v\int_\alpha^\beta\frac{P\left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial u}-\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v}\right)}{\frac{\partial\psi}{\partial u}}\partial y.$$

Betrachtet man hier zuerst wieder die Integration nach y (wo v konstant ist) und drücke y durch u aus, so bestimmen sich α', β' aus

$$\alpha = \psi(\alpha', v), \quad \beta = \psi(\beta', v), \qquad (g')$$

unabhängig von v, und $\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial \psi}{\partial u}$, so dass jetzt:

$$\int_a^b \partial x \int_\alpha^\beta P \partial y = \int_{a'}^{b'} \partial v \int_{\alpha'}^{\beta'} P\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial \psi}{\partial u} - \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \psi}{\partial v}\right)\partial u, \qquad (B)$$

wo y und x nach (b) ersetzt werden; a′ und b′ aus (g), α', β' aus (g′) unabhängig von y und v gefunden werden müssen. (Vergl. übrigens III.)

Wir haben zuerst jeweils v eingeführt; dies war willkürlich. Allein da es gleichgiltig ist, welche der neuen Veränderlichen v heisse, so soll es die seyn, die uns in dem einen der zwei Fälle zur Ermittlung der Gränzen führt, wenn man sie aus (b) eliminirt. Kann man aber die Gränzen in keinem der obigen Fälle in der verlangten Weise finden, so ist die Umformung mittelst der (b) nicht zulässig.

Sind α und β Funktionen von x, und kann man aus (d′) Werthe von α', β' finden, die konstant sind, so wird alles Obige immer noch gelten.

1.) Um das Gesagte zu erläutern, wollen wir uns das Integral (§. 62)

$$\int_0^\infty \partial x \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)} \partial y$$

vorlegen und setzen $x = u$, $y = uv$, so ist die (d): $y - xv = 0$, während die (d′) sind: $0 - x\alpha' = 0$, $\infty - x\beta' = 0$, woraus (da $x > 0$) $\alpha' = 0$, $\beta' = \infty$ folgen. Dann sind die (f): $0 = a'$, $\infty = b'$; ferner $\frac{\partial \psi}{\partial v} = u$, $\frac{\partial \varphi}{\partial u} = 1$, $\frac{\partial \psi}{\partial u} = v$, $\frac{\partial \varphi}{\partial v} = 0$, mithin nach (A):

$$\int_0^\infty \partial x \int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)} \partial y = \int_0^\infty \partial u \int_0^\infty u e^{-(u^2+u^2v^2)} \partial v.$$

2.) Legt man uns eben so das Integral (§. 105):

$$\int_0^h \partial x \int_{(a-r)\frac{x}{h}}^{(a+r)\frac{x}{h}} P \partial y$$

vor, und setzen wir wieder $x = u$, $y = uv$, so ist die (d): $y - xv = 0$, also die (d′): $(a-r)\frac{x}{h} - \alpha' x = 0$, $(a+r)\frac{x}{h} - \beta' x = 0$, denen durch $\alpha' = \frac{a-r}{h}$, $\beta' = \frac{a+r}{h}$, unabhängig von x, genügt wird; die (f) sind $0 = a'$, $h = b'$, so dass also nach (A):

$$\int_0^h \partial x \int_{(a-r)\frac{x}{h}}^{(a+r)\frac{x}{h}} P \partial x = \int_0^h u \partial u \int_{\frac{(a-r)}{h}}^{\frac{(a+r)}{h}} P \partial v,$$

wo in P die x und y durch u und uv zu ersetzen sind.

3.) Wir wollen ferner das Integral

$$\int_0^\infty \partial x \int_0^\infty f(x^2+y^2) \partial y$$

untersuchen, indem wir

$$x = u\cos v, \quad y = u\sin v$$

setzen. Die (d) ist hier $y - x\,\mathrm{tg}\,v = 0$, also wenn wir die (g) anwenden, und dess-

halb die (d) unter die Form $y\cot g v - x = 0$ setzen: $y \cot g a' - 0 = 0$, $y \cot g b' - \infty = 0$, woraus $a' = \frac{\pi}{2}$, $b' = 0$; die (g') sind jetzt $0 = \alpha' \sin v$, $\infty = \beta' \sin v$, also $\alpha' = 0$, $\beta' = \infty$; $\frac{\partial \varphi}{\partial v} = -u \sin v$, $\frac{\partial \varphi}{\partial u} = \cos v$, $\frac{\partial \psi}{\partial v} = u \cos v$, $\frac{\partial \psi}{\partial u} = \sin v$; $\frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial \psi}{\partial u} - \frac{\partial \psi}{\partial v}\frac{\partial \varphi}{\partial u} = -u$, also da $x^2 + y^2 = u^2$:

$$\int_0^\infty \partial x \int_0^\infty f(x^2+y^2)\partial y = -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \partial v \int_0^\infty u f(u^2)\partial u = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \partial v \int_0^\infty u f(u^2)\partial u,$$

d. h. da $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \partial v = \frac{\pi}{2}$, indem $u f(u^2)$ von v nicht abhängt:

$$\int_0^\infty \partial x \int_0^\infty f(x^2+y^2)\partial y = \frac{\pi}{2}\int_0^\infty u f(u^2)\partial u.$$

Setzt man hier noch $u^2 = x$, also $u\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2}$, so ist (§. 49)

$$\int_0^\infty \partial x \int_0^\infty f(x^2+y^2)\partial y = \frac{\pi}{4}\int_0^\infty f(x)\partial x. \qquad \text{(h)}$$

III. Würden in den Gleichungen (d') zwar für α' und β' von x unabhängige Werthe folgen, dagegen aus (f) für a', b' Funktionen von v, so hätte man immerhin:

$$\int_a^b \partial x \int_\alpha^\beta P \partial y = \int_{\alpha'}^{\beta'} \partial v \int_{a'}^{b'} P\left(\frac{\partial \psi}{\partial v}\frac{\partial \varphi}{\partial u} - \frac{\partial \psi}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v}\right)\partial u, \qquad \text{(A')}$$

wo aber die Ordnung der Integration nunmehr vorgeschrieben wäre.

Eben so wenn aus (g) für a', b' konstante Werthe folgen, aber aus (g') Funktionen von v für α', β', so ist

$$\int_a^b \partial x \int_\alpha^\beta P \partial y = \int_{a'}^{b'} \partial v \int_{\alpha'}^{\beta'} P\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial \psi}{\partial u} - \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \psi}{\partial v}\right)\partial u. \qquad \text{(B')}$$

IV. Wir wollen nun annehmen, man lege uns das dreifach bestimmte Integral

$$J = \int_a^b \partial x \int_{a'}^{b'} \partial y \int_{a''}^{b''} P \partial z \qquad \text{(i)}$$

vor, in dem P eine bekannte Funktion von x, y, z ist, und worin a, b, a', b', a'', b'' bekannte Konstanten sind, und man solle für x, y, z drei neue Veränderliche u, v, w einführen, die mit x, y, z durch die Gleichungen

$$x = \varphi(u, v, w), \quad y = \psi(u, v, w), \quad z = \Theta(u, v, w) \qquad \text{(k)}$$

zusammenhängen, wo φ, ψ, Θ bekannte Funktionen sind.

Da die Integrationsgränzen in (i) konstant sind, so ist die Ordnung der Integration eine ganz willkürliche. Wir wollen desshalb annehmen, man integrire nach z zuerst, wie es auch in (i) gemeint ist, betrachten also zunächst das Integral:

$$\int_{a''}^{b''} P \partial z,$$

in welchem wir nun z durch w ersetzen wollen. Dabei sind x und y als Konstanten angesehen. Eliminiren wir nun aus den Gleichungen (k) die Grössen u und v, so erhalten wir etwa die Gleichung

$$f(x, y, z, w) = 0, \qquad (k')$$

und gesetzt nun, man erhalte aus ihr für $z = a''$, und $z = b''$ die Werthe $w = \alpha''$, $w = \beta''$, unabhängig von x und y, d. h. man könne α'', β'' aus

$$f(x, y, a'', \alpha'') = 0, \; f(x, y, b'', \beta'') = 0 \qquad (k'')$$

bestimmen, so ist (§. 49)

$$\int_{a''}^{b''} P \partial z = \int_{\alpha''}^{\beta''} P \frac{\partial z}{\partial w} \partial w,$$

wo $\frac{\partial z}{\partial w}$ aus (k′) zu ziehen ist, wenn dabei x und y als konstant angesehen werden. Da man aber u und v aus den zwei ersten Gleichungen (k) gezogen und in die dritte eingesetzt, um (k′) zu erhalten, so ist $\frac{\partial z}{\partial w}$ aus (k′) gezogen gleich $\frac{\partial z}{\partial w}$ aus der dritten (k), wenn u, v als Funktionen von w aus den zwei ersten folgen. Also hat man, da x und y konstant:

$$\frac{\partial z}{\partial w} = \frac{\partial \Theta}{\partial u}\frac{\partial u}{d w} + \frac{\partial \Theta}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial w} + \frac{\partial \Theta}{\partial w}, \quad 0 = \frac{\partial \psi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial w} + \frac{\partial \psi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial w} + \frac{\partial \psi}{\partial w}, \quad 0 = \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial w} + \frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial w} + \frac{\partial \varphi}{\partial w},$$

woraus

$$\frac{\partial u}{\partial w} = \frac{-\frac{\partial \psi}{\partial w}\frac{\partial \varphi}{\partial v} + \frac{\partial \varphi}{\partial w}\frac{\partial \psi}{\partial v}}{\frac{\partial \psi}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v} - \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \psi}{\partial v}}, \quad \frac{\partial v}{\partial w} = \frac{-\frac{\partial \varphi}{\partial w}\frac{\partial \psi}{\partial u} + \frac{\partial \psi}{\partial w}\frac{\partial \varphi}{\partial u}}{\frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial \psi}{\partial u} - \frac{\partial \psi}{\partial v}\frac{\partial \varphi}{\partial u}},$$

und dann

$$\frac{\partial z}{\partial w} = \frac{-\frac{\partial \Theta}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial \psi}{\partial w} + \frac{\partial \Theta}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial w}\frac{\partial \psi}{\partial v} - \frac{\partial \Theta}{\partial v}\frac{\partial \varphi}{\partial w}\frac{\partial \psi}{\partial u} + \frac{\partial \Theta}{\partial v}\frac{\partial \psi}{\partial w}\frac{\partial \varphi}{\partial u} + \frac{\partial \Theta}{\partial w}\frac{\partial \psi}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v} - \frac{\partial \Theta}{\partial w}\frac{\partial \psi}{\partial v}\frac{\partial \varphi}{\partial u}}{\frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial \psi}{\partial u} - \frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \psi}{\partial v}}$$

was zur Abkürzung $= -\frac{M}{N}$ gesetzt werden möge. Also

$$J = -\int_a^b \partial x \int_{a'}^{b'} \partial y \int_{\alpha''}^{\beta''} \frac{PM}{N} \partial w,$$

wo nun z durch w (mittelst (k′)) zu ersetzen ist. Da hier die Integrationsgränzen konstant sind, so ist die Ordnung der Integration abermals beliebig. Betrachten wir also das Integral

$$\int_{a'}^{b'} \frac{PM}{N} \partial y,$$

in dem x und w konstant sind, und ersetzen y durch v. Eliminiren wir nun u aus den zwei ersten Gleichungen (k), so erhalten wir etwa

$$F(x, y, v, w) = 0 \qquad (k_1)$$

und gesetzt, es sey möglich aus

$$F(x, a', \alpha', w) = 0, \; F(x, b', \beta', w) = 0 \qquad (k_1')$$

Werthe von α', β' zu ziehen, die unabhängig von x seyen, so ist

$$\int_{a'}^{b'} \frac{PM}{N} \partial y = \int_{\alpha'}^{\beta'} \frac{PM}{N} \frac{\partial y}{\partial v} \partial v,$$

wo $\frac{\partial y}{\partial v}$ aus (k_1) zu ziehen ist. Wie immer hat man aber:

$$0=\frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial u}{\partial v}+\frac{\partial \varphi}{\partial v},\quad \frac{\partial y}{\partial v}=\frac{\partial \psi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial v}+\frac{\partial \psi}{\partial v};\quad \frac{\partial y}{\partial v}=\frac{-\frac{\partial \psi}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v}+\frac{\partial \psi}{\partial v}\frac{\partial \varphi}{\partial u}}{\frac{\partial \varphi}{\partial u}}=-\frac{N}{\frac{\partial \varphi}{\partial u}},$$

so dass

$$J=\int_{\alpha''}^{\beta''}\partial w\int_a^b \partial x\int_{\alpha'}^{\beta'}\frac{PM}{\frac{\partial \varphi}{\partial u}}\partial v$$

ist, wo y und z durch v und w zu ersetzen sind. Da α', β' unabhängig von x, so kann in dem Doppelintegral

$$\int_a^b \partial x\int_{\alpha'}^{\beta'}\frac{PM}{\frac{\partial \varphi}{\partial u}}\partial v$$

die Ordnung der Integration nochmals umgekehrt werden, so dass wir zunächst

$$\int_a^b \frac{PM}{\frac{\partial \varphi}{\partial u}}\partial x$$

betrachten wollen, wo v, w konstant sind. Bestimmt man nun α, β aus

$$a=\varphi(\alpha, v, w),\quad b=\varphi(\beta, v, w), \qquad (k_1'')$$

so ist

$$\int_a^b \frac{PM}{\frac{\partial \varphi}{\partial u}}\partial x=\int_\alpha^\beta \frac{PM}{\frac{\partial \varphi}{\partial u}}\frac{\partial x}{\partial u}\partial u,$$

wo $\frac{\partial x}{\partial u}$ aus der ersten Gleichung (k) gezogen wird, aus der (bei konstantem v, w) folgt

$$\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{\partial \varphi}{\partial u},$$

so dass nun endlich

$$\int_a^b \partial x\int_{a'}^{b'}\partial y\int_{a''}^{b''}P\partial z=\int_{\alpha''}^{\beta''}\partial w\int_{\alpha'}^{\beta'}\partial v\int_\alpha^\beta PM\partial u, \qquad (C)$$

wenn

$$M=\frac{\partial \Theta}{\partial u}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial \psi}{\partial w}-\frac{\partial \varphi}{\partial w}\frac{\partial \psi}{\partial v}\right)+\frac{\partial \Theta}{\partial v}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial w}\frac{\partial \psi}{\partial u}-\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \psi}{\partial w}\right)+\frac{\partial \Theta}{\partial w}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial u}\frac{\partial \psi}{\partial v}-\frac{\partial \varphi}{\partial v}\frac{\partial \psi}{\partial u}\right), \qquad (C')$$

und wo α'', β'' unabhängig von x und y aus (k''); α', β' unabhängig von x aus (k_1'); α, β aus (k_1'') folgen. Es versteht sich hiebei von selbst, dass α', β' ganz wohl w, und α, β sogar v und w enthalten können. Ebenso wenn a'', b'' nicht konstant sind, man aber α'', β'' doch wie hier verlangt bestimmen kann, gelten die obigen Schlüsse noch.

Man übersieht leicht, dass man auch ursprünglich z durch v oder u hätte ersetzen können. In diesem Falle würde man ganz ähnlich verfahren seyn. Da wir aber die neuen Veränderlichen beliebig nennen können, so soll eben w die derselben seyn, die die Bestimmung von α'', β'' ermöglicht. Aehnlich verhalte es sich mit u und v. Eben so hätte man statt z auch y oder x durch w ersetzen können. Allein auch hier wird man ganz ähnlich verfahren, wie so eben. Man ersieht leicht, dass, da man —(k′) benützend — dreierlei Wege einschlagen kann; und dann, wenn z, oder y, oder x ersetzt ist, doch je — wegen der bleibenden zwei — noch zwei, man im Ganzen sechs verschiedene Formen erhalten wird, deren Ableitung keinerlei Schwierigkeit hat, und deren Ergebnisse wir nun noch aufzählen wollen, indem wir Obiges wiederholen.

V. Gesetzt, man ziehe aus (k) die (k′) durch Elimination von u, v (w immer in der Bedeutung von so eben genommen); ferner ziehe man aus (k) durch Elimination von u aus den zwei ersten, oder aus der ersten und dritten, oder aus der zweiten und dritten, indem auch v die andere der neuen Veränderlichen seyn soll, die im Nachstehenden zum Ziele führt:

$$F(x,y,v,w)=0,\quad F_1(x,z,v,w)=0,\quad F_2(y,z,v,w)=0, \qquad (K')$$

so hat man, wenn M durch (C′) gegeben ist und J die Bedeutung in (i) hat:

1.) $$J=\int_{\alpha''}^{\beta''}\partial w\int_{\alpha'}^{\beta'}\partial v\int_{\alpha}^{\beta}PM\,\partial u \qquad (C_1)$$

wenn $\alpha'',\beta'',\alpha',\beta',\alpha,\beta$ unabhängig von x und y aus

$$f(x,y,a'',\alpha'')=0,\ f(x,y,b'',\beta'')=0;\ F(x,a',\alpha',w)=0,\ F(x,b',\beta',w)=0;$$
$$a=\varphi(\alpha,v,w),\quad b=\varphi(\beta,v,w)$$

bestimmt werden können;

2.) $$J=-\int_{\alpha''}^{\beta''}\partial w\int_{\alpha}^{\beta}\partial v\int_{\alpha'}^{\beta'}PM\,\partial u \qquad (C_2)$$

wenn die Gränzen unabhängig von x und y aus

$$f(x,y,a'',\alpha'')=0,\ f(x,y,b'',\beta'')=0;\ F(a,y,\alpha,w)=0,\ F(b,y,\beta,w)=0;$$
$$a'=\psi(\alpha',v,w),\quad b'=\psi(\beta',v,w)$$

bestimmt werden können;

3.) $$J=-\int_{\alpha'}^{\beta'}\partial w\int_{\alpha''}^{\beta''}\partial v\int_{\alpha}^{\beta}PM\,\partial u, \qquad (C_3)$$

wenn die Integrationsgränzen unabhängig von x und z aus

$$f(x,a',z,\alpha')=0,\ f(x,b',z,\beta')=0;\ F_1(x,a'',\alpha'',w)=0,\ F_1(x,b'',\beta'',w)=0;$$
$$a=\varphi(\alpha,v,w),\quad b=\varphi(\beta,v,w)$$

bestimmt werden können;

4.) $$J=\int_{\alpha'}^{\beta'}\partial w\int_{\alpha}^{\beta}\partial v\int_{\alpha''}^{\beta''}PM\,\partial u, \qquad (C_4)$$

wenn die Integrationsgränzen unabhängig von x und z aus

$$f(x,a',z,\alpha')=0,\ f(x,b',z,\beta')=0;\ F_1(a,z,\alpha,w)=0,\ F_1(b,z,\beta,w)=0;$$
$$a''=\Theta(\alpha'',v,w),\quad b''=\Theta(\beta'',v,w)$$

bestimmt werden können;

5.) $$J = -\int_{\alpha}^{\beta}\partial w \int_{\alpha'}^{\beta'}\partial v \int_{\alpha''}^{\beta''} PM\,\partial u, \qquad (C_5)$$

wenn die Integrationsgränzen unabhängig von y und z aus

$$f(a,y,z,\alpha)=0,\ f(b,y,z,\beta)=0;\ F_2(a',z,\alpha',w)=0,\ F_2(b',z,\beta',w)=0;$$
$$a''=\Theta(\alpha'',v,w),\ b''=\Theta(\beta'',v,w)$$

bestimmt werden können;

6.) $$J = \int_{\alpha}^{\beta}\partial w \int_{\alpha''}^{\beta''}\partial v \int_{\alpha'}^{\beta'} PM\,\partial u, \qquad (C_6)$$

wenn die Integrationsgränzen unabhängig von y und z aus

$$f(a,y,z,\alpha)=0,\ f(b,y,z,\beta)=0;\ F_2(y,a'',\alpha'',w)=0,\ F_2(y,b'',\beta'',w)=0;$$
$$a'=\psi(\alpha',v,w),\ b'=\psi(\beta',v,w)$$

bestimmt werden können.

Beispiele wollen wir hier zunächst keine zufügen, da wir später dazu Gelegenheit erhalten werden. Wir bemerken jedoch hiezu nur noch das Folgende:

Das Wesentliche bei allen obigen Erörterungen war, dass immer wieder die Ordnung der Integration geändert werden darf. Wie wir in §. 51 schon bemerkt, ist es denkbar, dass dies auch gestattet ist, wenn die Gränzen nicht konstant sind, so dass wir nicht kurzweg sagen können, es sey in diesem Falle die obige Umformung nicht zulässig. Ja wenn wir zum Voraus wissen, es müsse das bestimmte vielfache Integral sich umformen lassen, indem man gewisse neue Veränderliche einführt, man auch aus andern Untersuchungen die Gränzen des neuen Integrals ermitteln kann, so wird man die Formeln (A) oder (C) immerhin anzuwenden haben. Wir werden von dieser Bemerkung mehrfach Gebrauch zu machen Gelegenheit haben.

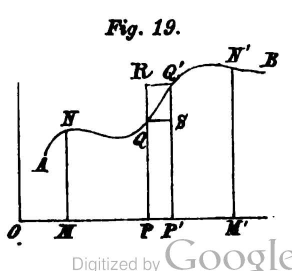
Dass man für vier- und mehrfache bestimmte Integrale ähnliche Untersuchungen anstellen kann, ist klar; doch wollen wir uns hierauf nicht weiter einlassen, da das Gesagte wohl genügen wird. Weitere Untersuchungen über bestimmte Integrale mögen späteren Abschnitten vorbehalten seyn.

Zehnter Abschnitt.

Quadratur der Kurven und Oberflächen, Rektifikation der Kurven und Kubatur der Körper.

§. 53.

Fig. 19.



I. Stellen wir uns zunächst die Aufgabe, das Flächenstück zu berechnen, das (Fig. 19) zwischen den beiden Ordinaten MN, M'N', die zu den Abszissen OM = a, OM' = b gehören, dem Abszissen-Axenstück MM' (= b − a) und der Kurve NN' liege, so ist, wenn OP = x, die Fläche MPQN = u, nach §. 13. IV: Gr. $\frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} = y$. Denken wir

uns nun, man theile MM' in eine Anzahl gleicher Theile, jeden gleich Δx, und errichte in den Theilpunkten die Ordinaten, so wird dadurch das zu berechnende Flächenstück in eine Anzahl Theile zerfallen, deren Summe gleich der gesuchten Fläche ist. Dieser Satz ist offenbar wahr, welches auch immer die Anzahl der Theile sey. Sind nun Δu_1, $\Delta u_2, \ldots, \Delta u_n$ diese einzelnen Theile; f die gesuchte Fläche, so ist demnach

$$f = \Delta u_1 + \Delta u_2 + \ldots + \Delta u_n = \left(\frac{\Delta u_1}{\Delta x} + \frac{\Delta u_2}{\Delta x} + \ldots + \frac{\Delta u_n}{\Delta x}\right)\Delta x,$$

Da nun Gr. $\frac{\Delta u}{\Delta x} = y$, so ist (§. 11)

$$\frac{\Delta u_1}{\Delta x} = y_0 + \alpha_0, \quad \frac{\Delta u_2}{\Delta x} = y_1 + \alpha_1, \ldots, \frac{\Delta u_n}{\Delta x} = y_{n-1} + \alpha_{n-1},$$

wenn $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$, die in M, dem 1[ten], 2[ten], ..., letzten Theilpunkte errichteten Ordinaten sind, und wo $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ mit Δx unendlich abnehmen. Demnach

$$f = (y_0 + y_1 + \ldots + y_{n-1})\Delta x + (\alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_{n-1})\Delta x. \qquad \text{(a)}$$

Diese Gleichung ist richtig, was immer auch Δx seyn möge. Lässt man Δx beliebig klein werden, so besteht sie immerhin, und da die erste Seite eine unveränderliche Grösse ist, so wird, wenn man auf der zweiten Δx unbegränzt abnehmen lässt, der Gränzwerth dieser zweiten Seite dem Werthe f immer noch gleich seyn. Nun ist aber nach §. 48:

$$\text{Gr.}\,[y_0 + y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}]\Delta x = \int_a^b y\,\partial x;$$

ferner, wenn $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, ist $\alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_{n-1}$ zwischen $n\alpha_r$ und $n\alpha_s$ enthalten, wenn α_r und α_s die grössten und kleinsten der Werthe α bezeichnen (§. 13. III), so dass $(\alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_{n-1})\Delta x$ enthalten ist zwischen $\alpha_r(b-a)$ und $\alpha_s(b-a)$, und da die Gränzen dieser letzten Grössen Null sind, so ist auch (§. 2. III)

$$\text{Gr.}\,(\alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_{n-1})\Delta x = 0.$$

Hieraus folgt endlich, dass

$$f = \int_a^b y\,\partial x \qquad \text{(b)}$$

sey. Diese Formel setzt aber wesentlich voraus, dass die Fläche innerhalb der betrachteten Gränzen immer wachse mit wachsendem x, da sonst $\frac{\partial u}{\partial x} = -y$ seyn würde; oder, wenn man sich etwas anders ausdrücken will, dass bei bloss positiven y, wie wir vorausgesetzt, $b - a > 0$ sey, und der Kurvenbogen NN' von $x = a$ bis $x = b$ keine Zurückbiegung habe (also nicht etwa verlaufe wie Fig. 3 in §. 13).

Anm. Man ersieht hieraus, dass, weil $\frac{\partial u}{\partial x} = y$ war, folgen musste $f = \int_a^b y\,\partial x$, so dass überhaupt, wenn Gr. $\frac{\Delta v}{\Delta x} = z$ ist, und v eine geometrische Grösse, die von $x = a$ bis $x = b$ sich erstreckt, ganz nothwendig diese ganze Grösse $= \int_a^b z\,\partial x$ seyn wird.

In der Sprache unendlich kleiner Grössen hätte man sagen können, das unendlich kleine Element der zu berechnenden Fläche sey $y\Delta x$, und da die Summe aller dieser Elemente die fragliche Fläche ausmache, so sey also $\int_a^b y\partial x$ (d. h. eben diese Summe) der Inhalt derselben.

Endlich liesse sich das Gesagte auch in folgender Weise darstellen. Es ist ganz gewiss

$$f = \int_0^f \partial u \quad (\S. 49).$$

Demnach, wenn man statt u die neue Veränderliche x einführt und beachtet, dass wenn $u = f$ (wo u nothwendig ein Stück MPQN ist), d. h. wenn man statt MPQN die ganze Fläche MM'N'N nimmt, $x = b$ ist, und wenn $u = 0: x = a$, so ist (§. 49. IV):

$$f = \int_a^b \frac{\partial u}{\partial x} \partial x = \int_a^b y \partial x. \quad (\S. 13. IV.)$$

II. Will man das Flächenstück zwischen MM', NN' (Fig. 20) und den zwei Kurven MN, M'N' berechnen, so beachte man, dass, wenn a und b die Abszissen von A und B sind:

$$ABM'N' = \int_a^b y \partial x, \quad ABMN = \int_a^b y_1 \partial x,$$

wo y und y_1, als Funktionen von x, die Ordinaten der Kurven M'N', MN sind. Also ist

$$MNN'M' = \int_a^b (y - y_1) \partial x \qquad (c)$$

Fig. 20.

Die Formel (b) setzt übrigens voraus, dass die begränzende Kurve die Abszissenaxe innerhalb der betrachteten Ausdehnung nicht durchschneide, da dann ohnehin die ursprüngliche Aufgabe nicht mehr gestellt werden könnte, wie z. B. in Fig. 8 man nicht fragen kann, welche Fläche zwischen Cc und Gg liege. Ferner haben wir die Ordinaten nur auf der positiven Seite der y angenommen; läge in Fig. 19 NN' auf der negativen Seite der y, so würde man, da f immer nur positiv ist, $-y$ statt y in Rechnung stellen. Würde in Fig. 20 die Kurve MN auf der Seite der negativen y liegen, so würde dennoch die Formel (c) gelten, da dann zwar $AMNB = \int_a^b (-y_1)\partial x$ wäre, aber zu ABN'M' addirt werden müsste. In diesem Falle kann also ganz wohl MN die Abszissenaxe durchschneiden; die beiden Kurven selbst aber dürfen sich nicht durchschneiden, oder aber wenn dies geschieht, so muss dann die Formel (c) nicht über den Durchschnittspunkt hinaus erstreckt werden. Jenseits desselben wäre es nämlich wohl möglich, dass $y_1 - y$ an die Stelle von $y - y_1$ zu treten hätte, wenn dann die zweite Kurve über die erste zu stehen kommt.

Fig. 21.

III. Stellt man sich endlich die Aufgabe, die Fläche des Ausschnitts BOC (Fig. 21) zu berechnen, wenn die Gleichung der Kurve in Polarkoordinaten gegeben ist, so ist (§. 13. VI), wenn $BOM = u$: $\frac{\partial u}{\partial \omega} = \frac{1}{2}r^2$, wenn ω den Winkel MOA, r den Fahrstrahl

OM bedeutet, der eine Funktion von ω ist. Sind also ω_1, ω_2 die Werthe von BOA, COA, so folgt hieraus wie in I:

$$BOC = \frac{1}{2}\int_{\omega_1}^{\omega_2} r^2 \partial\omega, \text{ (die Fläche wachsend mit } \omega).$$

Wir wollen nun an einer Reihe von Beispielen die gegebenen Formeln anwenden, woraus sich zugleich auch ergeben wird, wie man sich in zusammengesetzteren Fällen zu helfen hat.

§. 54.

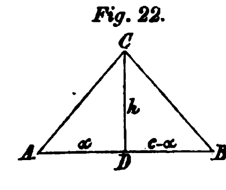


Fig. 22.

I. Man soll die Fläche des Dreiecks ABC (Fig. 22) berechnen.

Sey $AB = c$, CD (Höhe) $= h$, $AD = \alpha$, also $DB = c - \alpha$; man wähle AB als Abszissenaxe, A als Anfangspunkt, so sind die Koordinaten von A: 0, 0; von B: c, 0; von C: α, h; also ist die Gleichung der Geraden AC: $y = \frac{h}{\alpha} x$, der BC: $y = \frac{h}{\alpha - c}(x - c)$, mithin:

$$\text{Dreieck } ADC = \int_0^\alpha \frac{h}{\alpha} x \partial x = \frac{h\alpha}{2}, \text{ Dreieck } BCD = \int_\alpha^c \frac{h}{\alpha - c}(x - c)\partial x =$$

$$\frac{h}{\alpha - c}\left[\frac{c^2 - \alpha^2}{2} - c(c - \alpha)\right] = \frac{h}{\alpha - c}(c - \alpha)\left[\frac{\alpha + c}{2} - c\right] = \frac{h}{\alpha - c}(c - \alpha)\left(\frac{\alpha - c}{2}\right) =$$

$$\frac{h(c - \alpha)}{2}; \text{ Dreieck } ABC = ADC + BCD = \frac{ch}{2}.$$

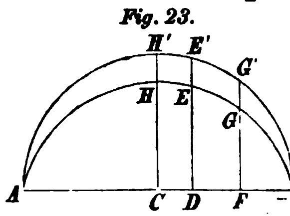


Fig. 23.

II. Stelle AHB (Fig. 23) eine halbe Ellipse vor, deren grosse Halbaxe $CB = a$, kleine $CH = b$, deren Gleichung also $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ ist, wenn man den Mittelpunkt C als Anfangspunkt der Koordinaten wählt; man soll das Stück DEGF berechnen, für welches $CD = x_0$, $CF = x_1$, (wo x_0 negativ wäre, wenn DE links von CH läge). Man hat hier

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2},$$

also die fragliche Fläche =

$$\frac{b}{a}\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{a^2 - x^2}\,\partial x.$$

Was nun das hier vorkommende Integral anbelangt, so gehört es zu den in §. 40 betrachteten und könnte also nach der dortigen Nr. III behandelt werden. Es lässt sich dasselbe jedoch auch in anderer Weise ermitteln. Da nämlich $x^2 < a^2$, so setze man $x = a \sin\varphi$ und hat (§. 36):

$$\int\sqrt{a^2 - x^2}\,\partial x = \int\sqrt{a^2 - a^2\sin^2\varphi}\,.\,a\cos\varphi\,\partial\varphi = a^2\int\cos^2\varphi\,\partial\varphi = a^2\left[\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{2} + \frac{1}{2}\varphi\right]$$

(§. 42), d. h. da $\sin\varphi = \frac{x}{a}$, $\cos\varphi = \frac{1}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, wobei $\cos\varphi$ immer positiv ist, indem φ höchstens von $-\frac{\pi}{2}$ bis $+\frac{\pi}{2}$ gehen kann (x von $-a$ bis $+a$), ferner $\varphi = \text{arc}\left(\sin = \frac{x}{a}\right)$, so ist also

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,\partial x = a^2\left\{\frac{x}{a}\cdot\frac{1}{a}\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{2}+\frac{1}{2}\operatorname{arc}\left(\sin=\frac{x}{a}\right)\right\}=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}$$
$$+\frac{a^2}{2}\operatorname{arc}\left(\sin=\frac{x}{a}\right),$$

mithin
$$\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{a^2-x^2}\,\partial x=\frac{x_1}{2}\sqrt{a^2-x_1^2}-\frac{x_0}{2}\sqrt{a^2-x_0^2}+\frac{a^2}{2}\operatorname{arc}\left(\sin=\frac{x_1}{a}\right)$$
$$-\frac{a^2}{2}\operatorname{arc}\left(\sin=\frac{x_0}{a}\right),$$

und die fragliche Fläche also:

$$\frac{b x_1}{2a}\sqrt{a^2-x_1^2}-\frac{b x_0}{2a}\sqrt{a^2-x_0^2}+\frac{ab}{2}\operatorname{arc}\left(\sin=\frac{x_1}{a}\right)-\frac{ab}{2}\operatorname{arc}\left(\sin=\frac{x_0}{a}\right).$$

Für die Fläche CHGF ist $x_0=0$, also dieselbe

$$\frac{b x_1}{2a}\sqrt{a^2-x_1^2}+\frac{ab}{2}\operatorname{arc}\left(\sin=\frac{x_1}{a}\right).$$

Setzt man hier $x_1=a$, so erhält man die Fläche HCB, d. h. den vierten Theil der elliptischen Fläche. Derselbe ist mithin $\frac{ab\pi}{4}$, so dass die ganze von der Ellipse umschlossene Fläche $=ab\pi$ ist. Ist AH'B ein mit a um C beschriebener Halbkreis, so erhält man die Fläche DE'G'F, wenn man in dem Ausdrucke von DEGF $b=a$ setzt. Daraus folgt unmittelbar, dass

$$DEGF : DE'G'F = b : a. \quad (§. 20.)$$

III. Nimmt man (Fig. 24) den einen Brennpunkt der Ellipse S als Pol, SA als Polaraxe, so ist, wenn $SM=r$, $ASM=\omega$, $e=SC$ die Entfernung des Brennpunkts vom Mittelpunkt, die Polargleichung der Ellipse:

$$r=\frac{b^2}{a+e\cos\omega},$$

worin a und b dieselbe Bedeutung haben, wie in Nr. II.

Fig. 24.

Ist also der Ausschnitt ASM, für den der Anfangswerth von $\omega=0$, der Endwerth $(ASM)=\omega_1$ zu berechnen, so ist derselbe (§. 53. III):

$$\frac{1}{2}\int_0^{\omega_1} r^2\,\partial\omega=\frac{b^4}{2}\int_0^{\omega_1}\frac{\partial\omega}{(a+e\cos\omega)^2}.$$

Aber nach §. 44:

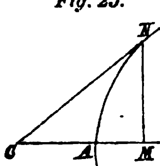
$$\int\frac{\partial\omega}{(a+e\cos\omega)^2}=-\frac{e}{a^2-e^2}\,\frac{\sin\omega}{a+e\cos\omega}+\frac{a}{a^2-e^2}\int\frac{\partial\omega}{a+e\cos\omega}$$
$$=-\frac{e}{a^2-e^2}\,\frac{\sin\omega}{a+e\cos\omega}-\frac{2a}{(a^2-e^2)^{\frac{3}{2}}}\operatorname{arc}\left(\operatorname{tg}=\sqrt{\frac{a+e}{a-e}}\operatorname{cotg}\frac{\omega}{2}\right),$$

mithin da $a^2-e^2=b^2$, die Fläche:

$$-\frac{e b^2}{2}\,\frac{\sin\omega_1}{a+e\cos\omega_1}-ab\operatorname{arc}\left(\operatorname{tg}=\sqrt{\frac{a+e}{a-e}}\operatorname{cotg}\frac{\omega_1}{2}\right)+\frac{ab\pi}{2}.$$

Setzt man $\omega_1=\pi$, so erhält man die halbe elliptische Fläche $=\frac{ab\pi}{2}$.*

* Schon in §. 50. I haben wir darauf aufmerksam gemacht, dass man wohl beachten müsse, ob innerhalb der Gränzen der Integration $\operatorname{arc}\left(\operatorname{tg}=\sqrt{\frac{a+e}{a-e}}\operatorname{cotg}\frac{\omega}{2}\right)$ auch stetig verlaufe, wobei wir diese Grösse zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ einschliessen. Da hier die Gränzen


Fig. 25.

IV. Sey C (Fig. 25) der Mittelpunkt einer Hyperbel, deren reelle Halbaxe CA $=a$, imaginäre $=b$, deren Gleichung also $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$ ist, und sey CM $=x_1$, so soll das Flächenstück AMN berechnet werden.

Man hat, da AC $=a$, $y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$:

$$AMN=\frac{b}{a}\int_a^{x_1}\sqrt{x^2-a^2}\,\partial x.$$

Um $\int\sqrt{x^2-a^2}\,\partial x$ zu bestimmen, beachte man, dass immer $x^2>a^2$, so dass man setzen darf $x=\frac{a}{\cos\varphi}$, $\frac{\partial x}{\partial\varphi}=\frac{a\sin\varphi}{\cos^2\varphi}$, mithin $(\cos\varphi>0)$

$$\int\sqrt{x^2-a^2}\,\partial x=a\int\frac{\sqrt{a^2-a^2\cos^2\varphi}}{\cos\varphi}\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}\partial\varphi=a^2\int\frac{\sin^2\varphi}{\cos^3\varphi}\partial\varphi=a^2\left[\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}-\int\frac{\partial\varphi}{\cos^3\varphi}\right]$$

$$=a^2\left[\frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi}-\frac{\sin\varphi}{2\cos^2\varphi}-\frac{1}{2}\int\frac{\partial\varphi}{\cos\varphi}\right]=a^2\left[\frac{\sin\varphi}{2\cos^2\varphi}+\frac{1}{2}l\left(tg\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\varphi\right)\right)\right]\ (\S\ 42).$$

Aber $tg\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\varphi\right)=\frac{1-tg\frac{1}{2}\varphi}{1+tg\frac{1}{2}\varphi}=\frac{\cos\frac{1}{2}\varphi-\sin\frac{1}{2}\varphi}{\cos\frac{1}{2}\varphi+\sin\frac{1}{2}\varphi}=\frac{\cos^2\frac{1}{2}\varphi-\sin^2\frac{1}{2}\varphi}{(\cos\frac{1}{2}\varphi+\sin\frac{1}{2}\varphi)^2}=\frac{\cos\varphi}{1+\sin\varphi}$,

also da $\cos\varphi=\frac{a}{x}$, $\sin\varphi=\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}=\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}$, ist

$$\int\sqrt{x^2-a^2}\,\partial x=\frac{a^2}{2}\left[x\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a^2}+l\left(\frac{a}{x+\sqrt{x^2-a^2}}\right)\right]$$

$$=\frac{x\sqrt{x^2-a^2}}{2}-\frac{a^2}{2}l\left(\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right),$$

und

$$\int_a^{x_1}\sqrt{x^2-a^2}\,\partial x=\frac{x_1\sqrt{x_1^2-a^2}}{2}-\frac{a^2}{2}l\left(\frac{x_1+\sqrt{x_1^2-a^2}}{a}\right),$$

so dass die fragliche Fläche $=\frac{bx_1\sqrt{x_1^2-a^2}}{2a}-\frac{ab}{2}l\left(\frac{x_1+\sqrt{x_1^2-a^2}}{a}\right)$.

Ist MN $=y_1$, so ist $\sqrt{x_1^2-a^2}=\frac{ay_1}{b}$, also ist auch

$$AMN=\frac{x_1y_1}{2}-\frac{ab}{2}l\left(\frac{x_1}{a}+\frac{y_1}{b}\right),$$

mithin da CMN $=\frac{1}{2}x_1y_1$, so ist CAN $=\frac{ab}{2}l\left(\frac{x_1}{a}+\frac{y_1}{b}\right)$.

Fig. 26.

V. Sey AN ein Parabelbogen (Fig. 26), A der Scheitel der Parabel, deren Gleichung $y^2=2px$ sey, AM $=x_1$, so ist $y=\sqrt{2px}$, also die Fläche

$$AMN=\int_0^{x_1}\sqrt{2px}\,\partial x=\sqrt{2p}\int_0^{x_1}\sqrt{x}\,\partial x=\frac{2}{3}\sqrt{2p}\,x_1^{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}x_1\sqrt{2px_1},$$

oder wenn MN $=y_1$, $\sqrt{2px_1}=y_1$:

$$AMN=\frac{2}{3}x_1y_1.$$

---

0 und π sind, und für $\omega=0$, $\cotg\frac{\omega}{2}=\infty$, für $\omega=\pi$, $\cotg\frac{\omega}{2}=0$, und $\cotg\frac{\omega}{2}$ stetig verläuft von ∞ bis 0, eben so dann $arc\left(tg=\sqrt{\frac{a+e}{a-e}}\cotg\frac{\pi}{2}\right)$ stetig von $\frac{\pi}{2}$ bis 0, so unterliegt das Resultat keiner Beanstandung.

Da $AMNR = x_1 y_1$, so ist $AMN = \frac{2}{3} AMNR$, $ANR = \frac{1}{2} AMN$, ein schon von Archimedes gefundener Satz.

Wollte man die Fläche MNPQ haben, so wäre sie $= APQ - AMN = \frac{2}{3} x_2 y_2 - \frac{2}{3} x_1 y_1$, wenn $AP = x_2$, $PQ = y_2$, $AM = x_1$, $MN = y_1$. Natürlich wäre auch direkt:

$$MPQN = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{2px}\, \partial x.$$

Fig. 27.

VI. Sey ANB (Fig. 27) eine Zykloide, deren Gleichungen sind $x = r(\omega - \sin\omega)$, $y = r(1 - \cos\omega)$, und sey ω_1 der Werth von ω, der dem Punkt N entspricht, so ist wenn $AM = x_1$:

$$AMN = \int_0^{x_1} y\, \partial x = \int_0^{\omega_1} y \frac{\partial x}{\partial \omega} \partial \omega \text{ (§. 49. IV)} =$$

$$\int_0^{\omega_1} r(1 - \cos\omega) r(1 - \cos\omega) \partial\omega = r^2 \int_0^{\omega_1} (1 - \cos\omega)^2 \partial\omega = r^2 \int_0^{\omega_1} (1 - 2\cos\omega + \cos^2\omega) \partial\omega.$$

Aber (§. 42):

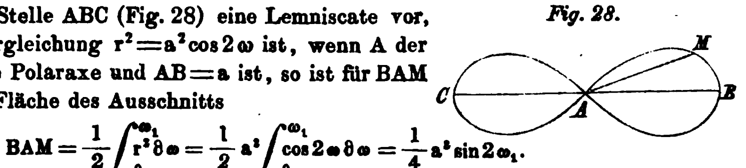
$$\int (1 - 2\cos\omega + \cos^2\omega) \partial\omega = \omega - 2\sin\omega + \frac{\sin\omega\cos\omega}{2} + \frac{1}{2}\omega = \frac{3}{2}\omega - 2\sin\omega + \frac{\sin 2\omega}{4},$$

$$\int_0^{\omega_1} (1 - 2\cos\omega + \cos^2\omega) \partial\omega = \frac{3}{2}\omega_1 - 2\sin\omega_1 + \frac{\sin 2\omega_1}{4},$$

also die Fläche $AMN = \frac{3}{2} r^2 \omega_1 - 2r^2 \sin\omega_1 + \frac{r^2 \sin 2\omega_1}{4}$. Ist $MN = y_1$, so ist $\cos\omega_1 = \frac{r - y_1}{r}$ und es liegt ω_1 zwischen 0 und π, wenn MN in der ersten Hälfte der Zykloide, zwischen π und 2π, wenn MN in der zweiten Hälfte liegt. Für $\omega_1 = \pi$ hat man die halbe Fläche der Zykloide $= \frac{3}{2} r^2 \pi$, so dass die ganze Fläche $ABNA = 3r^2\pi$ ist.

Da $AC = r\pi$, $AD = CE = 2r$, so ist $ACED = 2r^2\pi$, also da $ACE = \frac{3}{2} r^2 \pi$, so ist $AED = \frac{1}{2} r^2 \pi$, d. h. $AED = \frac{1}{3} AEC$.

Fig. 28.



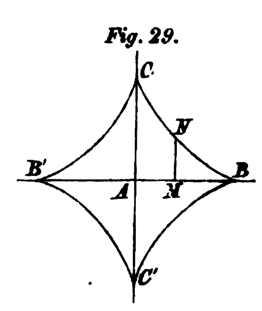
VII. Stelle ABC (Fig. 28) eine Lemniscate vor, deren Polargleichung $r^2 = a^2 \cos 2\omega$ ist, wenn A der Pol, AB die Polaraxe und $AB = a$ ist, so ist für $BAM = \omega_1$, die Fläche des Ausschnitts

$$BAM = \frac{1}{2} \int_0^{\omega_1} r^2 \partial\omega = \frac{1}{2} a^2 \int_0^{\omega_1} \cos 2\omega\, \partial\omega = \frac{1}{4} a^2 \sin 2\omega_1.$$

Für $\omega_1 = \frac{\pi}{4}$ hat man die Fläche über $AB = \frac{1}{4} a^2$, so dass die ganze von der Lemniscate umschlossene (zweitheilige) Fläche $= a^2$ ist.

VIII. Sey BCB'C'B die Evolute einer Ellipse (Fig. 29, siehe S. 212), deren Gleichung also $\left(\frac{ax}{a^2 - b^2}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{by}{a^2 - b^2}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$ ist, und wo $AB = \frac{a^2 - b^2}{a}$, $AC = \frac{a^2 - b^2}{b}$, so ist, wenn $a^2 - b^2 = e^2$:

Fig. 29.



$$\left(\frac{by}{e^2}\right)^{\frac{2}{3}} = 1-\left(\frac{ax}{e^2}\right)^{\frac{2}{3}},\quad y=\frac{e^2}{b}\left[1-\left(\frac{ax}{e^2}\right)^{\frac{2}{3}}\right]^{\frac{3}{2}},$$

also für $AM=x_1$, die Fläche

$$AMNC=\frac{e^2}{b}\int_0^{x_1}\left[1-\left(\frac{ax}{e^2}\right)^{\frac{2}{3}}\right]^{\frac{3}{2}}\partial x.$$

Man setze nun $x=z^3$, so ist

$$\int\left[1-\left(\frac{ax}{e^2}\right)^{\frac{2}{3}}\right]^{\frac{3}{2}}\partial x=\int\left[1-\left(\frac{a}{e^2}\right)^{\frac{2}{3}}z^2\right]^{\frac{3}{2}}3z^2\partial z$$
$$=3\int z^2(1-\alpha z^2)^{\frac{3}{2}}\partial z,\ \alpha=\left(\frac{a}{e^2}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Aber nach §. 41 ist, wenn man nach einander die dortigen Formeln (e), (b) anwendet:

$$\int z^2(1-\alpha z^2)^{\frac{3}{2}}\partial z=-\frac{z(1-\alpha z^2)^{\frac{5}{2}}}{6\alpha}+\frac{1}{6\alpha}\int(1-\alpha z^2)^{\frac{3}{2}}\partial z$$
$$=-\frac{z(1-\alpha z^2)^{\frac{5}{2}}}{6\alpha}+\frac{1}{6\alpha}\cdot\frac{z(1-\alpha z^2)^{\frac{3}{2}}}{4}+\frac{1}{6\alpha}\cdot\frac{3}{4}\int(1-\alpha z^2)^{\frac{1}{2}}\partial z$$
$$=-\frac{z(1-\alpha z^2)^{\frac{5}{2}}}{6\alpha}+\frac{z(1-\alpha z^2)^{\frac{3}{2}}}{24\alpha}+\frac{z(1-\alpha z^2)^{\frac{1}{2}}}{16\alpha}+\frac{1}{16\alpha}\int\frac{\partial z}{\sqrt{1-\alpha z^2}}$$
$$=-\frac{z(1-\alpha z^2)^{\frac{5}{2}}}{6\alpha}+\frac{z(1-\alpha z^2)^{\frac{3}{2}}}{24\alpha}+\frac{z(1-\alpha z^2)^{\frac{1}{2}}}{16\alpha}+\frac{1}{16\alpha\sqrt{\alpha}}\operatorname{arc}(\sin=z\sqrt{\alpha}).$$

Setzt man zur Abkürzung $\sqrt[3]{ax}=u$, $\sqrt[3]{e^2}=\sqrt[3]{a^2-b^2}=\varepsilon$, so ist $\alpha=\frac{a^{\frac{2}{3}}}{\varepsilon^2}$,

$z=x^{\frac{1}{3}}=\frac{u}{a^{\frac{1}{3}}}$, $\alpha z^2=\frac{a^{\frac{2}{3}}}{\varepsilon^2}\cdot x^{\frac{2}{3}}=\frac{u^2}{\varepsilon^2}$, $\sqrt{\alpha}=\frac{a^{\frac{1}{3}}}{\varepsilon}$, so dass

$$\int\left[1-\left(\frac{ax}{e^2}\right)^{\frac{2}{3}}\right]^{\frac{3}{2}}\partial x=-\frac{u(\varepsilon^2-u^2)^{\frac{5}{2}}}{2a\varepsilon^3}+\frac{u(\varepsilon^2-u^2)^{\frac{3}{2}}}{8a\varepsilon}+\frac{3u(\varepsilon^2-u^2)^{\frac{1}{2}}\varepsilon}{16a}+\frac{3\varepsilon^3}{16a}\operatorname{arc}\left(\sin=\frac{u}{\varepsilon}\right),$$

mithin da für $x=0$ auch $u=0$, und für $x=x_1$: $u=\sqrt[3]{ax_1}=u_1$, und $\frac{e^2}{b}=\frac{\varepsilon^3}{b}$:

$$AMNC=-\frac{u_1(\varepsilon^2-u_1^2)^{\frac{5}{2}}}{2ab}+\frac{u_1(\varepsilon^2-u_1^2)^{\frac{3}{2}}\varepsilon^2}{8ab}+\frac{3u_1(\varepsilon^2-u_1^2)^{\frac{1}{2}}\varepsilon^4}{16ab}+\frac{3\varepsilon^6}{16ab}\operatorname{arc}\left(\sin=\frac{u_1}{\varepsilon}\right).$$

Für $x_1=\frac{a^2-b^2}{a}=\frac{e^2}{a}=\frac{\varepsilon^3}{a}$ ist $u_1=\varepsilon$, also hat man für die Fläche

$$ABC=\frac{3\varepsilon^6}{16ab}\cdot\frac{\pi}{2},\ \text{mithin die ganze Fläche}=\frac{3\varepsilon^6\pi}{8ab}=\frac{3e^4\pi}{8ab}=\frac{3(a^2-b^2)^2\pi}{8ab}.$$

Fig. 30.

IX. Sey $y=a+bx+cx^2$ die Gleichung einer Kurve (F. 30) und die Abszissen von $A: x_0$, von $C: x_0+2h$, wo $AE=EC=h$, so ist die Fläche

$$ACDB=\int_{x_0}^{x_0+2h}(a+bx+cx^2)\partial x=a.2h+\frac{1}{2}b[(x_0+2h)^2-x_0^2]$$
$$+\frac{1}{3}c[(x_0+2h)^3-x_0^3].$$
$$=2ah+\frac{1}{2}b(4x_0h+4h^2)+\frac{1}{3}c(6x_0^2h+12x_0h^2+8h^3)$$

$$= \frac{h}{3}[6a + 6x_0 b + 6bh + 6x_0^2 c + 12x_0 hc + 8h^2 c]$$

$$= \frac{h}{3}\left\{a + bx_0 + cx_0^2 + 4[a + b(x_0 + h) + c(x_0 + h)^2] + a + b(x_0 + 2h) + c(x_0 + 2h)^2\right\}.$$

Ist nun $AB = y_0$, $EF = y_1$, $CD = y_2$, so ist $y_0 = a + bx_0 + cx_0^2$, $y_1 = a + b(x_0 + h) + c(x_0 + h)$, $y_2 = a + b(x_0 + 2h) + c(x_0 + 2h)^2$, also

$$ACDB = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2).$$

Wäre eben so $y = a + bx + cx^2 + dx^3$ die Gleichung einer Kurve wie Fig. 30 und man hätte als Gränzabszissen x_0, $x_0 + 3h$, während y_0, y_1, y_2, y_3 die den Abszissen x_0, $x_0 + h$, $x_0 + 2h$, $x_0 + 3h$ entsprechenden Ordinaten sind, so wäre die Fläche

$$\int_{x_0}^{x_0+3h}(a + bx + cx^2 + dx^3)\partial x = a.3h + \frac{b}{2}[(x_0 + 3h)^2 - x_0^2] + \frac{c}{3}[(x_0 + 3h)^3 - x_0^3]$$

$$+ \frac{d}{4}[(x_0 + 3h)^4 - x_0^4], = \frac{3h}{8}[y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3].$$

Auf diese Formeln gründet sich die Simpson'sche Formel für die näherungsweise Berechnung eines Flächenraumes ABCD (Fig. 31). Man theile nämlich AD in $2n$ gleiche Theile, jeden $= h$, so dass also $h = \frac{AD}{2n}$; errichte in den Theilpunkten Ordinaten $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{2n}$, wo also $AB = y_0$, $CD = y_{2n}$, und lege nun durch je drei Punkte, etwa B, E, F eine Kurve, deren Gleichung die Form $y = a + bx + cx^2$ hat, was immer möglich ist, da die drei Grössen a, b, c bestimmt werden können, wenn man die Bedingungen anschreibt, dass die Kurve durch die drei Punkte gehen soll. Je näher nun die Punkte an einander liegen, desto mehr wird auch, innerhalb derselben, die so gezogene Kurve mit der eigentlichen zusammenfallen, und man wird also für das Flächenstück zwischen der ersten und dritten Ordinate haben:

Fig. 31.

$$\frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2).$$

Eben so für das zwischen der dritten und fünften: $\frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4)$ u. s. w., so dass die ganze Fläche nahezu $= \frac{h}{3}[y_0 + 4y_1 + y_2 + y_2 + 4y_3 + y_4 + y_4 + 4y_5 + \ldots + 4y_{2n-1} + y_{2n}]$

$$= \frac{h}{3}[y_0 + y_{2n} + 4(y_1 + y_3 + y_5 + \ldots + y_{2n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2n-2})]$$

ist.

§. 55.

Soll man die Länge des Bogens NN' (Fig. 32) berechnen,* dessen

* Von der **Länge** einer geraden Linie haben wir einen vollkommen klaren Begriff; bei der Länge einer krummen Linie kann man schon eher Anstand finden. Will man in diesem Falle letztere auf erstere zurückführen, so denke man sich einen biegsamen Faden über die krumme Linie gespannt, den man dann zur geraden Linie ausstreckt. Uebrigens betrachten

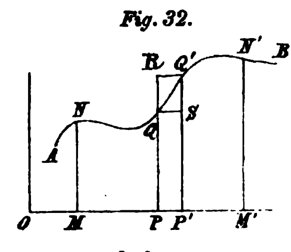


Fig. 32.

Endpunkten die Abszissen $OM = a$, $OM' = b$ zugehören, so sey für $OP = x$, die Länge von $NQ = s$, und man hat (§. 13. V):

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \pm\sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2},$$

worin das obere Zeichen gilt, wenn s wächst mit wachsendem x, das untere im entgegengesetzten Falle. Daraus folgt, dass für $PP' = \Delta x$, $QQ' = \Delta s$, man habe:

$$\Delta s = \pm\sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}\Delta x + \alpha \Delta x,$$

worin α unendlich abnimmt mit unendlich abnehmendem Δx. Gesetzt nun, wie in unserer Figur, es wachse der zu berechnende Bogen in seiner ganzen Ausdehnung mit wachsendem x, so folgt hieraus ganz wie in §. 53, dass die Länge von NN' gleich sey der Gränze, der sich die Summe der Werthe, die man erhält, wenn man in $\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}\Delta x$ der Grösse x alle Werthe von $x = a$ bis zu $x = b$ beilegt, mit unendlich abnehmendem Δx nähert, wo also Δx der Unterschied der auf einander folgenden Werthe von x ist. Daraus folgt unmittelbar, dass

$$NN' = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}\partial x.$$

Anm. Dieselbe Formel lässt sich ebenfalls in folgender Weise finden. Es ist, wenn Bogen $NN' = \sigma$, sicher

$$\sigma = \int_0^\sigma \partial s,$$

also wenn man die Veränderliche x einführt, wo dann $\frac{\partial s}{\partial x} = \sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}$:

$$\sigma = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}\partial x,$$

indem für $s = 0$ auch $x = a$, für $s = \sigma : x = b$ ist.

Würde der Bogen abnehmen mit wachsendem x (wenn man z. B. seinen Anfangspunkt in N' gewählt hätte), so wäre

$$N'N = -\int_b^a \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}\partial x.$$

Fig. 33.

Würde innerhalb der Gränzen des Integrals der Bogen bald wachsen mit wachsendem x, bald abnehmen, so würden diese Formeln nicht mehr gelten und man müsste den ganzen Bogen in einzelne Theile abtrennen. So z. B. Fig. 33, wenn $Oa = \alpha$, $Ob = \beta$, $Oc = \gamma$, $Od = \delta$, wäre:

---

wir offenbar die krumme Linie selbst als die Gränze, der sich ein eingeschriebenes Vieleck nähert, wenn seine Seitenanzahl immer grösser wird. Von diesem Standpunkt aus ergibt sich dann ein klarer Begriff der Länge einer krummen Linie, da sie die Gränze der Summe der Polygonseiten ist.

$$\text{Bogen AB} = \int_\alpha^\beta \sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}\,\partial x,\ \text{Bogen BC} = -\int_\beta^\gamma \sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}\,\partial x,$$

$$\text{Bogen CD} = \int_\gamma^\delta \sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}\,\partial x,$$

wobei jeweils für y diejenige Funktion von x zu wählen wäre, die dem betreffenden Bogenstück entspricht.

Wollte man für Polarkoordinaten die betreffende Formel herstellen, so wäre $y = r\sin\omega$, $x = r\cos\omega$, also wenn r als Funktion von ω, gegeben durch die Polargleichung der Kurve, angesehen wird, ist (§. 14):

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\frac{\partial y}{\partial \omega}}{\frac{\partial x}{\partial \omega}},\ \frac{\partial x}{\partial \omega} = \frac{\partial r}{\partial \omega}\cos\omega - r\sin\omega,\ \frac{\partial y}{\partial \omega} = \frac{\partial r}{\partial \omega}\sin\omega + r\cos\omega,$$

also wenn ω_0, ω_1 die Werthe von ω sind, die den Endpunkten entsprechen und der Bogen nur wächst mit wachsendem ω (§. 49, IV), dieser Bogen =

$$\int_{\omega_0}^{\omega_1} \sqrt{1+\frac{\left(\frac{\partial y}{\partial \omega}\right)^2}{\left(\frac{\partial x}{\partial \omega}\right)^2}}\,\frac{\partial x}{\partial \omega}\,\partial\omega = \int_{\omega_0}^{\omega_1} \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \omega}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \omega}\right)^2}\,\partial\omega\ *$$

$$= \int_{\omega_0}^{\omega_1} \sqrt{\left(\frac{\partial r}{\partial \omega}\right)^2 + r^2}\,\partial\omega.$$

Wir wollen nun diese Formeln ebenfalls auf einige Beispiele anwenden.

I. Man soll den Parabelbogen AN (Fig. 26) berechnen, wenn $AM = x_1$.

Hier ist $y^2 = 2px$, $y\frac{\partial y}{\partial x} = p$, $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{p}{y}$, $\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} = \frac{\sqrt{y^2+p^2}}{y} = \frac{\sqrt{2px+p^2}}{\sqrt{2px}} = \sqrt{\frac{2x+p}{2x}}$, also

* Streng genommen sollte man hier die Fälle unterscheiden, da $\frac{\partial x}{\partial \omega}$ positiv oder negativ ist. Ist nämlich $\frac{\partial x}{\partial \omega} < 0$, so ist $\sqrt{1+\frac{\left(\frac{\partial y}{\partial \omega}\right)^2}{\left(\frac{\partial x}{\partial \omega}\right)^2}}\,\frac{\partial x}{\partial \omega} = -\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \omega}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \omega}\right)^2}$. Allein wenn $\frac{\partial x}{\partial \omega} < 0$, so nimmt x ab mit wachsendem ω (§. 14); setzt man aber voraus, es wachse der Bogen s mit wachsendem ω, so ist $\frac{\partial s}{\partial \omega} > 0$, also $\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{\frac{\partial s}{\partial \omega}}{\frac{\partial x}{\partial \omega}} < 0$, wie natürlich, da jetzt s wächst mit abnehmendem x. Demnach ist $\frac{\partial s}{\partial x} = -\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}$, $\frac{\partial s}{\partial \omega} = \frac{\partial s}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \omega} = -\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}\,\frac{\partial x}{\partial \omega} = +\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \omega}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \omega}\right)^2}$, gerade wie wenn $\frac{\partial x}{\partial \omega} > 0$. So lange also s wächst mit wachsendem ω gilt die Formel $\frac{\partial s}{\partial \omega} = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \omega}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \omega}\right)^2}$, also auch die Formel des Textes, in der natürlich $\omega_1 > \omega_0$ seyn muss. Aehnliche Betrachtungen werden in allen künftigen ähnlichen Fällen maassgebend seyn.

$$AN = \sqrt{\tfrac{1}{2}}\int_0^{x_1}\sqrt{\frac{2x+p}{x}}\,\partial x.$$

Man setze nun $\frac{2x+p}{x} = z^2$, $x = \frac{p}{z^2-2}$, $\frac{\partial x}{\partial z} = -\frac{2zp}{(z^2-2)^2}$, so ist

$$\int\sqrt{\frac{2x+p}{x}}\,\partial x = -2p\int\frac{z^2}{(z^2-2)^2}\,\partial z = -\frac{2p}{4}\int\left[\frac{1}{(z+\sqrt{2})^2} - \frac{1}{\sqrt{2}(z+\sqrt{2})} + \frac{1}{(z-\sqrt{2})^2} + \frac{1}{\sqrt{2}(z-\sqrt{2})}\right]\partial z \quad (\S.\ 37)$$

$$= -\frac{2p}{4}\left[-\frac{1}{z+\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\,l(z+\sqrt{2}) - \frac{1}{z-\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\,l(z-\sqrt{2})\right] = -\frac{p}{2}\left[-\frac{2z}{z^2-2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\,l\left(\frac{z+\sqrt{2}}{z-\sqrt{2}}\right)\right] = \frac{pz}{z^2-2} + \frac{p}{2\sqrt{2}}\,l\left(\frac{z+\sqrt{2}}{z-\sqrt{2}}\right) = \frac{p\sqrt{\frac{2x+p}{x}}}{\frac{2x+p}{x}-2} +$$

$$\frac{p}{2\sqrt{2}}\,l\left(\frac{\sqrt{\frac{2x+p}{x}}+\sqrt{2}}{\sqrt{\frac{2x+p}{x}}-\sqrt{2}}\right) = \sqrt{x(p+2x)} + \frac{p}{2\sqrt{2}}\,l\left(\frac{\sqrt{p+2x}+\sqrt{2x}}{\sqrt{p+2x}-\sqrt{2x}}\right)$$

mithin

$$AN = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{x_1}\sqrt{\frac{2x+p}{x}}\,\partial x = \sqrt{\frac{x_1(p+2x_1)}{2}} + \frac{p}{4}\,l\left(\frac{\sqrt{p+2x_1}+\sqrt{2x_1}}{\sqrt{p+2x_1}-\sqrt{2x_1}}\right).$$

Wie man NQ ($=AQ-AN$) hieraus finden kann, ist wohl klar.

II. Für den elliptischen Bogen HG (Fig. 23), für den $CF = x_1$ ist $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$, $a^2y\frac{\partial y}{\partial x} + b^2x = 0$, $\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y} = -\frac{b}{a}\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$, $1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 = 1 + \frac{b^2x^2}{a^2(a^2-x^2)} = \frac{a^4 - a^2x^2 + b^2x^2}{a^2(a^2-x^2)} = \frac{a^4-(a^2-b^2)x^2}{a^2(a^2-x^2)}$, also wenn $a^2-b^2 = a^2\alpha^2$, d. h. $\alpha^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2}$ $(a > b)$, so ist $\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2-\alpha^2x^2}{a^2-x^2}}$, und

$$HG = \int_0^{x_1}\sqrt{\frac{a^2-\alpha^2x^2}{a^2-x^2}}\,\partial x.$$

Man setze hier, da $x < a$: $x = a\sin\varphi$, so ist

$$\int\sqrt{\frac{a^2-\alpha^2x^2}{a^2-x^2}}\,\partial x = \int\sqrt{\frac{a^2-a^2\alpha^2\sin^2\varphi}{a^2-a^2\sin^2\varphi}}\,a\cos\varphi\,\partial\varphi = a\int\sqrt{1-\alpha^2\sin^2\varphi}\,\partial\varphi.$$

also
$$HG = a\int_0^{\varphi_1}\sqrt{1-\alpha^2\sin^2\varphi}\,\partial\varphi,\ \sin\varphi_1 = \frac{x_1}{a}.$$

Ist hier $x_1 = a$, $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$, so ist die Länge des vierten Theils der Ellipse =

$$a\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\alpha^2\sin^2\varphi}\,\partial\varphi.$$

Der Werth dieses Integrals lässt sich hier nur durch Entwicklung in unendliche Reihen finden. Man hat (§. 46):

$$\int\sqrt{1-\alpha^2\sin^2\varphi}\,\partial\varphi = \int\left[1 + \frac{1}{2}\alpha^2\sin^2\varphi - \frac{1.1}{2.4}\alpha^4\sin^4\varphi - \frac{1.1.3}{2.4.6}\alpha^6\sin^6\varphi - \ldots\right]\partial\varphi,$$

also $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\alpha^2\sin^2\varphi}\,\partial\varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\alpha^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\varphi\,\partial\varphi - \frac{1.1}{2.4}\alpha^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\varphi\,\partial\varphi \ldots$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\alpha^2 . \frac{1}{2} . \frac{\pi}{2} - \frac{1.1}{2.4}\alpha^4 . \frac{3.1}{4.2}\,\frac{\pi}{2} - \ldots\ldots \text{ (§. 50)},$$

$$HB = \frac{a\pi}{2}\left[1 - \left(\frac{1.\alpha}{2}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{1.3}{2.4}\alpha^2\right)^2 - \frac{1}{5}\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\alpha^3\right)^2 - \ldots\right].$$

Für $a=b$ ist die Ellipse ein Kreis, $\alpha=0$, also der Viertelkreis $=\frac{a\pi}{2}$, wie bekannt.

III. Für den hyperbolischen Bogen AN (Fig. 25) ist $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, $b^2x - a^2y\frac{\partial y}{\partial x}=0$, $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{b^2}{a^2}\,\frac{x}{y} = \frac{b}{a}\,\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}$, $1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 = \frac{a^2x^2 - a^4 + b^2x^2}{a^2(x^2-a^2)} = \frac{(a^2+b^2)x^2 - a^4}{a^2(x^2-a^2)}$.

Also $$AN = \int_a^{x_1}\sqrt{\frac{(a^2+b^2)x^2-a^4}{a^2(x^2-a^2)}}\,\partial x.$$

Man setze hier, da $x > a$: $x = \frac{a}{\sin\varphi}$, $\frac{\partial x}{\partial\varphi} = -\frac{a\cos\varphi}{\sin^2\varphi}$, so ist

$$\int\sqrt{\frac{(a^2+b^2)x^2-a^4}{a^2(x^2-a^2)}}\,\partial x = -\int\sqrt{\frac{a^2(a^2+b^2)-a^4\sin^2\varphi}{a^2(a^2-a^2\sin^2\varphi)}}\,\frac{a\cos\varphi}{\sin^2\varphi}\,\partial\varphi = -$$
$$\int\sqrt{\frac{a^2+b^2-a^2\sin^2\varphi}{a^2-a^2\sin^2\varphi}}\,\frac{a\cos\varphi}{\sin^2\varphi}\,\partial\varphi = -\sqrt{a^2+b^2}\int\frac{\sqrt{1-\beta^2\sin^2\varphi}}{\sin^2\varphi}\,\partial\varphi,\ \beta^2 = \frac{a^2}{a^2+b^2},$$

also da für $x=a$, $\sin\varphi = 1$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$, und für $x = x_1$, $\sin\varphi_1 = \frac{a}{x_1}$:

$$AN = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi_1}\sqrt{a^2+b^2}\,\frac{\sqrt{1-\beta^2\sin^2\varphi}}{\sin^2\varphi}\,\partial x = \frac{a}{\beta}\int_{\varphi_1}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{1-\beta^2\sin^2\varphi}}{\sin^2\varphi}\,\partial\varphi,$$

welches Integral wie in II. zu bestimmen wäre (vergl. §. 105).

IV. Für den Zykloidenbogen AN (Fig. 27) ist (§. 54. VI): $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\frac{\partial y}{\partial\omega}}{\frac{\partial x}{\partial\omega}}$ (§. 14) $= \frac{\sin\omega}{1-\cos\omega}$,

$$\int\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}\,\partial x = \int\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}\,\frac{\partial x}{\partial\omega}\,\partial\omega \text{ (§. 36)} = \int\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial\omega}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\omega}\right)^2}\,\partial\omega$$
$$= r\int\sqrt{(1-\cos\omega)^2+\sin^2\omega}\,\partial\omega = r\int\sqrt{2-2\cos\omega}\,\partial\omega = r\sqrt{2}\int\sqrt{2\sin^2\frac{\omega}{2}}\,\partial\omega =$$
$$2r\int\sin\frac{\omega}{2}\,\partial\omega = -4r\cos\frac{\omega}{2},$$

$$AN = \int_0^{\omega_1}\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial\omega}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial\omega}\right)^2}\,\partial\omega = -4r\cos\frac{\omega_1}{2} + 4r = 4r\left(1-\cos\frac{\omega_1}{2}\right) = 8r\sin^2\frac{\omega_1}{4}.$$

Für $\omega_1 = \pi$, $\sin^2\frac{\omega_1}{4} = \sin^2\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}$ ist AE also $=4r$, AEB $=8r$.

Anm. Für eine Epizykloide, deren Grundkreis R zum Halbmesser hat, während r der Halbmesser des rollenden Kreises ist, so dass deren Gleichungen

$$x = (R+r)\cos\omega - r\cos\frac{(R+r)\omega}{r},$$
$$y = (R+r)\sin\omega - r\sin\frac{(R+r)\omega}{r}$$

sind, findet man eben so als Länge eines ganzen Umlaufs (für den der obere Werth von $\omega = \frac{2r\pi}{R}$) die Grösse $\frac{8(R+r)r}{R}$.

V. Für die archimedische Spirale ist $r = a\omega$, $\frac{\partial r}{\partial\omega} = a$, also der von $\omega = 0$ bis $\omega = \omega_1$ sich erstreckende Bogen:

$$\int_0^{\omega_1}\sqrt{a^2+a^2\omega^2}\,\partial\omega = a\int_0^{\omega_1}\sqrt{1+\omega^2}\,\partial\omega = \frac{a}{2}\omega_1\sqrt{1+\omega_1^2}+\frac{a}{2}l(\omega_1+\sqrt{1+\omega_1^2}).$$

Ist r_1 die Länge des letzten Fahrstrahls, so ist $r_1 = a\omega_1$, $\omega_1 = \frac{r_1}{a}$.

Für die logarithmische Spirale ist $r = a^\omega$, $\frac{\partial r}{\partial\omega} = a^\omega\, l(a)$, also die Bogenlänge von $\omega = 0$ bis $\omega = \omega_1$:

$$\int_0^{\omega_1}\sqrt{a^{2\omega}+a^{2\omega}l(a)^2}\,\partial\omega = \int_0^{\omega_1}a^\omega\sqrt{1+l(a)^2}\,\partial\omega = \frac{\sqrt{1+l(a)^2}}{l(a)}(a^{\omega_1}-1).$$

Für die Lemmiscate (Fig. 28) ist $r^2 = a^2\cos 2\omega$, $r\frac{\partial r}{\partial\omega} = -a^2\sin 2\omega$, $\frac{\partial r}{\partial\omega} = -\frac{a^2\sin 2\omega}{r}$, $\left(\frac{\partial r}{\partial\omega}\right)^2+r^2 = \frac{a^4\sin^2 2\omega}{r^2}+r^2 = \frac{a^4\sin^2 2\omega+a^4\cos^2 2\omega}{a^2\cos 2\omega} = \frac{a^2}{\cos 2\omega} = \frac{a^2}{1-2\sin^2\omega}$, also ist

$$BM = a\int_0^{\omega_1}\frac{\partial\omega}{\sqrt{1-2\sin^2\omega}},\quad BMA = a\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\partial\omega}{\sqrt{1-2\sin^2\omega}},$$

welches Integral nach §. 46. I bestimmt werden könnte. (Vergl. §. 105.)

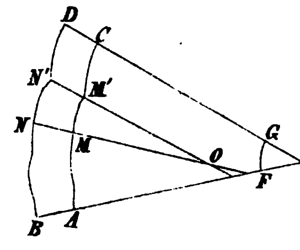


Fig. 34.

VI. Seyen (Fig. 34) AC und BD zwei parallele Kurven, deren Abstand $AB = CD = a$ sey; seyen ferner M und M' zwei unendlich nahe Punkte des Bogens AC; OM, OM' die in denselben gezogenen Normalen, die sich also im Krümmungsmittelpunkte O scheiden; eben so sind N, N' zwei benachbarte Punkte des Bogens BD, ON der Krümmungshalbmesser für BD im Punkte N. Sey also $OM = \varrho$, mithin $ON = \varrho + a$, so ist, da MM' als Kreisbogen vom Halbmesser ϱ und dem Winkel $MOM' = \Delta\omega$ angesehen werden kann:

$$MM' = \varrho\Delta\omega,\quad NN' = (\varrho+a)\Delta\omega,$$

und da, wenn ω der Winkel ist, den OM mit der ersten Normale AE macht, $\omega+\Delta\omega$, wie man sich leicht überzeugt, der Winkel seyn wird, den OM' mit AE macht, so folgt hieraus, dass wenn ω_1 der Winkel AEC der ersten und letzten Normale (AE und CE) ist, man haben werde (vorausgesetzt, dass der Bogen immer wachse mit wachsendem ω):

$$AC = \int_0^{\omega_1}\varrho\,\partial\omega,\quad BD = \int_0^{\omega_1}(\varrho+a)\,\partial\omega = \int_0^{\omega_1}\varrho\,\partial\omega + a\int_0^{\omega_1}\partial\omega = AC + a\omega_1.$$

Nun ist $a\omega_1$ die Länge eines mit dem Halbmesser $EF = a$ zwischen den Seiten des Winkels AEC beschriebenen Kreisbogens FG, so dass also

$$BD = AC + FG.$$

Der Kreisausschnitt MOM' ist eben so $\frac{1}{2}\varrho^2 \Delta\omega$, $NON' = \frac{1}{2}(\varrho + a)^2 \Delta\omega$, also $NMM'N' = NON' - MOM' = \frac{1}{2}[2a\varrho + a^2]\Delta\omega = a\varrho\Delta\omega + \frac{a^2}{2}\Delta\omega$, mithin ist die Fläche des Streifens

$$ABCD = \int_0^{\omega_1} a\varrho\,\partial\omega + \int_0^{\omega_1} \frac{a^2}{2}\partial\omega = a\int_0^{\omega_1}\varrho\,\partial\omega + \frac{a^2}{2}\omega_1 = a\,.\,AC + \frac{a^2\omega_1}{2},$$

und da nun $\frac{a^2\omega_1}{2}$ die Fläche des Ausschnitts EFG ist, so hat man

$$ABDC = a\,.\,AC + DFG,$$

wo $a\,.\,AC$ das Rechteck ist, das über der Grundlinie AC mit der Höhe a errichtet ist.

§. 56.

Dreht sich die Linie NN' (siehe Fig. 32, S. 214) um die Axe der x, so erzeugt die Fläche MM'NN' einen Körper, dessen Inhalt man nach §. 13. VII, in genau derselben Weise, wie in §. 53 finden wird gleich

$$\pi\int_a^b y^2\partial x,$$

wenn a und b die Abszissen von N und N' (d. h. OM und OM') und y (als Funktion von x) die Ordinate der Kurve NN' ist.

Ganz eben so ist die von NN' erzeugte Fläche, gemäss §. 13. VIII:

$$2\pi\int_a^b y\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}\,\partial x,$$

wobei wir voraussetzen wollen, dass der Bogen NN' immer wachse mit wachsendem x. *

Für den Fall der in §. 55 betrachteten Polarkoordinaten ($x = r\cos\omega$, $y = r\sin\omega$) werden diese Formeln, wenn ω_0, ω_1 die Werthe von ω sind, welche $x = a$ und $x = b$ entsprechen, zu:

$$\pm\pi\int_{\omega_0}^{\omega_1} r^2\sin^2\omega\,\frac{\partial(r\cos\omega)}{\partial\omega}\partial\omega = \pm\pi\int_{\omega_0}^{\omega_1} r^2\sin\omega\left(\frac{\partial r}{\partial\omega}\cos\omega - r\sin\omega\right)\partial\omega,$$

* Diese Bedingung ist unerlässlich, wenn obige Formeln gelten sollen. Sie setzt voraus, dass $b - a > 0$ sey, und dass y positiv genommen werde, was immer genügend seyn wird. Für den Fall der Figur 33 (§. 55) würde man zur Berechnung des von AD entstandenen Körpers oder der entstandenen Oberfläche die Formeln

$$\pi\left[\int_\alpha^\beta y_1^2\partial x + \int_\gamma^\beta y_2^2\partial x + \int_\gamma^\delta y_3^2\,\partial x\right] \text{ und } 2\pi\left[\int_\alpha^\beta y_1\sqrt{1+\left(\frac{\partial y_1}{\partial x}\right)^2}\partial x\right.$$
$$\left.+\int_\gamma^\beta y_2\sqrt{1+\left(\frac{\partial y_2}{\partial x}\right)^2}\partial x + \int_\gamma^\delta y_3\sqrt{1+\left(\frac{\partial y_3}{\partial x}\right)^2}\partial x\right]$$

haben, wo y_1, y_2, y_3 die Ordinaten für die Stücke AB, CB, CD sind. Wie man in andern Fällen zu verfahren hätte, wird aus diesem Beispiele klar genug hervorgehen.

und

$$\pm 2\pi\int_{\omega_0}^{\omega_1} r\sin\omega \sqrt{1+\frac{\left(\frac{\partial y}{\partial \omega}\right)^2}{\left(\frac{\partial x}{\partial \omega}\right)^2}}\frac{\partial x}{\partial \omega}\partial\omega = \pm 2\pi\int_{\omega_0}^{\omega_1} r\sin\omega\sqrt{r^2+\left(\frac{\partial r}{\partial \omega}\right)^2}\partial\omega,$$

wo r als Funktion von ω aus der Polargleichung der Kurve zu nehmen ist, und wo das Zeichen so zu wählen ist, dass der ganze Ausdruck positiv ausfällt. — Wir wollen nun auch hier wieder diese Formeln auf Beispiele anwenden.

I. Dreht sich (Figur 23) die Fläche CFGH um CF, so ist $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)$, $\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2-\alpha^2 x^2}{a^2-x^2}}$ (§. 55. II), also ist der von dieser Fläche erzeugte Körper für $CF = x_1$:

$$\frac{\pi b^2}{a^2}\int_0^{x_1}(a^2-x^2)\partial x = \frac{\pi b^2}{a^2}\left(a^2 x_1 - \frac{x_1^3}{3}\right).$$

Für $x_1 = a$ erhält man den von CHB erzeugten Körper $= \frac{2ab^2\pi}{3}$, also den durch Rotation der Ellipse um AB erzeugten Körper $= \frac{4}{3}ab^2\pi$.

Die von HG erzeugte Fläche ist, wenn $a^2 > b^2$, also die Ellipse sich um ihre grosse Axe dreht:

$$\frac{2b\pi}{a}\int_0^{x_1}\sqrt{a^2-x^2}\sqrt{\frac{a^2-\alpha^2x^2}{a^2-x^2}}\partial x = \frac{2b\pi}{a}\int_0^{x_1}\sqrt{a^2-\alpha^2x^2}\partial x = \frac{2b\pi}{a\alpha}\left[\frac{\alpha x_1}{2}\sqrt{a^2-\alpha^2 x_1^2}\right.$$
$$\left.+\frac{a^2}{2}\operatorname{arc}\left(\sin = \frac{\alpha x_1}{a}\right)\right] = \frac{b}{a}\pi x_1\sqrt{a^2-\alpha^2x_1^2} + \frac{ab\pi}{\alpha}\operatorname{arc}\left(\sin=\frac{\alpha x_1}{a}\right),\ \alpha = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}.$$

Für $x_1 = a$ hat man die von HB erzeugte Fläche $= b\pi\sqrt{a^2-\alpha^2a^2} + \frac{ab\pi}{a}$ $\operatorname{arc}(\sin=\alpha) = b^2\pi + \frac{ab\pi}{\alpha}\operatorname{arc}(\sin=\alpha)$, also die von der Ellipse erzeugte Fläche $= 2b^2\pi + \frac{2ab\pi}{\alpha}\operatorname{arc}(\sin=\alpha)$.

Dreht sich die Ellipse um ihre kleine Axe, so ist $b^2 > a^2$, also $\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}$ $\sqrt{\frac{a^4+(b^2-a^2)x^2}{a^2(a^2-x^2)}}$ und wenn $b^2-a^2 = a^2\beta^2$: $\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} = \sqrt{\frac{a^2+\beta^2x^2}{a^2-x^2}}$, also die von HG erzeugte Fläche (wo nun AB die kleine Axe der Ellipse):

$$2\pi\frac{b}{a}\int_0^{x_1}\sqrt{a^2+\beta^2x^2}\partial x,\ \beta^2 = \frac{b^2-a^2}{a^2}.$$

Das hier vorkommende Integral wird nach §. 40. II bestimmt, und man findet:

$$\int\sqrt{a^2+\beta^2x^2}\partial x = \frac{x}{2}\sqrt{a^2+\beta^2x^2} + \frac{a^2}{2\beta}l(\beta x + \sqrt{a^2+\beta^2x^2}),\ *$$

---

* Man kann übrigens auch so verfahren: In der Formel (41) des §. 36 setze man $y = \sqrt{a^2+\beta^2x^2}$, $\frac{\partial z}{\partial x} = 1$, also $z = x$, $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\beta^2 x}{\sqrt{a^2+\beta^2x^2}}$, so ist $\int\sqrt{a^2+\beta^2x^2}\partial x = x\sqrt{a^2+\beta^2x^2}$ $-\beta^2\int\frac{x^2\partial x}{\sqrt{a^2+\beta^2x^2}} = x\sqrt{a^2+\beta^2x^2} - \int\frac{a^2+\beta^2x^2}{\sqrt{a^2+\beta^2x^2}}\partial x + a^2\int\frac{\partial x}{\sqrt{a^2+\beta^2x^2}} = \sqrt{a^2+\beta^2x^2}$

also ist die Fläche $=$

$$\frac{\pi b x_1}{a}\sqrt{a^2+\beta^2 x_1^2}+\frac{ab\pi}{\beta}l(\beta x_1+\sqrt{a^2+\beta^2 x_1^2})-\frac{ab\pi}{\beta}l(a)=\frac{b\pi x_1}{a}\sqrt{a^2+\beta^2 x_1^2}+\frac{ab\pi}{\beta}l\left(\frac{\beta x_1+\sqrt{a^2+\beta^2 x_1^2}}{a}\right).$$

Für $x_1=a$ erhält man die halbe Rotationsfläche, und da dann $a^2+\beta^2 x_1^2 = a^2+b^2-a^2=b^2$, so ist dieselbe $=$

$$b^2\pi+\frac{ab\pi}{\beta}l\left(\beta+\frac{b}{a}\right),\quad \beta=\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{a}.$$

II. Der Zykloidenbogen AN drehe sich um AB (Fig. 27). Alsdann ist §. 55. IV:

$$\int y\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}\partial x=\int y\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \omega}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \omega}\right)^2}\partial\omega=2r^2\int\sin\frac{\omega}{2}(1-\cos\omega)\partial\omega$$
$$=4r^2\int\sin^3\frac{\omega}{2}\partial\omega,$$

und wenn man hier $\omega=2\varphi$ setzt:

$$\int\sin^3\frac{\omega}{2}\partial\omega=2\int\sin^3\varphi\,\partial\varphi=2\left[-\frac{\sin^2\varphi\cos\varphi}{3}-\frac{2\cos\varphi}{3}\right]=-\frac{2}{3}\cos\varphi(2+\sin^2\varphi)$$
$$=-\frac{2}{3}\cos\frac{\omega}{2}\left(2+\sin^2\frac{\omega}{2}\right),$$

also die von AN erzeugte Fläche, wenn ω_1 der zu N gehörige Werthe von ω ist:

$$2\pi\int_0^{\omega} y\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}\frac{\partial x}{\partial\omega}\partial\omega=8r^2\pi\int_0^{\omega_1}\sin^3\frac{\omega}{2}\partial\omega=-\frac{16}{3}r^2\pi\cos\frac{\omega_1}{2}\left(2+\sin^2\frac{\omega_1}{2}\right)$$
$$+\frac{16}{3}r^2\pi.2=\frac{16}{3}r^2\pi\left[2-2\cos\frac{\omega_1}{2}-\cos\frac{\omega_1}{2}\sin^2\frac{\omega_1}{2}\right].$$

Für $\omega_1=\pi$ hat man die von AE erzeugte Fläche $=\frac{16r^2\pi}{3}(2)=\frac{32r^2\pi}{3}$, also die von AEB erzeugte $=\frac{64r^2\pi}{3}$.

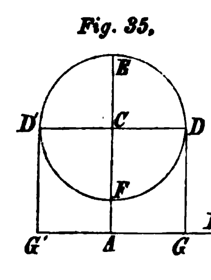
Für den durch Rotation von ANM erzeugten Körper findet man eben so:

$$r^3\pi\int_0^{\omega_1}(1-\cos\omega)^3\partial\omega=r^3\pi\left[\omega_1-3\sin\omega_1+\frac{3\sin\omega_1\cos\omega_1}{2}+\frac{3}{2}\omega_1-\frac{\sin\omega_1\cos^2\omega_1}{3}\right.$$
$$\left.-\frac{2}{3}\sin\omega_1\right]=r^3\pi\left[\frac{5}{2}\omega_1-\frac{11}{3}\sin\omega_1+\frac{3\sin\omega_1\cos\omega_1}{2}-\frac{\sin\omega_1\cos^2\omega_1}{3}\right].$$

Für $\omega_1=\pi$ erhält man den durch Rotation von ACE um AB erzeugten Körper $=\frac{5r^3\pi^2}{2}$, also der von AEB erzeugte Körper $=5r^3\pi^2$.

$-\int\sqrt{a^2+\beta^2x^2}\,\partial x+a^2\int\frac{\partial x}{\sqrt{a^2+\beta^2x^2}}$; daraus folgt unmittelbar: $2\int\sqrt{a^2+\beta^2x^2}\,\partial x=$ $x\sqrt{a^2+\beta^2x^2}+a^2\int\frac{\partial x}{\sqrt{a^2+\beta^2x^2}}$, $\int\sqrt{a^2+\beta^2x^2}\,\partial x=\frac{x}{2}\sqrt{a^2+\beta^2x^2}+\frac{a^2}{2}\int\frac{\partial x}{\sqrt{a^2+\beta^2x^2}}$, wo nun das letzte Integral bereits in §. 40, II integrirt ist, indem $\int\frac{\partial x}{\sqrt{a^2+\beta^2x^2}}=$ $\frac{1}{\beta}l(2\beta^2x+2\beta\sqrt{a^2+\beta^2x^2})=\frac{1}{\beta}l(\beta x+\sqrt{a^2+\beta^2x^2})+\frac{1}{\beta}l(2\beta)$, wovon das letztere konstant ist.

Fig. 35.



III. Der Kreis FE (Fig. 35) dreht sich um die Gerade AB, die ausserhalb desselben liegt; man soll den Körperinhalt finden, den derselbe beschreibt, so wie den Inhalt der Oberfläche, die von dem Kreisumfange erzeugt wird.

Sey C der Mittelpunkt des Kreises, CA senkrecht auf AB und die Länge von $CA = a$, r der Halbmesser des Kreises. Wählen wir A als Anfangspunkt der Koordinaten, AB als Abszissenaxe (was wir müssen, da die Rotationsaxe immer Abszissenaxe seyn muss), so ist die Gleichung des Kreises:

$$(y-a)^2+x^2=r^2,\quad y=a\pm\sqrt{r^2-x^2}.$$

Von den zwei Zeichen gilt das obere für die Hälfte DED', das untere für DFD', wenn DD' parallel mit AB gezogen ist. Man muss also diese beiden Halbkreise nun scheiden.

a) Halbkreis DED': $y=a+\sqrt{r^2-x^2},\ \frac{\partial y}{\partial x}=-\frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}},\quad 1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2=1+\frac{x^2}{r^2-x^2}$

$$\frac{r^2-x^2+x^2}{r^2-x^2}=\frac{r^2}{r^2-x^2}.$$

Die Gränzen des Integrals sind $-CD'$ und $+CD$, d. h. $-r$ und $+r$, so dass also der Inhalt des von der Fläche GDED'G' erzeugten Körpers $=$

$$\pi\int_{-r}^{+r}(a+\sqrt{r^2-x^2})^2\partial x=\pi\int_{-r}^{+r}(a^2+2a\sqrt{r^2-x^2}+r^2-x^2)\partial x,$$

und die von DED' erzeugte Oberfläche $=$

$$2\pi\int_{-r}^{+r}(a+\sqrt{r^2-x^2})\sqrt{\frac{r^2}{r^2-x^2}}\,\partial x=2r\pi\int_{-r}^{+r}\left(\frac{a}{\sqrt{r^2-x^2}}+1\right)\partial x$$

ist.

b) Halbkreis DFD': $y=a-\sqrt{r^2-x^2},\quad \frac{\partial y}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}},\quad 1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2=\frac{r^2}{r^2-x^2}$; mithin ist der Inhalt des von der Fläche GDFD'G' erzeugten Körpers $=$

$$\pi\int_{-r}^{+r}(a-\sqrt{r^2-x^2})^2\partial x=\pi\int_{-r}^{+r}(a^2-2a\sqrt{r^2-x^2}+r^2-x^2)\partial x,$$

und der Inhalt der von DFD' erzeugten Fläche $=$

$$2\pi\int_{-r}^{+r}(a-\sqrt{r^2-x^2})\sqrt{\frac{r^2}{r^2-x^2}}\,\partial x=2r\pi\int_{-r}^{+r}\left(\frac{a}{\sqrt{r^2-x^2}}-1\right)\partial x.$$

Hieraus ergibt sich nun:

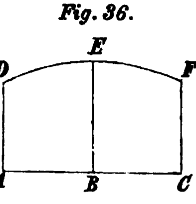
Inhalt des von DFD'ED erzeugten Körpers $=\pi\int_{-r}^{+r}(a^2+2a\sqrt{r^2-x^2}+r^2-x^2)\partial x-$

$$\pi\int_{-r}^{+r}(a^2-2a\sqrt{r^2-x^2}+r^2-x^2)\partial x=\pi\int_{-r}^{+r}(4a\sqrt{r^2-x^2})\partial x\ (\S.49.\text{II})=4a\pi\int_{-r}^{+r}\sqrt{r^2-x^2}\ \partial x$$

$$=4a\cdot\frac{r^2\pi^2}{2}\ (\S.\ 54.\ \text{II})=2ar^2\pi^2.$$

Inhalt der vom Kreis erzeugten Fläche $=2r\pi\int_{-r}^{+r}\left(\frac{a}{\sqrt{r^2-x^2}}+1\right)\partial x+$

$$2r\pi\int_{-r}^{+r}\left(\frac{a}{\sqrt{r^2-x^2}}-1\right)\partial x=2r\pi\int_{-r}^{+r}\frac{2a}{\sqrt{r^2-x^2}}\partial x=4ra\pi\int_{-r}^{+r}\frac{\partial x}{\sqrt{r^2-x^2}}=4ra\pi.\pi=4ar\pi^2.$$



IV. Sey DEF (Fig. 36) eine Kurve, deren Gleichung $y = A + Bx + Cx^2$ (§. 54. IX), und sey $AB = BC = h$, $AD = CF = a$, $BE = b\,(b > a)$, wobei B der Anfangspunkt der rechtwinklichen Koordinaten, BC die Abszissenaxe ist. Der von dieser Kurve bei ihrer Drehung nun AC beschriebene Körper stellt alsdann ein gewöhnliches Fass vor, in dem a der Halbmesser des Bodens, b die halbe Spuntentiefe und 2h die Höhe ist.

Da die Kurve durch D, E, F gehen soll, so muss

$$a = A - Bh + Ch^2,\ b = A,\ a = A + Bh + Ch^2$$

seyn, woraus $A = b$, $B = 0$, $C = -\frac{b-a}{h^2}$ folgt, so dass die Gleichung der Kurve ist:

$$y = b - \frac{b-a}{h^2} x^2.$$

Der Inhalt des von der Fläche ADFC beschriebenen Körpers ist also

$$\pi \int_{-h}^{+h} y^2 \partial x = \pi \int_{-h}^{+h} \left[b - \frac{b-a}{h^2} x^2\right]^2 \partial x = 2\pi \left[b^2 h - \frac{2b(b-a)h}{3} + \frac{(b-a)^2 h}{5}\right]$$

$$= 2h\pi \left[\frac{a^2}{3} + \frac{2b^2}{3} - \frac{2}{15}(b-a)^2\right].$$

Wie man leicht sieht, folgt hieraus die Regel: „Der Kubikinhalt eines Fasses ist gleich $\frac{1}{3}$ des über dem Boden errichteten Zylinders, dazu addirt $\frac{2}{3}$ des über dem Schnitte durch die Fassmitte errichteten, und von der Summe subtrahirt $\frac{2}{15}$ des Zylinders, dessen Grundfläche den Unterschied der Durchmesser der genannten beiden Zylinder zum Durchmesser hat, wenn alle diese Zylinder dieselbe Höhe wie das Fass haben."

Lambert in seinen „Beiträgen" I, S. 225, §. 21 beachtet nur die zwei ersten Glieder dieser Formel. Letztere selbst rührt von Grunert her, der in seinem „Archiv" XX, S. 313 sie auch noch aus der Annahme gefunden, DF sey ein Kreisbogen.

V. Dreht sich die Lemniscate (Fig. 28, §. 54) um die Axe AB, so ist der durch Rotation von AMB entstehende Körperinhalt, da jetzt $r^2 = a^2 \cos 2\omega$, $r\frac{\partial r}{\partial \omega} = -a^2 \sin 2\omega$:

$$\pm\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} r^2 \sin^2\omega \frac{-\left(r\frac{\partial r}{\partial \omega}\cos\omega - r^2 \sin\omega\right)}{r} \partial\omega = \pm a^3 \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2\omega \cos 2\omega}{\sqrt{\cos 2\omega}} (\sin 2\omega \cos\omega +$$

$$\cos 2\omega \sin\omega)\partial\omega = \pm a^3\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2\omega \cos 2\omega}{\sqrt{\cos 2\omega}} \sin 3\omega\, \partial\omega = a^3\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2\omega \sin 3\omega \sqrt{\cos 2\omega}\, \partial\omega =$$

$$a^3\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} (3\sin^2\omega - 4\sin^4\omega)\sin\omega \sqrt{\cos 2\omega}\, \partial\omega,$$

wo wir bloss das + Zeichen beibehielten, da jetzt der ganze Ausdruck positiv wird. Da $\cos 2\omega = 1 - 2\sin^2\omega$, so setze man $1 - 2\sin^2\omega = z^2$, wo die Gränzen von z seyn werden: 1, 0; und hat $-4\sin\omega\cos\omega \frac{\partial\omega}{\partial z} = 2z$, $\sin\omega \frac{\partial\omega}{\partial z} = -\frac{z}{2\cos\omega} = \frac{-z}{2\sqrt{1-\sin^2\omega}}$

$$= -\frac{z}{2\sqrt{1-\frac{1-z^2}{2}}} = -\frac{z}{2\sqrt{\frac{1+z^2}{2}}},\ \sin^2\omega = \frac{1-z^2}{2},$$ so dass der Inhalt =

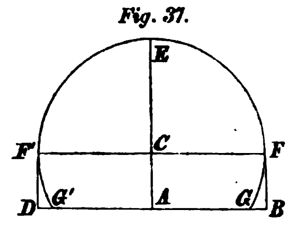
$$a^3\pi\int_1^0 (3\sin^2\omega - 4\sin^4\omega)\sqrt{1-2\sin^2\omega}\,\sin\omega\,\frac{\partial\omega}{\partial z}\partial z = -\frac{a^3\pi}{\sqrt{2}}\int_1^0 \left[3\frac{1-z^2}{2} - 4\left(\frac{1-z^2}{2}\right)^2\right] z\,.$$

$$\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}\partial z = \frac{a^3\pi}{2\sqrt{2}}\int_0^1 \frac{z^2+z^4-2z^6}{\sqrt{1+z^2}}\partial z = \frac{a^3\pi}{4\sqrt{2}}l(1+\sqrt{2}) - \frac{a^3\pi}{12},$$

d. h. der durch Rotation der ganzen Lemniscate entstandene Körper hat zum Inhalte:

$$\frac{a^3\pi}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}l(1+\sqrt{2}) - \frac{1}{3}\right].$$

Fig. 37.



VI. Der Kreis GEG' rotirt um die Axe AB, die ihn durchschneidet; man soll den Inhalt des von GEG' erzeugten Körpers und Oberfläche berechnen (Fig. 37).

Sey wieder CA senkrecht auf AB, CA = a, r der Halbmesser des Kreises; AB Axe der x, A Anfangspunkt, so ist die Gleichung des Kreises: $(y-a)^2 + x^2 = r^2$, $y = a \pm \sqrt{r^2-x^2}$, wo das obere Zeichen für FEF', das untere für FG und F'G' gilt, wenn F'F parallel AB. Um die Koordinaten von G und G' zu finden, hat man $y = 0$ zu setzen und findet $x = \pm\sqrt{r^2-a^2}$ als Abszissen dieser Punkte. Da nun

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \mp\frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}},\ 1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 = \frac{r^2}{r^2-x^2},\ y\sqrt{1+\frac{\partial y}{\partial x^2}} = \left(a\pm\sqrt{r^2-x^2}\right)\frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}}$$
$$= r\left(\frac{a}{\sqrt{r^2-x^2}}\pm 1\right),$$

so ist der Inhalt der von

$$\text{FEF' erzeugten Oberfläche} = 2r\pi\int_{-r}^{+r}\left(\frac{a}{\sqrt{r^2-x^2}}+1\right)\partial x = 4r\pi\int_0^r\left(\frac{a}{\sqrt{r^2-x^2}}+1\right)\partial x,$$

$$\text{GF „ „} = 2r\pi\int_{\sqrt{r^2-a^2}}^{+r}\left(\frac{a}{\sqrt{r^2-x^2}}-1\right)\partial x,$$

$$\text{G'F' „ „} = 2r\pi\int_{-r}^{-\sqrt{r^2-a^2}}\left(\frac{a}{\sqrt{r^2-x^2}}-1\right)\partial x,$$

wo die zwei letzteren Grössen einander gleich sind. Demnach ist die ganze Oberfläche;

$$4r\pi\left\{\int_0^r\left(\frac{a}{\sqrt{r^2-x^2}}+1\right)\partial x + \int_{\sqrt{r^2-a^2}}^r\left(\frac{a}{\sqrt{r^2-x^2}}-1\right)\partial x\right\} = 4r\pi\left\{\frac{a\pi}{2}+r+\frac{a\pi}{2}-\right.$$
$$\left. a\,.\,\text{arc}\left(\sin = \frac{\sqrt{r^2-a^2}}{r}\right) - r + \sqrt{r^2-a^2}\right\} = 4r\pi\left[a\pi + \sqrt{r^2-a^2} - \right.$$
$$\left. a\,.\,\text{arc}\left(\sin = \frac{\sqrt{r^2-a^2}}{r}\right)\right].$$

Für $a = 0$ findet man $4r^2\pi$ für die Oberfläche einer Kugel.

Ferner ist der körperliche Inhalt des von

BFEF'D erzeugten Körpers $=\pi\int_{-r}^{+r}(a+\sqrt{r^2-x^2})^2\partial x=2\pi\int_0^r(a+\sqrt{r^2-x^2})^2\partial x$,

BFG „ „ $=\pi\int_{\sqrt{r^2-a^2}}^{r}(a-\sqrt{r^2-x^2})^2\partial x$,

DG'F „ „ $=\pi\int_{-r}^{-\sqrt{r^2-a^2}}(a-\sqrt{r^2-x^2})^2\partial x$,

wo wieder die zwei letzten gleich sind. Mithin ist der von GEG' erzeugte Körper $=$

$$2\pi\left[\int_0^r(a+\sqrt{r^2-x^2})^2\partial x-\int_{\sqrt{r^2-a^2}}^{r}(a-\sqrt{r^2-x^2})^2\partial x\right]=2\pi\left[a^2r+r^3-\frac{r^3}{3}+ar^2\frac{\pi}{2}-\right.$$

$$a^2r+a^2\sqrt{r^2-a^2}-r^3+r^2\sqrt{r^2-a^2}+\frac{r^3}{3}-\frac{(\sqrt{r^2-a^2})^3}{3}-a^2\sqrt{r^2-a^2}+ar^2\frac{\pi}{2}-$$

$$\left.ar^2\operatorname{arc}\left(\sin=\frac{\sqrt{r^2-a^2}}{r}\right)\right]=2\pi\left[ar^2\pi+\frac{2r^2+a^2}{3}\sqrt{r^2-a^2}-ar^2\operatorname{arc}\left(\sin=\frac{\sqrt{r^2-a^2}}{r}\right)\right].$$

Anm. Wir haben im Vorstehenden immer angenommen, die Kurve mache eine vollständige Umdrehung. Geschieht dies nicht, so lässt sich das Körper- oder Flächenstück, das bei einem Drehungswinkel von α Grad beschrieben wurde, unmittelbar aus der Propertion:

$$360:\alpha=G:T,$$

wo G das bei einer Rotation von 360^0 (wie wir oben vorausgesetzt) beschriebene Stück, T das bei einer Rotation von α^0 beschriebene ist.

§. 57.

In manchen Fällen kann man die Berechnung eines Körperinhalts oder einer Oberfläche dadurch ermöglichen, dass man im Stande ist, die Gestalt eines ebenen Schnitts, der einer gewissen Ebene parallel ist, zu ermitteln. Legt man nämlich zwei sehr nahe parallele solche Schnitte, so wird man das dazwischen liegende Körperstück als zylindrisch oder prismatisch anzusehen desto mehr das Recht haben, je näher die Schnitte sind, so dass man bei unendlich nahen Schnitten, d. h. wenn man zu den Gränzwerthen übergeht, den Körper als eine Summe von solchen zylindrischen Körpertheilen ansehen kann. Eben so wird man das zwischen zwei solchen Schnitten liegende Flächenstück als eben ansehen und darnach berechnen dürfen. Einige Beispiele mögen dies Verfahren wieder erläutern.

I. Denken wir uns zwei Ellipsen, die denselben Mittelpunkt haben und deren Ebenen auf einander senkreckt stehen, so gelegt, dass ihre einen Hauptaxen 2c zusammenfallen, während die andern 2a und 2b auf einander senkrecht stehen; denken uns ferner eine dritte bewegliche Ellipse, deren Ebene immer senkrecht ist zu der gemeinschaftlichen Hauptaxe 2c und deren Endpunkte der Hauptaxen immer in den zwei genannten Ellipsen liegen, so beschreibt diese bewegliche Ellipse das dreiaxige Ellipsoid, wovon die eine Hälfte in Figur 38 abgebildet ist. Dort sind ACB, ECD die halben festen Ellipsen, AEBD ist eine Lage der beweglichen Ellipse, MP eine andere.

Fig. 38.

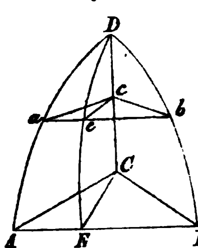
Sey nun QN $=$ x, so ist NM $=\frac{a}{c}\sqrt{c^2-x^2}$, NP $=\frac{b}{c}\sqrt{c^2-x^2}$, so dass also

die Halbaxen der Ellipse MP bekannt sind. Die Fläche derselben ist (§. 54. II) also $\frac{ab(c^2-x^2)}{c^2}\pi$. Denkt man sich nun eine zweite Lage der beweglichen Ellipse in der Entfernung $x+\Delta x$ von AB, so wird man das zwischen den beiden Ebenen liegende Körperstück mehr und mehr als einen Zylinder ansehen können, dessen Inhalt also $=\frac{ab(c^2-x^2)}{c^2}\pi\Delta x$ ist, so dass der Inhalt des Körpers ABC =

$$\frac{ab\pi}{c^2}\int_0^c (c^2-x^2)\partial x = \frac{ab\pi}{c^2}\left(c^3-\frac{c^3}{3}\right)=\frac{2}{3}abc\pi$$

ist (vergl. §. 53). Der Inhalt des ganzen Körpers ist also $\frac{4}{3}abc\pi$.

Fig 39.



II. In dem Eckpunkte C des Dreiecks ABC (Fig. 39) sey eine Senkrechte CD auf die Ebene des Dreiecks errichtet. In der Ebene ACD ziehe man eine Viertelsellipse, deren Halbaxen AC und CD seyen, eben so in der Ebene BCD eine, deren Halbaxen BC und CD sind; endlich lasse man eine Gerade parallel mit AB sich so bewegen, dass ihre Endpunkte immer in den Ellipsen AD, BD sich befinden, so beschreibt sie die Oberfläche des elliptischen Klostergewölbes.

Durch den Punkt c der Geraden CD lege man die Ebene acb parallel ACB, so ist ab eine der Lagen der erzeugenden Geraden und das Dreieck abc ist ähnlich ACB. Ist nun Δ die Fläche des Dreiecks ABC, δ die von abc, so hat man

$$\Delta:\delta = AC^2 : ac^2,\quad \delta=\Delta\,.\,\frac{ac^2}{AC^2}.$$

Da aber AD eine Ellipse ist, so hat man, wenn $CD=h$, $Cc=x$:

$$\frac{ac^2}{AC^2}+\frac{x^2}{h^2}=1,\quad \frac{ac^2}{AC^2}=1-\frac{x^2}{h^2},\quad \delta=\left(1-\frac{x^2}{h^2}\right)\Delta.$$

Legt man einen zweiten Schnitt parallel acb und in der Entfernung Δx von demselben, so wird man, bei unendlich kleinem Δx, das zwischenliegende Körperstück als prismatisch, vom Inhalte $\left(1-\frac{x^2}{h^2}\right)\Delta\,.\,\Delta x$ ansehen können, so dass also der Inhalt des Körpers ABCD =

$$\Delta\int_0^h\left(1-\frac{x^2}{h^2}\right)\partial x=\Delta\left(h-\frac{1}{3}h\right)=\frac{2}{3}\Delta h=\frac{2}{3}\,.\,ABC\,.\,CD.$$

Will man den Inhalt der Fläche ABD haben, so verfährt man in ähnlicher Weise. Das zwischen den zwei parallelen Schnitten gelegene Flächenstückchen kann als ein ebenes Parallelogramm angesehen werden, dessen Grundlinie ab und dessen Höhe die (auf der Fläche gemessene) Entfernung der beiden Parallelen ist. Um nun letztere zu finden, wollen wir durch die auf AB senkrecht stehende Gerade CE und durch CD eine Ebene legen, welche die Fläche in DE schneiden soll; diese Kurve DE wird nun auf ab, so wie auf allen mit AB parallelen Geraden senkrecht stehen. Was dieselbe anbelangt, so ist sie eine Ellipse. Denn es ist, wenn ec parallel EC:

$$\frac{ec^2}{EC^2}=\frac{ac^2}{AC^2},\quad \frac{ac^2}{AC^2}+\frac{Cc^2}{CD^2}=1,$$

also auch

$$\frac{ec^2}{EC^2}+\frac{Cc^2}{CD^2}=1,$$

was beweist, dass ED eine Ellipse ist, deren Halbaxen CE und CD sind. Die Höhe

des Parallelogramms ist also ein Stück dieses elliptischen Bogens, das zum Axenstück Δx gehört, mithin (§. 55, II) gleich $\sqrt{\frac{h^4-(h^2-a^2)x^2}{h^2(h^2-x^2)}}\,\Delta x$ gesetzt werden kann, wenn Δx unendlich klein ist, und $CE = a$ ist. Also ist, da $ab:AB = ac:AC$, und $\frac{ac^2}{AC^2}+\frac{Cc^2}{CD^2}=1$, $\frac{ac^2}{AC^2}=1-\frac{x^2}{h^2}$, $\frac{ac}{AC}=\sqrt{1-\frac{x^2}{h^2}}=\frac{ab}{AB}$, $ab = AB\sqrt{1-\frac{x^2}{h^2}}$, wenn man AB durch b bezeichnet, die Fläche jenes Parallelogramms zu setzen:

$$b\sqrt{1-\frac{x^2}{h^2}}\sqrt{\frac{h^4-(h^2-a^2)x^2}{h^2(h^2-x^2)}}\,\Delta x = \frac{b}{h^2}\sqrt{h^4-(h^2-a^2)x^2}\,\Delta x.$$

Sey nun:

a) $h^2 > a^2$ und dann $h^2-a^2=h^2\alpha^2$, so ist $\frac{b}{h^2}\sqrt{h^4-(h^2-a^2)x^2}=\frac{b}{h}\sqrt{h^2-\alpha^2x^2}$,

also die Fläche:

$$\frac{b}{h}\int_0^h\sqrt{h^2-\alpha^2x^2}\,\partial x = \frac{b}{h}\left[\frac{h}{2}\sqrt{h^2-\alpha^2h^2}+\frac{h^2}{2\alpha}\operatorname{arc}\left(\sin=\frac{\alpha h}{h}\right)\right]=\frac{ab}{2}+\frac{bh}{2\alpha}\operatorname{arc}(\sin=\alpha),$$

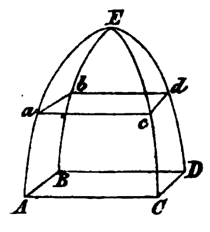
wo $\frac{ab}{2}=\Delta=$ der Fläche des Dreiecks ABC ist.

b) $h^2 < a^2$, $h^2-a^2=-\beta^2h^2$, so ist die Fläche $=$

$$\frac{b}{h}\int_0^h\sqrt{h^2+\beta^2x^2}\,\partial x=\frac{b}{h}\left[\frac{h}{2}\sqrt{h^2+\beta^2h^2}+\frac{h^2}{2\beta}l\left(\frac{\beta h+\sqrt{h^2+\beta^2h^2}}{h}\right)\right]=\frac{ab}{2}+\frac{bh}{2\beta}l\left(\beta+\frac{a}{h}\right).$$

III. Bei der gewöhnlichen Pyramide verhalten sich die Dimensionen (Seiten) der mit der Grundfläche parallelen Schnitte wie die Entfernungen derselben von der Spitze, so dass man sagen kann, es entstehe dieselbe, indem eine ebene Figur sich parallel mit sich selbst bewegt, und dabei ihre Dimensionen proportional dem durchlaufenen Wege vergrössert. Gesetzt nun aber, die bewegte Figur vergrössere ihre Dimensionen im Verhältniss der Quadratwurzel der Entfernung von der Spitze, so entsteht eine Pyramide, deren Kanten statt gerader Linien Parabeln sind (Fig. 40). Ist nun h die Höhe der Pyramide, d. h. die Entfernung der Spitze E von ABCD, x der Abstand des Schnitts abcd von E, G der Inhalt der Grundfläche, so ist der Inhalt des Schnitts $abcd = G\frac{x}{h}$, so dass der Inhalt der ganzen Pyramide $=$

Fig. 40.



$$G\int_0^h\frac{x}{h}\,\partial x = G\cdot\frac{1}{2}\,\frac{h^2}{h}=\frac{1}{2}Gh.$$

Hat man eine abgekürzte Pyramide dieser Art und ist g deren obere Fläche, h die Höhe, x die (unbekannte) Entfernung der oberen Fläche von der Spitze, so ist

$$g:G = x:x+h,\quad x=\frac{gh}{G-g},$$

also die abgekürzte Pyramide:

$$\frac{1}{2}G(h+x)-\frac{1}{2}gx=\frac{1}{2}(G+g)h.$$

IV. Gesetzt eine ebene Figur bewege sich so, dass alle ihre Seiten parallel bleiben, aber derart sich ändern, dass wenn x die Entfernung der bewegten Ebene von einem bestimmten Punkte ist, die Dimensionen proportional $\sqrt{a+bx+cx^2}$ sind, d. h. also, wenn x_0, x_1 zwei Entfernungen der bewegten Ebene von dem festen Punkte sind, so verhalten sich die parallelen Seiten der beiden Lagen wie $\sqrt{a+bx_0+cx_0^2}$ zu $\sqrt{a+bx_1+cx_1^2}$. Da alle Lagen mithin ähnliche Figuren sind, so verhalten sich die Flächen derselben wie $a+bx_0+cx_0^2$ zu $a+bx_1+cx_1^2$. Seyen nun x_0, x_1 die Entfernungen der obersten und untersten Fläche eines so entstandenen Körpers, G dessen unterste Fläche, so ist der Inhalt, da ein beliebiger Schnitt $= G\frac{a+bx+cx^2}{a+bx_1+cx_1^2}$:

$$\frac{G}{a+bx_1+cx_1^2}\int_{x_0}^{x_1}(a+bx+cx^2)\partial x.$$

Sind nun y_0, y_1, y_2 die Werthe von $a+bx+cx^2$ für $x=x_0$, $\frac{1}{2}(x_0+x_1)$, x_1, so ist nach §. 54, IX:

$$\int_{x_0}^{x_1}(a+bx+cx^2)\partial x = \frac{x_1-x_0}{6}(y_0+4y_1+y_2),$$

also

$$\frac{G}{a+bx_1+cx_1^2}\int_{x_0}^{x_1}(a+bx+cx^2)\partial x = \frac{x_1-x_0}{6}\frac{(y_0+4y_1+y_2)G}{y_2},$$

d. h. da $\frac{y_2 G}{y_2}=G$, $\frac{y_1 G}{y_2}=\gamma$, $\frac{y_0 G}{y_2}=g$, wo g die obere Grundfläche, γ die mittlere zwischen beiden, so ist der fragliche Körper $=$

$$\frac{x_1-x_0}{6}(g+4\gamma+G).\ *$$

x_1-x_0 ist dabei die Höhe des Körpers, der von zwei parallelen Grundflächen begränzt ist. Zu dem hier betrachteten Körper gehören alle Zylinder, Pyramiden, so wie die in III. betrachteten Körper. Würde man statt $a+bx+cx^2$ gesetzt haben $a+bx+cx^2+dx^3$, so hätte man gefunden:

$$\frac{(x_1-x_0)}{8}[g+3\gamma+3\gamma'+G],$$

worin g und G wie so eben, γ die in $\frac{1}{3}$ der Höhe und γ' die in $\frac{2}{3}$ der Höhe gemessene Fläche des Durchschnitts bedeutet (§. 54, IX).

Die erste Formel lässt sich zur Aufstellung einer Näherungsformel benützen. Gesetzt nämlich, man habe einen von zwei parallelen Flächen begränzten Körper, dessen Höhe $=h$ sey; man theile letztere in $2n$ gleiche Theile und mache in den Theilpunkten Schnitte durch den Körper parallel mit den Grundflächen. Die Flächeninhalte dieser Schnitte seyen:

$$g, \gamma_1, \gamma_2, \ldots\ldots, \gamma_{2n-1}, G.$$

Alsdann wird man das Körperstück, das zwischen den Flächen g und $\gamma_2, \gamma_4, \ldots\ldots, \gamma_{2n-2}$ und G liegt, desto genauer als einen Körper ansehen

---

* Man vergleiche hiemit meine „ebene Polygonometrie" S. 58, Note. Die dort gelöste Aufgabe gehört offenbar hieher und würde leicht nach der angegebenen Weise gelöst werden können.

können, der nach obiger Formel berechnet wird, je grösser 2n ist. Daraus ergibt sich dann wie in §. 54, IX als sehr genäherten Inhalt des Körpers:

$$\frac{h}{6n}\left[g+G+4(\gamma_1+\gamma_3+\ldots+\gamma_{2n-1})+2(\gamma_2+\gamma_4+\ldots+\gamma_{2n-2})\right].$$

§. 58.

Soll man ein begränztes Stück einer krummen Oberfläche berechnen, so ist die Aufgabe die, die Fläche einer ebenen Figur zu finden, die denselben Flächenraum hat, als das Stück der Oberfläche, welche, wenn sie nicht in eine Ebene entfaltet werden kann, wir uns aus lauter unendlich kleinen Flächenstückchen zusammengesetzt denken können, von denen jedes als zusammenfallend mit der in ihm an die Oberfläche gelegten Tangentialebene angesehen werden muss.

Sey nun die Kurve MN (Fig. 41) die Projektion des zu berechnenden Oberflächenstücks auf die Ebene der xy; durch Linien, parallel mit den Axen der x und y, deren gegenseitige Entfernung bezüglich Δy (parallel mit Ox) und Δx sey, theile man die Fläche der Figur in Rechtecke, wovon PQ eines sey. Die Fläche eines solchen ist $\Delta x \Delta y$, und über demselben, d. h. innerhalb der Seitenflächen eines über ihm errichteten Parallelepipeds, liegt ein Stück der zu berechenden Oberfläche, das desto genauer als auf einer Tangentialebene liegend angesehen werden darf, je kleiner Δx und Δy sind.

Fig. 41.

Denkt man sich in dem über P liegenden Punkte der Oberfläche, dessen Koordinaten x, y, z sind, eine Tangentialebene an die Oberfläche gelegt, so macht dieselbe mit der Ebene der xy einen Winkel, dessen cosinus = $\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}$ ist, wo $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ die partiellen Differentialquotienten von z sind, wie sie aus der Gleichung der krummen Oberfläche folgen. Ist nun e das von dem eben erwähnten Parallelepiped auf der Tangentialebene ausgeschnittene Stück, so ist, da $\Delta x \Delta y$ dessen Projektion ist:

$$\frac{e}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}}=\Delta y \Delta x,\quad e=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,\Delta x \Delta y,$$

und da das von demselben Parallelepiped ausgeschnittene Oberflächenstück mit e desto genauer zusammenfällt, je kleiner Δx und Δy sind, so wird man für das Element der Oberfläche die eben gefundene Grösse wählen dürfen. Die Summe all dieser Elemente, d. h. all der Grössen $\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,\Delta x \Delta y$, wenn man $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ durch ihre Werthe in x und y ersetzt hat, gibt das zu berechnende Flächenstück. Was nun die Summirung anbelangt, so kann man

zuerst x als konstant $=$ Op ansehen und nach y summiren, d. h. all die Oberflächenelemente zusammennehmen, die über dem unendlich schmalen Streifen Rr liegen; ihre Summe ist gemäss §. 48:

$$\Delta x \int_{y_1}^{y_2} \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,\partial y,$$

wo y_1, y_2 die als Funktionen von x gegebenen Werthe von pR, pr sind, wie sie aus der bekannten Gestalt von MN folgen. Summirt man nun alle diese Streifen, indem man x von OA $=$ a bis OB $=$ b gehen lässt, so erhält man

$$\int_a^b \partial x \int_{y_1}^{y_2} \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,\partial y \qquad \text{(a)}$$

als Werth der zu berechnenden Oberfläche, welche Formel man auch sofort nach §. 51 hätte hinsetzen können.

Wollte man zuerst nach x summiren, so würde man $y = $ Oq unverändert lassen und von $x = $ qS $= x_1$ bis $x = $ qs $= x_2$, wo x_1, x_2 Funktionen von y sind, summiren, wodurch man für den unendlich schmalen, über Ss liegenden Streifen erhielte

$$\Delta y \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,\partial x.$$

Lässt man hier y von einem äussersten Werth OC $= \alpha$ zum andern OD $= \beta$ gehen, uud summirt dann, so erhält man die Summe all dieser Streifen, d. h. die Oberfläche $=$

$$\int_\alpha^\beta \partial y \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,\partial x. \qquad \text{(a')}$$

Anm. Wir haben hier kurzweg von unendlich-kleinen Elementen gesprochen, ohne die schärfere Begründung durchzuführen, da dies genau immer in der §. 53 angegebenen Weise geschehen wird und also wohl nicht wiederholt zu werden braucht. Hier etwa würde es heissen, das Flächenstück e innerhalb des oft genannten Parallelepipeds ist $=$

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,\Delta x \Delta y + \alpha \Delta x \Delta y,$$

wo α eine Grösse ist, die mit Δx und Δy verschwindend klein wird, indem der Quotient $\frac{e}{\Delta x \Delta y}$ sich der Grösse $\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$ mehr und mehr nähert. Lässt man für ein bestimmtes x den Werth von y gehen von y_1 bis y_2, so wird man (bei unendlich kleinem Δx) eine Summe:

$$\Delta x \int_{y_1}^{y_2} \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,\partial y + \alpha' \Delta x \int_{y_1}^{y_2} \partial y$$

erhalten, wo α' ein Mittelwerth zwischen allen α ist (§. 49, VIII), also mit unendlich kleinem Δx verschwindet. Da ferner $\int_{y_1}^{y_2} \partial y = y_2 - y_1$, also endlich ist, so wird also $\alpha'(y_2 - y_1)$ verschwinden mit unendlich kleinem Δx, so dass man jetzt bei der zweiten Summirung, d. h. für unendlich kleine Δx die Grösse $\alpha_1 \int_a^b \partial x = \alpha_1 (b - a)$ erhalten wird, wo α_1 unendlich klein

ist, also $\alpha_1(b-a)$ verschwindet und bloss das oben angegebene Integral erscheint. — Wenn wir dann gesagt haben, die Fläche der Kurve MN werde in lauter Rechtecke getheilt, so ist dies nicht ganz wahr, da an der Gränze, d. h. an der Kurve selbst hin Flächenstückchen liegen werden, die keine Rechtecke sind; je kleiner aber Δx und Δy sind, desto kleiner werden auch diese letzteren, so dass sie schliesslich nur noch einen unendlich schmalen Streifen bilden werden, dessen Fläche, so wie das darüber liegende Stück der krummen Oberfläche verschwinden wird.

Gesetzt die Gleichung der krummen Oberfläche sey auf Polarkoordinaten, statt auf rechtwinkliche Koordinaten bezogen, und zwar seyen dieselben: die Entfernung r eines Punktes vom Anfangspunkt der Koordinaten, der Winkel ψ, den r mit seiner Projektion auf die Ebene der xy macht, und der Winkel φ, den diese Projektion mit der Axe der x macht, wobei r immer positiv seyn soll, ψ von $-\frac{\pi}{2}$ bis $+\frac{\pi}{2}$ gerechnet werde, während φ von 0 bis 2π gehen könne, und im Drehungssinne: Axe der $+x$ gegen die der $+y$ gerechnet werde. Alsdann ist

$$x = r\cos\psi\cos\varphi,\quad y = r\cos\psi\sin\varphi,\quad z = r\sin\psi.$$

Ist nun r als Funktion von φ und ψ angesehen, so hat man (§. 29, 2)

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial r}{\partial \varphi}\right)^2+\left[r^2+\left(\frac{\partial r}{\partial \psi}\right)^2\right]\cos^2\psi}}{\cos\psi\left(\frac{\partial r}{\partial \psi}\cos\psi - r\sin\psi\right)}.$$

Wir haben bereits schon gezeigt, dass in dem Ausdruck (a) die Ordnung der Integration geändert werden kann; ferner ist klar, dass mittelst der neuen Koordinaten ein Element der Fläche ausgedrückt werden kann, so dass also nothwendig die Formeln des §. 52, I hier angewendet werden dürfen. Die dortigen u und v sind hier durch φ und ψ ersetzt, während $\varphi(u, v) = r\cos\psi\cos\varphi$, $\psi(u,v) = r\cos\psi\sin\varphi$, also $\frac{\partial \psi}{\partial v} = -r\sin\psi\sin\varphi + \frac{\partial r}{\partial \psi}\cos\psi\sin\varphi$, $\frac{\partial \psi}{\partial u} = r\cos\psi\cos\varphi + \frac{\partial r}{\partial \varphi}\cos\psi\sin\varphi$, $\frac{\partial \varphi}{\partial v} = -r\sin\psi\cos\varphi + \frac{\partial r}{\partial \psi}\cos\psi\cos\varphi$, $\frac{\partial \varphi}{\partial u} = -r\cos\psi\sin\varphi + \frac{\partial r}{\partial \varphi}\cos\psi\cos\varphi$; $\frac{\partial \psi}{\partial v}\frac{\partial \varphi}{\partial u} - \frac{\partial \psi}{\partial u}\frac{\partial \varphi}{\partial v} = r\cos\psi\left(r\sin\psi - \frac{\partial r}{\partial \psi}\cos\psi\right)$, so dass

$$\int\!\!\int\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,\partial x\,\partial y = \int\!\!\int\frac{\sqrt{\left(\frac{\partial r}{\partial \varphi}\right)^2+\left[r^2+\left(\frac{\partial r}{\partial \psi}\right)^2\right]\cos^2\psi}}{\cos\psi\left[\frac{\partial r}{\partial \psi}\cos\psi - r\sin\psi\right]}$$

$$r\cos\psi\left(r\sin\psi - \frac{\partial r}{\partial \psi}\cos\psi\right)\partial\varphi\,\partial\psi = -\int\!\!\int r\sqrt{\left(\frac{\partial r}{\partial \varphi}\right)^2+\left[r^2+\left(\frac{\partial r}{\partial \psi}\right)^2\right]\cos^2\psi}\,\partial\varphi\,\partial\psi,$$

wo man das —Zeichen auch weglassen kann, so dass das Flächenstück =

$$\int\!\!\int r\sqrt{\left(\frac{\partial r}{\partial \varphi}\right)^2+\left[r^2+\left(\frac{\partial r}{\partial \psi}\right)^2\right]\cos^2\psi}\,\partial\varphi\,\partial\psi, * \qquad \text{(b)}$$

---

* Diese Formel lässt sich leicht geometrisch ableiten, so dass wir dadurch eine thatsächliche Bestätigung der Richtigkeit derselben haben. Wir wollen uns nämlich einen Punkt denken, dem φ und ψ zugehören und dann φ und ψ um die unendlich kleinen Grössen

worin r, $\frac{\partial r}{\partial \varphi}$, $\frac{\partial r}{\partial \psi}$ als Funktionen von φ und ψ auszudrücken sind, während die Gränzen des Integrals den Bedingungen der Aufgabe gemäss zu bestimmen sind.

Die Formel des §. 56 für Rotationsflächen lässt sich aus der Formel (a) unmittelbar ableiten. Sey nämlich $y = f(x)$ die Gleichung der sich drehenden Kurve NN′ (Fig. 32), so ist $y^2 + z^2 = f(x)^2$ die Gleichung der entstehenden Rotationsfläche, * somit:

$$z\frac{\partial z}{\partial x} = f(x)f'(x),\quad y + z\frac{\partial z}{\partial y} = 0,\quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{f(x)f'(x)}{z},\quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-y}{z},$$

$$1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \frac{z^2 + y^2 + f(x)^2 f'(x)^2}{z^2} = \frac{f(x)^2 + f(x)^2 f'(x)^2}{f(x)^2 - y^2} = \frac{f(x)^2[1 + f'(x)^2]}{f(x)^2 - y^2},$$

mithin, da die Gränzen von y sind $-f(x)$ und $+f(x)$ wenn man die halbe entstehende Fläche haben will, ist die ganze Fläche =

$$2\int_a^b \partial x \int_{-f(x)}^{+f(x)} \frac{f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}}{\sqrt{f(x)^2 - y^2}}\partial y = 2\int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\,\partial x \int_{-f(x)}^{+f(x)} \frac{\partial y}{\sqrt{f(x)^2 - y^2}}.$$

Aber es ist

$$\int \frac{\partial y}{\sqrt{f(x)^2 - y^2}} = \text{arc}\left(\sin = \frac{y}{f(x)}\right),\quad \int_{-f(x)}^{+f(x)} \frac{\partial y}{\sqrt{f(x)^2 - y^2}} = \pi,$$

also die Rotationsfläche =

$\varDelta\varphi$, $\varDelta\psi$ sich ändern lassen, so wird der Endpunkt des Fahrstrahls r auf der Oberfläche eine Fläche beschreiben, die wir als auf der Tangentialebene liegend ansehen dürfen. Was nun die Projektion derselben auf die Ebene der xy anbelangt, so ist sie gebildet von der durch die Aenderung des ψ um $\varDelta\psi$ hervorgebrachten Verlängerung von $r\cos\psi$, d. h. von $\varDelta(r\cos\psi)$, wo nicht φ sich ändert, und von der durch die Aenderung des φ um $\varDelta\varphi$ in der Ebene der xy vom Halbmesser $r\cos\psi$ beschriebenen Linie, die senkrecht auf der ersten steht und als gerad muss angesehen werden. Die Fläche dieser Projektion ist also, indem letztere Linie $= r\cos\psi\,\varDelta\varphi$:

$$\varDelta(r\cos\psi) \,.\, r\cos\psi\,\varDelta\varphi = \left(\frac{\partial r}{\partial \psi}\cos\psi - r\sin\psi\right)\varDelta\psi \,.\, r\cos\psi \,.\, \varDelta\varphi,$$

indem $\varDelta(r\cos\varphi) = \frac{\varDelta(r\cos\psi)}{\varDelta\psi}\varDelta\psi = \frac{\partial(r\cos\psi)}{\partial\psi}\varDelta\psi$ ist. Demnach ist die eigentliche Fläche selbst

$$= \left(\frac{\partial r}{\partial \psi}\cos\psi - r\sin\psi\right) r\cos\psi\,\varDelta\psi\,\varDelta\varphi \,.\, \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial r}{\partial \varphi}\right)^2 + \left[r^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial \psi}\right)^2\right]\cos^2\psi}}{\cos\psi\left[\frac{\partial r}{\partial \psi}\cos\psi - r\sin\psi\right)}$$

$$= r\sqrt{\left(\frac{\partial r}{\partial \varphi}\right)^2 + \left[r^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial \psi}\right)^2\right]\cos^2\psi}\;\varDelta\varphi\,\varDelta\psi,$$

indem die zugefügte Grösse $= \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \frac{1}{\cos\alpha}$ ist, wenn α den Winkel der Tangentialebene mit der Ebene der xy vorstellt. Daraus ergibt sich dann sehr leicht die Formel (b).

* Dreht sich nämlich NN′ um OM′, so beschreibt PQ einen Kreis, dessen Halbmesser = $PQ = f(x)$. Sind nun x, y, z die Koordinaten irgend eines Punktes dieser Kreislinie, also eines Punktes der entstehenden Oberfläche, so ist $x = OP$, während $PQ^2 = y^2 + z^2$ ist, so dass da immer $PQ^2 = f(x)^2$, nothwendig für alle Punkte der krummen Oberfläche die Gleichung $f(x)^2 = y^2 + z^2$ besteht.

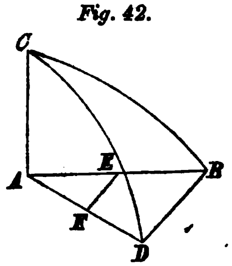
$$2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,\partial x,$$

die Formel des §. 56.

Wir wollen nun die allgemeinen Formeln auf einige Beispiele anwenden.

I. In der Ebene der xz liegt ein Kreisbogen CB (Fig. 42), der an den Koordinatenaxen der x (AB) und z (AC) endet; längs desselben bewegt sich eine Gerade, die senkrecht auf der Ebene der xz steht und also eine Zylinderfläche beschreibt. Diese Zylinderfläche wird durch eine Ebene geschnitten, die durch die Axe der z und durch die in der Ebene der xy liegende Gerade AD geht; man soll das Stück BCD derselben berechnen, das von dieser Ebene und den Ebenen der xy und xz eingeschlossen wird. (Kreisförmiges Klostergewölbe.)

Fig. 42.



Sey r der Halbmesser des Kreisbogens BC, α, β die Koordinaten seines Mittelpunktes (die gewöhnlich beide negativ seyn werden), so ist die Gleichung des Kreises und also auch der Zylinderfläche:

$$(x-\alpha)^2+(z-\beta)^2=r^2,\ z=\beta\pm\sqrt{r^2-(x-\alpha)^2},\ \frac{\partial z}{\partial x}=\mp\frac{x-\alpha}{\sqrt{r^2-(x-\alpha)^2}},\ \frac{\partial z}{\partial y}=0.$$

Die Projektion der Fläche auf die Ebene der xy ist das Dreieck BAD, und wenn $AB=a$, $BD=b$, so ist die Gleichung der Geraden AD : $y=\frac{b}{a}x$, also sind die Gränzen von y für ein beliebiges x ($=AE$): 0 und $\frac{b}{a}x$ ($=EF$), während die von x sind 0 und a, so dass also die zu berechnende Fläche ist:

$$\int_0^a \partial x \int_0^{\frac{b}{a}x}\sqrt{1+\frac{(x-\alpha)^2}{r^2-(x-\alpha)^2}}\,\partial y = r\int_0^a \frac{\partial x}{\sqrt{r^2-(x-\alpha)^2}}\int_0^{\frac{b}{a}x}\partial y=\frac{rb}{a}\int_0^a\frac{x\,\partial x}{\sqrt{r^2-(x-\alpha)^2}}.$$

Aber es ist, wenn man $x-\alpha=z$, $x=z+\alpha$, $\frac{\partial x}{\partial z}=1$ setzt:

$$\int\frac{x\,\partial x}{\sqrt{r^2-(x-\alpha)^2}}=\int\frac{z\,\partial z}{\sqrt{r^2-z^2}}+\alpha\int\frac{\partial z}{\sqrt{r^2-z^2}}=-\sqrt{r^2-z^2}+\alpha\,\mathrm{arc}\left(\sin=\frac{z}{r}\right)$$

$$=-\sqrt{r^2-(x-\alpha)^2}+\alpha\,\mathrm{arc}\left(\sin=\frac{x-\alpha}{r}\right),\ \int_0^a\frac{x\,\partial x}{\sqrt{r^2-(x-\alpha)^2}}=-\sqrt{r^2-(a-\alpha)^2}$$

$$+\sqrt{r^2-\alpha^2}+\alpha\,\mathrm{arc}\left(\sin=\frac{a-\alpha}{r}\right)+\alpha\,\mathrm{arc}\left(\sin=\frac{\alpha}{r}\right).$$

Ist nun s die Länge des Bogens BC, so ist (§. 55):

$$s=\int_0^a\sqrt{1+\frac{(x-\alpha)^2}{r^2-(x-\alpha)^2}}\,\partial x=r\int_0^a\frac{\partial x}{\sqrt{r^2-(x-\alpha)^2}}=r\,\mathrm{arc}\left(\sin=\frac{a-\alpha}{r}\right)$$

$$+r\,\mathrm{a{\cdot}c}\left(\sin=\frac{\alpha}{r}\right),$$

$$\int_0^a\frac{x\,\partial x}{\sqrt{r^2-(x-\alpha)^2}}=\sqrt{r^2-\alpha^2}-\sqrt{r^2-(a-\alpha)^2}+\frac{\alpha s}{r},$$

mithin die fragliche Fläche =

$$\frac{rb}{a}\left[\sqrt{r^2-\alpha^2}-\sqrt{r^2-(a-\alpha)^2}\right]+\frac{\alpha b}{a}s.$$

Nun ist aber, wenn $AC=h$, für den Punkt C des Kreises:

$$\alpha^2+(h-\beta)^2=r^2,\ \text{also}\ r^2-\alpha^2=(h-\beta)^2,\ \sqrt{r^2-\alpha^2}=h-\beta,$$

eben so für B:

$$(a-\alpha)^2+\beta^2=r^2,\ r^2-(a-\alpha)^2=\beta^2,\ \sqrt{r^2-(a-\alpha)^2}=\pm\beta,$$

je nachdem, ob β positiv oder negativ ist. Setzen wir β negativ voraus, so ist

$$\sqrt{r^2-\alpha^2}-\sqrt{r^2-(a-\alpha)^2}=h-\beta+\beta=h,$$

mithin die Fläche:

$$\frac{rb}{a}h+\frac{\alpha b}{a}s=\frac{b}{a}(rh+\alpha s).$$

Fig. 43.

B E C O D A

II. Um den Anfangspunkt der Koordinaten O ist mit dem Halbmesser r eine Kugelfläche beschrieben; man soll das über dem Rechtecke OC (Fig. 43) liegende Stück derselben berechnen, wenn $OA=a$, $OB=b$ ist.

Die Gleichung der Kugelfläche ist $x^2+y^2+z^2=r^2$, woraus $x+z\frac{\partial z}{\partial x}=0$, $y+z\frac{\partial z}{\partial y}=0$, $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{z}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{y}{z}$, $1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=1+\frac{x^2}{z^2}+\frac{y^2}{z^2}=\frac{r^2}{z^2}=\frac{r^2}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}}$, und da die Gränzen von y sind 0 und b, von x aber 0 und a, so ist die fragliche Fläche =

$$r\int_0^a\partial x\int_0^b\frac{\partial y}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}}.$$

Aber

$$\int\frac{\partial y}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}}=arc\left(\sin=\frac{y}{\sqrt{r^2-x^2}}\right),\ \int_0^b\frac{\partial y}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}}=arc\left(\sin=\frac{b}{\sqrt{r^2-x^2}}\right),$$

also die Fläche = $$r\int_0^a arc\left(\sin=\frac{b}{\sqrt{r^2-x^2}}\right)\partial x.$$

Um das hier vorkommende Integral zu bestimmen, setze man in der Formel (41) des §. 36:

$$y=arc\left(\sin=\frac{b}{\sqrt{r^2-x^2}}\right),\ \frac{\partial z}{\partial x}=1,\ \text{also}\ z=x,\ \frac{\partial y}{\partial x}=\frac{bx}{(r^2-x^2)\sqrt{r^2-b^2-x^2}},$$

$$\int arc\left(\sin=\frac{b}{\sqrt{r^2-x^2}}\right)\partial x=x\,arc\left(\sin=\frac{b}{\sqrt{r^2-x^2}}\right)-b\int\frac{x^2\partial x}{(r^2-x^2)\sqrt{r^2-b^2-x^2}},$$

$$\int\frac{x^2\partial x}{(r^2-x^2)\sqrt{r^2-b^2-x^2}}=r^2\int\frac{\partial x}{(r^2-x^2)\sqrt{r^2-b^2-x^2}}-\int\frac{\partial x}{\sqrt{r^2-b^2-x^2}}=\frac{r}{b}arc\left(tg=\frac{bx}{r\sqrt{r^2-b^2-x^2}}\right)-arc\left(\sin=\frac{x}{\sqrt{r^2-b^2}}\right),\ \int_0^a arc\left(\sin=\frac{b}{\sqrt{r^2-x^2}}\right)\partial x=$$

$$a\,.\,arc\left(\sin=\frac{b}{\sqrt{r^2-a^2}}\right)-r\,arc\left(tg=\frac{ab}{r\sqrt{r^2-b^2-a^2}}\right)+b\,.\,arc\left(\sin=\frac{a}{\sqrt{r^2-b^2}}\right).$$

also die Fläche =

$$ar\,.\,arc\left(\sin=\frac{b}{\sqrt{r^2-a^2}}\right)-r^2 arc\left(tg=\frac{ab}{r\sqrt{r^2-b^2-a^2}}\right)+br\,.\,arc\left(\sin=\frac{a}{\sqrt{r^2-b^2}}\right).$$

Daraus folgt, dass $r^2>a^2+b^2$ seyn muss, wie sich von selbst versteht, wenn über dem ganzen Rechteck noch Kugelfläche sich befinden soll.

III. Durch die Kugel, deren Gleichung $x^2+y^2+z^2=r^2$ ist, wird ein Zylinder gesteckt, dessen Gleichung $x^2-rx+z^2=0$ ist; man soll das Stück der Zylinder-

fläche, das innerhalb der Kugel, so wie das der Kugelfläche innerhalb des Zylinders berechnen.

Die Kugel hat r zum Halbmesser und ihr Mittelpunkt ist Anfangspunkt der Koordinaten; der Zylinder steht senkrecht auf der Ebene der xz; * seine Grundfläche ist ein Kreis vom Halbmesser $\frac{r}{2}$ und dessen Mittelpunkt auf der Axe der x, in der Entfernung $\frac{r}{2}$ vom Anfangspunkt ist. Der Durchschnitt der Ebone der xz mit Zylinder und Kugel bildet also die Figur 44, wo ABA'B' der um O mit dem Halbmesser r beschriebene Kugelkreis, der um OA als Durchmesser beschriebene Kreis aber der Durchschnitt der Zylinderfläche ist. Die Axe der y liegt also auf dem Zylindermantel. Was die Projektion der Durchschnittskurve beider Flächen auf die Ebene der xy anbelangt, so erhält man ihre Gleichung, wenn man z aus den beiden Gleichungen eliminirt. Dadurch ergibt sich $y^2+rx=r^2$, eine Parabel, die durch die Punkte $x=r$, $y=0$ und $x=0$, $y=\pm r$ geht (Fig. 45), so dass EDE' diese Projektion vorstellt. Was nun das Kugelstück innerhalb des Zylinders anbelangt, so besteht es aus zwei gleichen Theilen, die sich im Punkte A (Fig. 44) berühren; der eine Theil liegt auf der Seite der positiven y, der andere auf Seiten der negativen y; ferner schneidet die Ebene der xy jeden dieser zwei Theile wieder in zwei Hälften, so dass man also bloss ein Viertel des Ganzen zu berechnen braucht. Die Projektion eines solchen Viertels ist in Figur 45 die Fläche DEFG, wo also die Gränzen von y sind: $\sqrt{r^2-rx}$ (für DFE), $\sqrt{r^2-x^2}$ (für DGE), mithin, da $\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$ denselben Werth hat wie in II, ist das Kugelflächenstück:

Fig. 44.

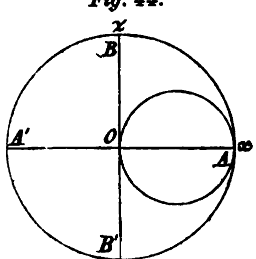
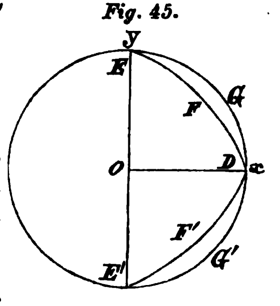


Fig. 45.



$$4r\int_0^r \partial x \int_{\sqrt{r^2-rx}}^{\sqrt{r^2-x^2}} \frac{\partial y}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}} = 4r\int_0^r \left[\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc}\left(\sin = \frac{\sqrt{r^2-rx}}{\sqrt{r^2-x^2}}\right)\right]\partial x = 2r^2\pi -$$

$$4r\int_0^r \operatorname{arc}\left(\sin = \sqrt{\frac{r^2-rx}{r^2-x^2}}\right)\partial x = 2r^2\pi - 4r\int_0^r \operatorname{arc}\left(\sin = \sqrt{\frac{r}{r+x}}\right)\partial x.$$

Nun ist (§. 36 (41)):

$$\int \operatorname{arc}\left(\sin = \sqrt{\frac{r}{r+x}}\right)\partial x = x \operatorname{arc}\left(\sin = \sqrt{\frac{r}{r+x}}\right) + \frac{\sqrt{r}}{2}\int \frac{\sqrt{x}\,\partial x}{r+x},$$

$$\int_0^r \operatorname{arc}\left(\sin = \sqrt{\frac{r}{r+x}}\right)\partial x = r \operatorname{arc}\left(\sin = \sqrt{\frac{1}{2}}\right) + \frac{\sqrt{r}}{2}\int_0^r \frac{\sqrt{x}\,\partial x}{r+x} = \frac{r\pi}{4} + \frac{\sqrt{r}}{2}\int_0^r \frac{\sqrt{x}\,\partial x}{r+x}.$$

Setzt man $x=z^2$, $\frac{\partial x}{\partial z}=2z$, so ist, da die Gränzen von z sind 0 und $\sqrt{r}$:

* Senkrecht auf der Ebene der xy kann man ihn nicht aufstehen lassen, da sonst in der Gleichung z nicht vorkäme, was doch die Formel (a) verlangt.

$$\int_0^r \frac{\sqrt{x}\,\partial x}{r+x} = 2\int_0^{\sqrt{r}} \frac{z^2\partial z}{r+z^2} = 2\int_0^{\sqrt{r}} \left(1 - \frac{r}{r+z^2}\right)\partial z = 2\sqrt{r} - \frac{2r}{\sqrt{r}}\,\mathrm{arc}\left(\mathrm{tg} = \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{r}}\right)$$

$$= 2\sqrt{r} - \frac{\sqrt{r}\,.\,\pi}{2},$$

also die Fläche: $2r^2\pi - r^2\pi - 4r^2 + r^2\pi = r^2(2\pi - 4) = 2r^2(\pi - 2)$. (Vergl. §. 51.)

Was die Zylinderfläche innerhalb der Kugel anbelangt, so wird sie von der Ebene der xy in zwei Hälften getheilt, wovon DFEE'F'D die Projektion auf die Ebene der xy ist. Da aus $x^2 - rx + z^2 = 0$ folgt: $2x - r + 2z\frac{\partial z}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{r-2x}{2z} = \frac{r-2x}{2\sqrt{rx - x^2}}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 0$, so ist die fragliche Fläche:

$$2\int_0^r \partial x \int_{-\sqrt{r^2-rx}}^{\sqrt{r^2-rx}} \sqrt{1 + \frac{(r-2x)^2}{4(rx-x^2)}}\,\partial y = 2\int_0^r \frac{\sqrt{4(rx-x^2)+(r-2x)^2}}{2\sqrt{x}\sqrt{r-x}} \int_{-\sqrt{r^2-rx}}^{\sqrt{r^2-rx}} \partial y =$$

$$2\int_0^r \frac{r}{\sqrt{x}\sqrt{r-x}}\sqrt{r(r-x)}\,\partial x = 2r^{\frac{3}{2}}\int_0^r \frac{\partial x}{\sqrt{x}} = 4r^2.$$

IV. Eine Kegelfläche, deren Axe die der z ist und die durch Rotation einer durch den Anfangspunkt der Koordinaten gehenden Geraden, die mit der Axe der z den Winkel α macht, um die Axe der z entstanden ist, schneidet eine Kugelfläche, deren Halbmesser r ist, und deren Mittelpunkt der nämliche Anfangspunkt ist. Man soll das Stück der Kugelfläche innerhalb der Kegelfläche berechnen.

Die Gleichung der Kugel ist $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ und also wie oben $\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}}$. Was die Kegelfläche anbelangt, so wollen wir von einem Punkte (xyz) derselben auf die Ebene der xy uns eine Senkrechte gezogen denken; die Länge derselben ist $= z$; verbindet man ihren Fusspunkt mit dem Anfangspunkt der Koordinaten, so ist die Länge der Verbindungslinie $= \sqrt{x^2 + y^2}$, und man hat offenbar:

$$\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}} = \mathrm{cotg}\,\alpha, \text{ also } y^2 + x^2 = z^2\mathrm{tg}^2\alpha,$$

als Gleichung der Kegelfläche. Die Projektion der Durchschnittskurve auf die Ebene der xy ist

$$(x^2+y^2)(1+\mathrm{cotg}^2\alpha) = r^2,\ x^2+y^2 = r^2\sin^2\alpha,$$

ein Kreis vom Halbmesser $r\sin\alpha$, dessen Mittelpunkt der Anfangspunkt der Koordinaten ist. Demnach ist die fragliche Fläche:

$$r\int_{-r\sin\alpha}^{+r\sin\alpha} \partial x \int_{-\sqrt{r^2\sin^2\alpha - x^2}}^{\sqrt{r^2\sin^2\alpha - x^2}} \frac{\partial y}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}},$$

oder wenn man $r\sin\alpha = a$ setzt:

$$2r\int_{-a}^{+a} \mathrm{arc}\left(\sin = \sqrt{\frac{a^2 - x^2}{r^2 - x^2}}\right)\partial x.$$

Sodann ist, wie so eben

$$\int_{-a}^{+a} \mathrm{arc}\left(\sin = \sqrt{\frac{a^2-x^2}{r^2-x^2}}\right)\partial x = \sqrt{r^2-a^2}\int_{-a}^{+a}\frac{x^2\partial x}{(r^2-x^2)\sqrt{a^2-x^2}} =$$

$$\sqrt{r^2-a^2}\int_{-a}^{+a}\left(\frac{r^2}{r^2-x^2}-1\right)\frac{\partial x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \sqrt{r^2-a^2}\left[\frac{r\pi}{\sqrt{r^2-a^2}}-\pi\right] \text{ (§. 50, VII)},$$

$$2r\int_{-a}^{+a}\mathrm{arc}\left(\sin = \sqrt{\frac{a^2-x^2}{r^2-x^2}}\right)\partial x = 2r^2\pi - 2r\pi\sqrt{r^2-a^2} = 2r^2\pi(1-\cos\alpha) = 4r^2\pi\sin^2\frac{\alpha}{2},$$

die bekannte Formel für eine sphärische Haube.

Will man ein Stück des Kegels berechnen, das innerhalb der Kugel liegt, so zieht man aus $z^2 = (x^2+y^2)\cot g^2\alpha$: $z\frac{\partial z}{\partial x} = x\cot g^2\alpha$, $z\frac{\partial z}{\partial y} = y\cot g^2\alpha$, $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{z}\cot g^2\alpha$ $= \frac{x\cot g\alpha}{\sqrt{x^2+z^2}}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y\cot g\alpha}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \frac{x^2+y^2+x^2\cot g^2\alpha+y^2\cot g^2\alpha}{x^2+y^2}$ $= 1+\cot g^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$, also ist die Fläche:

$$\frac{1}{\sin\alpha}\int_{-r\sin}^{+r\sin}\partial x\int_{-\sqrt{r^2\sin^2\alpha-x^2}}^{+\sqrt{r^2\sin^2\alpha-x^2}}\partial y = \frac{2}{\sin\alpha}\int_{-r\sin\alpha}^{+r\sin}\sqrt{r^2\sin^2\alpha-x^2}\,\partial x = \frac{2}{\sin\alpha}\left[\frac{r^2\sin^2\alpha}{2}\frac{\pi}{2}+\frac{r^2\sin^2\alpha}{2}\frac{\pi}{2}\right]$$
$$= r^2\sin\alpha\,.\,\pi.$$

V. Ein Kreiszylinder steht schief auf seiner Grundfläche; es soll sein Mantel berechnet werden. Sey r der Halbmesser der Grundfläche, b die Länge der Zylinderaxe, α der Winkel, den sie mit der Grundebene macht; ferner wähle man letztere zur Ebene der xy, den Mittelpunkt des Grundkreises zum Anfangspunkt der Koordinaten, die Ebene durch die Axe des Zylinders und die Axe der z zur Ebene der xz, so dass die Axe der x Projektion der Zylinderaxe auf die Ebene der xy ist. Was nun die Gleichung der Zylinderfläche anbelangt, so denken wir uns durch den Punkt (xyz) derselben eine Ebene parallel mit der Grundfläche, welche die Zylinderaxe in einem Punkte schneiden wird, dessen Entfernung vom gewählten Punkte $= r$ ist. Die Länge des Zylinderaxenstücks vom Anfangspunkt der Koordinaten bis zu diesem Durchschnittspunkte ist $\frac{z}{\sin\alpha}$, so dass die Koordinaten des Durchschnittspunkts sind: $\frac{z}{\sin\alpha}\cos\alpha$, 0, z, und man also hat:

$$(z\cot g\alpha - x)^2 + y^2 + (z-z)^2 = r^2,$$

d. h. die Gleichnng der Zylinderfläche ist

$$(z\cot g\alpha - x)^2 + y^2 = r^2,\quad z\cot g\alpha = x \pm \sqrt{r^2-y^2}$$

wo beide Zeichen gelten, da jedes z die Zylinderfläche zweimal trifft. Man zieht daraus:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \mathrm{tg}\alpha,\ \frac{\partial z}{\partial y} = \mp\frac{y\,\mathrm{tg}\alpha}{\sqrt{r^2-y^2}},\ 1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = 1+\mathrm{tg}^2\alpha+\frac{y^2\mathrm{tg}^2\alpha}{r^2-y^2}$$
$$= \frac{r^2(1+\mathrm{tg}^2\alpha)-y^2}{r^2-y^2} = \frac{r^2-y^2\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha\,(r^2-y^2)}.$$

Sind AB, CD zwei Kreise vom Halbmesser r, ist die Entfernung OO′ ihrer Mittelpunkte $= b\cos\alpha$, so stellt Figur 46, S. 238, die Projektion der zu berechnenden

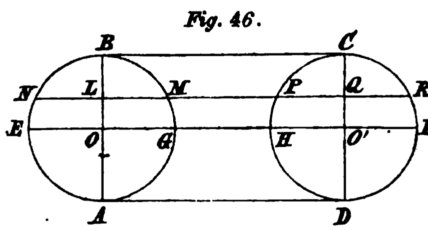


Fig. 46.

Fläche auf die Ebene der xy vor, wobei OO′ Axe der x, OB der y ist. Dabei ist AEBCHD die Projektion der einen Hälfte, AGBCFD der andern. In diesem Falle ist es nun bequemer, die Formel (a′) anzuwenden. Für ein beliebiges $y = OL$ sind die Gränzen von x

für die erste Hälfte: $-NL = -LM$ und $LP = OO' - PQ = OO' - LM$,
„ „ zweite „ : $+LM$ und $LR = OO' + QR = OO' + LM$.

Da nun $LM = \sqrt{r^2 - y^2}$ und $-r$ und $+r$ die Gränzen von y sind, so hat man für den Zylindermantel:

$$\frac{1}{\cos\alpha}\int_{-r}^{+r}\partial y\int_{-\sqrt{r^2-y^2}}^{b\cos\alpha-\sqrt{r^2-y^2}}\sqrt{\frac{r^2-y^2\cos^2\alpha}{r^2-y^2}}\,\partial x+\frac{1}{\cos\alpha}\int_{-r}^{+r}\partial y\int_{\sqrt{r^2-y^2}}^{b\cos\alpha+\sqrt{r^2-y^2}}\sqrt{\frac{r^2-y^2\cos^2\alpha}{r^2-y^2}}\,\partial x$$

$$=\frac{1}{\cos\alpha}\int_{-r}^{+r}\partial y\sqrt{\frac{r^2-y^2\cos^2\alpha}{r^2-y^2}}\int_{-\sqrt{r^2-y^2}}^{b\cos\alpha-\sqrt{r^2-y^2}}\partial x\quad+\frac{1}{\cos\alpha}\int_{-r}^{+r}\partial y\sqrt{\frac{r^2-y^2\cos^2\alpha}{r^2-y^2}}\int_{\sqrt{r^2-y^2}}^{b\cos..+\sqrt{r^2-y^2}}\partial x$$

$$=2b\int_{-r}^{+r}\sqrt{\frac{r^2-y^2\cos^2\alpha}{r^2-y^2}}\,\partial y=4b\int_0^r\sqrt{\frac{r^2-y^2\cos^2\alpha}{r^2-y^2}}\,\partial y\ \ (\S.\ 49,\ \text{VII}).$$

Setzt man hier $y = r\sin\varphi$, $\frac{\partial y}{\partial\varphi} = r\cos\varphi$, so sind die Gränzen von φ: 0 und $\frac{\pi}{2}$ und es ist die Fläche =

$$4rb\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\cos^2\alpha\sin^2\varphi}\,\partial\varphi.$$

Gemäss §. 55, II ist aber $4r\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\cos^2\alpha\sin^2\varphi}\,\partial\varphi$ der Umfang einer Ellipse, deren Halbaxen sind: r und $r\sin\alpha$, und da diese Ellipse die Kurve ist, die man erhält, wenn man den Zylinder senkrecht auf seine Axe durchschneidet, so folgt hieraus, dass der Zylindermantel gleich ist dem Umfang des senkrecht auf die Axe geführten Schnittes, multiplizirt mit der Länge der Axe.

VI. Man soll die Fläche berechnen, die durch Rotation der Lemniscate (Fig. 28) um BC entsteht.* Die Gleichung der Lemniscate ist (§. 55, V) $r^2 = a^2\cos 2\omega = a^2(\cos^2\omega - \sin^2\omega)$, also da $r^2 = x^2 + y^2$, $\cos^2\omega = \frac{x^2}{x^2+y^2}$, $\sin^2\omega = \frac{y^2}{x^2+y^2}$, so ist ihre Gleichung in rechtwinklichen Koordinaten: $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$, folglich die Gleichung der Rotationsfläche, wenn die Axen der x und y bleiben:

$$(x^2+y^2+z^2)^2 = a^2(x^2-y^2-z^2).$$

Setzt man die oben erwähnten Polarkoordinaten, so ist:

$$r^4 = a^2r^2(\cos^2\psi\cos^2\varphi - \cos^2\psi\sin^2\varphi - \sin^2\psi) = a^2r^2(2\cos^2\varphi\cos^2\psi - 1),$$
$$r^2 = a^2(2\cos^2\varphi\cos^2\psi - 1).$$

Hieraus: $\quad r\frac{\partial r}{\partial\varphi} = -2a^2\sin\varphi\cos\varphi\cos^2\psi,\quad r\frac{\partial r}{\partial\psi} = -2a^2\cos^2\varphi\cos\psi\sin\psi,$

* Findet sich nach §. 56 für $r^2 = a^2\cos^2\omega$ gleich $4a^2\pi\left(1-\cos\frac{\pi}{4}\right) = 2a^2\pi(2-\sqrt{2})$.

$$r^2\left(\frac{\partial r}{\partial \varphi}\right)^2+r^2\cos^2\psi\left(\frac{\partial r}{\partial \psi}\right)^2+r^4\cos^2\psi=4a^4\sin^2\varphi\cos^2\varphi\cos^4\psi+4a^4\cos^4\varphi\cos^4\psi\sin^2\psi$$
$$+4a^4\cos^4\varphi\cos^6\psi-4a^4\cos^2\varphi\cos^4\psi+a^4\cos^2\psi$$
$$=4a^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi\cos^4\psi+4a^4\cos^4\varphi\cos^4\psi-4a^4\cos^2\varphi\cos^4\psi+a^4\cos^2\psi$$
$$=4a^4\cos^2\varphi\cos^4\psi-4a^4\cos^2\varphi\cos^4\psi+a^4\cos^2\psi=a^4\cos^2\psi,$$

also
$$r\sqrt{\left(\frac{\partial r}{\partial \varphi}\right)^2+\left[r^2+\left(\frac{\partial r}{\partial \psi}\right)^2\right]\cos^2\psi}=a^2\cos\psi.$$

Was nun die Gränzwerthe anbelangt, so sind die von φ, wenn man nur die durch AMB entstandene Hälfte erhalten will, $-\frac{\pi}{4}$ und $+\frac{\pi}{4}$; die einem beliebigen φ entsprechenden Gränzwerthe von ψ sind, wenn der Pol wie hier nicht im Innern des Körpers liegt, aus dem Kegel zu entnehmen, dessen Spitze im Pol sich befindet und der die zu berechnende Fläche umhüllt. Für unsern Fall ist derselbe entstanden durch Rotation einer Geraden durch A, die mit AB einen Winkel $=\frac{\pi}{4}$ macht, um AB. Da die Gleichung dieser Geraden $y=x$ ist, so ist $y^2+z^2=x^2$ die Gleichung des Kegels, also wenn man die Polarkoordinaten einführt: $\cos^2\psi\sin^2\varphi+\sin^2\psi=\cos^2\psi\cos^2\varphi$, woraus $\sin^2\psi=\cos^2\psi\cos 2\varphi$, $\operatorname{tg}^2\psi=\cos 2\varphi$, $\operatorname{tg}\psi=\sqrt{\cos 2\varphi}$, so dass die Gränzen von ψ sind: $+\operatorname{arc}(\operatorname{tg}=\sqrt{\cos 2\varphi})$, $-\operatorname{arc}(\operatorname{tg}=\sqrt{\cos 2\varphi})$ und mithin die zu berechnende Hälfte:

$$a^2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{+\frac{\pi}{4}}\partial\varphi\int_{-\operatorname{arc}(\operatorname{tg}=\sqrt{\cos 2\varphi})}^{+\operatorname{arc}(\operatorname{tg}=\sqrt{\cos 2\varphi})}\cos\psi\,\partial\psi$$

Da nun $\int\cos\psi\,\partial\psi=\sin\psi$, also das bestimmte Integral nach ψ gleich $\sin\operatorname{arc}(\operatorname{tg}=\sqrt{\cos 2\varphi})-\sin[-\operatorname{arc}(\operatorname{tg}=\sqrt{\cos 2\varphi})]=2\sin\operatorname{arc}(\operatorname{tg}=\sqrt{\cos 2\varphi})$, und allgemein $\sin\operatorname{arc}(\operatorname{tg}=z)=\frac{z}{\sqrt{1+z^2}}$, so ist also die halbe Fläche $=$

$$2a^2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{+\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{\cos 2\varphi}}{\sqrt{1+\cos 2\varphi}}\,\partial\varphi=4a^2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{\frac{\cos 2\varphi}{1+\cos 2\varphi}}\,\partial\varphi.$$

Um das hier vorkommende Integral zu bestimmen, setzen wir $\cos 2\varphi=u$, $-2\sin 2\varphi\,\frac{\partial\varphi}{\partial u}=1$, $\frac{\partial\varphi}{\partial u}=-\frac{1}{2\sqrt{1-u^2}}$, da $\sin 2\varphi$ immer positiv ist. Also ist

$$\int\sqrt{\frac{\cos 2\varphi}{1+\cos 2\varphi}}\,\partial\varphi=-\frac{1}{2}\int\sqrt{\frac{u}{1+u}}\cdot\frac{\partial u}{\sqrt{1-u^2}}=-\frac{1}{2}\int\sqrt{\frac{u}{(1+u)(1-u^2)}}\,\partial u$$
$$=-\frac{1}{2}\int\frac{1}{1+u}\sqrt{\frac{u}{1-u}}\,\partial u.$$

Setzt man hier noch $\frac{u}{1-u}=v^2$, $u=\frac{v^2}{1+v^2}$, $\frac{\partial u}{\partial v}=\frac{2v}{(1+v^2)^2}$, so ist

$$\int\sqrt{\frac{\cos 2\varphi}{1+\cos 2\varphi}}\,\partial\varphi=-\int\frac{1+v^2}{1+2v^2}v\cdot\frac{v\,\partial v}{(1+v^2)^2}=-\int\frac{v^2\,\partial v}{(1+2v^2)(1+v^2)},$$

wobei nun die Gränzen von u sind: 1 und 0, also von v : ∞ und 0, so dass

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{\frac{\cos 2\varphi}{1+\cos 2\varphi}}\,\partial\varphi=\int_0^{\infty}\frac{v^2\,\partial v}{(1+2v^2)(1+v^2)}.$$

Aber

$$\int \frac{v^2 \partial v}{(1+2v^2)(1+v^2)} = \int \left(\frac{1}{1+v^2} - \frac{1}{1+2v^2}\right) \partial v = \text{arc}(\text{tg} = v) - \frac{1}{\sqrt{2}} \text{arc}(\text{tg} = v\sqrt{2}),$$

$$\int_0^\infty \frac{v^2 \partial v}{(1+2v^2)(1+v^2)} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\pi}{2} = \frac{(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}} \frac{\pi}{2},$$

also die halbe Fläche $= 2a^2\pi \dfrac{(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}}$, die ganze $\dfrac{4a^2\pi(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}} = 2a^2\pi(2-\sqrt{2})$.

§. 59.

Soll man die Länge des Bogens einer doppelt gekrümmten Kurve berechnen, dessen Endabszissen (x) a und b sind, so wird man, wie in §. 55 annehmen dürfen, dass Sehne und Bogen zusammenfallen, wenn beide unendlich klein sind. Da nun die Länge der Sehne $= \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$ ist, wenn sie sich vom Punkte (x, y, z) zum Punkte $(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$ erstreckt, so ist also, wenn Δs die Länge des sich zwischen denselben Punkten erstreckenden Kurvenbogens ist:

$$\text{Gr.} \frac{\Delta s}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}} = \pm 1, \quad \text{Gr.} \frac{\frac{\Delta s}{\Delta x}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{\Delta x}\right)^2}} = \pm 1,$$

d. h.

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \pm \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2},$$

woraus dann leicht folgt, dass die Länge des zu berechnenden Bogens =

$$\pm \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}\, \partial x,$$

wo $\frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial x}$ die aus den zwei Gleichungen der Kurve gezogenen Differentialquotienten sind, und das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem der Bogen wächst oder abnimmt mit wachsendem x. In dieser Beziehung gelten überhaupt die in §. 55 schon gemachten Bemerkungen.

I. **Man soll die Länge einer auf einen senkrechten Zylinder vom Halbmesser r gewickelten Schraubenlinie berechnen.**

Die Gleichungen derselben sind $x = r\cos\omega$, $y = r\sin\omega$, $z = a r\omega$, wo a eine Konstante ist, und ω den Winkel bedeutet, den der vom Punkte (x, y, z) senkrecht auf die Zylinderaxe gezogene Halbmesser des Zylinders mit der Axe der x macht, wenn derselbe von 0 bis ins Unbegränzte gezählt wird. Demnach:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\frac{\partial y}{\partial \omega}}{\frac{\partial x}{\partial \omega}} = \frac{r\cos\omega}{-r\sin\omega} = -\cotg\omega, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\frac{\partial z}{\partial \omega}}{\frac{\partial x}{\partial \omega}} = \frac{ar}{-r\sin\omega} = -\frac{a}{\sin\omega},$$

$$\int \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}\, \partial x = \int \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}\, \frac{\partial x}{\partial \omega} \partial \omega =$$

$$\int \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \omega}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \omega}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \omega}\right)^2}\, \partial \omega$$

$$=r\int\sqrt{\sin^2\omega+\cos^2\omega+a^2}\,\partial\omega=r\sqrt{1+a^2}\int\partial\omega=r\sqrt{1+a^2}\,.\,\omega,$$

mithin wenn 0 und ω_1 die Gränzwerthe von ω sind, so ist die Länge des Bogens $= r\,\omega_1\sqrt{1+a^2}=\frac{z_1}{a}\sqrt{1+a^2}$, wo z_1 die Ordinate des Endpunktes ist.

II. Man soll die Länge des Bogens einer auf einen senkrechten Kreiskegel gewickelten Schraubenlinie bestimmen.

Man kann sich die fragliche Schraubenlinie in folgender Weise entstanden denken. Eine Gerade, die durch den Anfangspunkt der Koordinaten geht, mache mit der Axe der x den Winkel α und drehe sich mit gleichförmiger Bewegung um diese Axe, während ein Punkt in derselben, der vom Anfangspunkt ebenfalls ausgeht, sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit bewegt; alsdann beschreibt die Gerade die Kegelfläche, der Punkt die fragliche Schraubenlinie. Um die Gleichungen derselben zu finden, beachten wir zuerst, dass die Gleichung der Kegelfläche ist $y^2+z^2=x^2\operatorname{tg}^2\alpha$ (§. 58, IV) und dies die eine der Gleichungen seyn wird. Seyen nun x, y, z die Koordinaten des beschreibenden Punktes zur Zeit t, so wird, wenn c der Winkel ist, den die durch die Axe der x und die drehende Gerade gelegte Ebene in der Zeit 1 zurücklegt, ct der Winkel seyn, den diese Ebene in jenem Zeitmoment mit der Ebene der xy macht, wenn diese letztere Ebene die anfängliche Lage der beweglichen Ebene ist. Ist ferner a der Weg, den der beschreibende Punkt in der Zeit 1 zurücklegt, so ist seine Entfernung vom Anfangspunkt zur Zeit t gleich at, und wenn man nun die bewegliche Gerade in dem Zeitmomente t auf die Ebene der yz projizirt, dabei voraussetzt, dass der Winkel ct in der Richtung von der Axe der y zu der der z gezählt wird, so wird ct der Winkel seyn, den diese Projektion, deren Länge $=at.\sin\alpha$ ist, macht mit der Axe der y. Daraus folgt, dass nothwendig $y=at\sin\alpha\,.\cos(ct)$ ist. Da auch $at\cos\alpha=x$, so ist $t=\frac{x}{a\cos\alpha}$ und man kann daher folgende zwei Gleichungen als Gleichungen der Schraubenlinie aufstellen:

$$y=x\operatorname{tg}\alpha\cos\left(\frac{cx}{a\cos\alpha}\right),\quad z=x\operatorname{tg}\alpha\sin\left(\frac{cx}{a\cos\alpha}\right),$$

woraus von selbst folgt $y^2+z^2=x^2\operatorname{tg}^2\alpha$. Was nun den Quotienten $\frac{c}{a}$ anbelangt, so kann er in etwas anderer Weise ausgedrückt werden. Sey nämlich τ die Zeit, in der die Gerade eine vollständige Umdrehung macht, so dass also $c\tau=2\pi$, $\tau=\frac{2\pi}{c}$, so wird der bewegliche Punkt in dieser Zeit den Weg $a\tau=\frac{a}{c}2\pi$ zurücklegen, und wenn wir diesen Weg mit h bezeichnen, so ist $\frac{a}{c}2\pi=h$, $\frac{c}{a}=\frac{2\pi}{h}$ und es sind endlich die gesuchten Gleichungen:

$$y=x\operatorname{tg}\alpha\cos\left(\frac{2\pi x}{h\cos\alpha}\right),\quad z=x\operatorname{tg}\alpha\sin\left(\frac{2\pi x}{h\cos\alpha}\right).$$

Was übrigens h anbelangt, so ist es die Höhe eines Schraubengangs, d. h. die Entfernung derjenigen Punkte, in denen eine Seitenlinie des Kegels (eine durch den Scheitel gehende, auf dem Kegelmantel liegende Gerade) die Schraubenlinie schneidet. Jetzt ist

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\operatorname{tg}\alpha\cos\left(\frac{2\pi x}{h\cos\alpha}\right)-\frac{2\pi x}{h\cos\alpha}\operatorname{tg}\alpha\sin\left(\frac{2\pi x}{h\cos\alpha}\right),$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\operatorname{tg}\alpha\sin\left(\frac{2\pi x}{h\cos\alpha}\right)+\frac{2\pi x}{h\cos\alpha}\operatorname{tg}\alpha\cos\left(\frac{2\pi x}{h\cos\alpha}\right).$$

$$1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2=1+tg^2\alpha+\frac{4\pi^2x^2}{h^2\cos^2\alpha}tg^2\alpha=\frac{h^2+4\pi^2x^2tg^2\alpha}{h^2\cos^2\alpha},$$

also wenn man die Länge der Schraubenlinie vom Scheitel $(x=0)$ an rechnet, bis zu demjenigen Punkte, dessen Abszisse $x=x_1$, so hat man für dieselbe:

$$\frac{1}{h\cos\alpha}\int_0^{x_1}\sqrt{h^2+4\pi^2tg^2\alpha\, x^2}\,\partial x=\frac{1}{h\cos\alpha}\left[\frac{x_1}{2}\sqrt{h^2+4\pi^2tg^2\alpha\,.\,x_1^2}+\right.$$
$$\left.\frac{h^2}{4\pi tg\alpha}l\left(\frac{x_1 2\pi tg\alpha+\sqrt{h^2+4\pi^2x_1^2tg^2\alpha}}{h}\right)\right],$$

d. h. wenn man zur Abkürzung $\frac{2\pi tg\alpha}{h}=k$ setzt, so ist diese Länge $=$

$$\frac{x_1}{2\cos\alpha}\sqrt{1+k^2x_1^2}+\frac{1}{2k\cos\alpha}l(kx_1+\sqrt{1+k^2x_1^2}).$$

Für $\alpha=90^0$ wird die Schraubenlinie zu einer Spirale in der Ebene der yz, und wenn dann r_1 die Entfernung des Endpunkts vom Pol ist, so ist oben $\frac{x_1}{\cos\alpha}=r_1$, also $kx_1=\frac{2\pi\sin\alpha}{h}\frac{x_1}{\cos\alpha}=\frac{2\pi r_1}{h}$, $k\cos\alpha=\frac{2\pi}{h}$ und wenn $\frac{2\pi}{h}=\frac{1}{a}$, so ist die Länge der Spirale:

$$\frac{r_1}{2a}\sqrt{a^2+r_1^2}+\frac{a}{2}l\left(\frac{r_1+\sqrt{a^2+r_1^2}}{a}\right)\ (\S.\ 55,\ V).$$

III. Man soll die Länge der Durchschnittskurve der zwei in §. 58, III betrachteten Flächen bestimmen.

Die Gleichungen derselben sind $x^2+y^2+z^2=r^2$, $z^2+x^2-rx=0$, woraus folgt $z=\sqrt{rx-x^2}$, $y=\sqrt{r^2-rx}$, $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{r-2x}{2\sqrt{rx-x^2}}$, $\frac{\partial y}{\partial x}=-\frac{r}{2\sqrt{r^2-rx}}$, $1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2=1+\frac{(r-2x)^2}{4(rx-x^2)}+\frac{r^2}{4(r^2-rx)}=1+\frac{(r-2x)^2}{4x(r-x)}+\frac{r^2}{4r(r-x)}=\frac{4x(r-x)+(r-2x)^2+rx}{4x(r-x)}=\frac{r^2+rx}{4x(r-x)}$, mithin, da die Durchschnittskurve durch die Ebene der xy in vier gleiche Theile getheilt wird, und die Gränzen von x für einen derselben sind 0 und r, so ist dieser vierte Theil $=$

$$\frac{\sqrt{r}}{2}\int_0^r\sqrt{\frac{r+x}{(r-x)x}}\,\partial x=\frac{\sqrt{r}}{2}\int_0^r\frac{r+x}{\sqrt{x(r^2-x^2)}}\,\partial x.$$

Man setze hier $x=r\cos^2\varphi$, was man darf, da $x\lessgtr{}^{r}_{0}$, so sind die Gränzen von φ: $\frac{\pi}{2}$ und 0, und es ist $\frac{\partial x}{\partial\varphi}=-2r\sin\varphi\cos\varphi$, also

$$\frac{\sqrt{r}}{2}\int_0^r\frac{r+x}{\sqrt{x(r^2-x^2)}}\,\partial x=-\frac{\sqrt{r}}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^0\frac{r+r\cos^2\varphi}{\sqrt{r}\,.\cos\varphi\,.\,r\sqrt{1-\cos^4\varphi}}2r\sin\varphi\cos\varphi\,\partial x=$$

$$r\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos^2\varphi}{\sqrt{1-\cos^2\varphi}\sqrt{1+\cos^2\varphi}}\sin\varphi\,\partial\varphi=r\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+\cos^2\varphi}\,\partial\varphi=r\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2-\sin^2\varphi}\,\partial\varphi$$

$$=r\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\tfrac{1}{2}\sin^2\varphi}\,\partial\varphi.$$

Diese Grösse ist aber (§. 55, II) gleich dem vierten Theil des Umfangs einer Ellipse, deren Halbaxen $r\sqrt{2}$ und r sind, so dass also die ganze Länge der Kurve gleich ist dem Umfang dieser Ellipse.

IV. Man soll die Länge der Durchschnittslinie der Kugel $x^2+y^2+z^2=a^2$ und des elliptischen Zylinders $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\,(b^2<a^2)$ berechnen.

Man zieht aus $x^2+y^2+z^2=a^2$, $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$: $y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$, $z=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\sqrt{a^2-x^2}=\frac{e}{a}\sqrt{a^2-x^2}$, wenn $a^2-b^2=e^2$. Daraus $\frac{\partial y}{\partial x}=-\frac{bx}{a\sqrt{a^2-x^2}}$, $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{ex}{a\sqrt{a^2-x^2}}$, $1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2=\frac{a^2(a^2-x^2)+b^2x^2+e^2x^2}{a^2(a^2-x^2)}=\frac{a^2}{a^2-x^2}$.

Für den vierten Theil der über der Ebene der xy liegenden Durchschnittskurve sind die Gränzen von x: 0 und a, so dass also derselbe =

$$a\int_0^a\frac{\partial x}{\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{a\pi}{2},$$

mithin der über der Ebene der xy befindliche Theil $=2a\pi$, d. h. gleich dem Umfang eines grössten Kreises der Kugel.

V. Wollte man bei diesen Aufgaben die Polarkoordinaten des §. 58 einführen, so müssten etwa r und ψ als Funktionen von φ betrachtet werden und man hätte

$$\int\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2}\,\partial x=\int\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2}\,\partial\varphi,$$

wo nun
$$\frac{\partial x}{\partial\varphi}=\frac{\partial r}{\partial\varphi}\cos\psi\cos\varphi-r\sin\psi\cos\varphi\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}-r\cos\psi\sin\varphi,$$
$$\frac{\partial y}{\partial\varphi}=\frac{\partial r}{\partial\varphi}\cos\psi\sin\varphi-r\sin\psi\sin\varphi\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}+r\cos\psi\cos\varphi,$$
$$\frac{\partial z}{\partial\varphi}=\frac{\partial r}{\partial\varphi}\sin\psi+r\cos\psi\frac{\partial\psi}{\partial\varphi},$$

also
$$\left(\frac{\partial x}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial\varphi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial\varphi}\right)^2=\left(\frac{\partial r}{\partial\varphi}\right)^2+r^2\left(\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right)^2+r^2\cos^2\psi,$$

so dass, wenn φ_0, φ_1 die Gränzen von φ sind, die Länge des Bogens =

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\sqrt{\left(\frac{\partial r}{\partial\varphi}\right)^2+r^2\left(\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right)^2+r^2\cos^2\psi}\,\partial\varphi,$$

wo nun r und ψ durch φ vermöge der Gleichungen der Kurve auszudrücken sind.

Meistens werden diese Polarkoordinaten mit Vortheil dann angewendet werden, wenn die Kurve, deren Länge berechnet werden soll, auf einer Kugel liegt, da in diesem Falle r konstant, gleich dem Kugelhalbmesser, ist. Alsdann ist die Länge =

$$r\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\sqrt{\left(\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right)^2+\cos^2\psi}\,\partial\varphi,$$

wo r den Kugelhalbmesser bedeutet. Wollte man hiernach etwa die Aufgabe IV lösen, so wäre $r=a$, und $\cos^2\psi\cos^2\varphi+\frac{a^2}{b^2}\cos^2\psi\sin^2\varphi=1$, $\cos^2\psi=\frac{b^2}{a^2\sin^2\varphi+b^2\cos^2\varphi}$,

$$-2\sin\psi\cos\psi\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}=-\frac{b^2(2a^2\sin\varphi\cos\varphi-2b^2\sin\varphi\cos\varphi)}{(a^2\sin^2\varphi+b^2\cos^2\varphi)^2},\ \sin\psi\cos\psi\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}=\frac{b^2(a^2-b^2)\sin\varphi\cos\varphi}{(a^2\sin^2\varphi+b^2\cos^2\varphi)^2},$$

$$\sin^2\psi\cos^2\psi\left(\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right)^2=\frac{b^4e^4\sin^2\varphi\cos^2\varphi}{(a^2\sin^2\varphi+b^2\cos^2\varphi)^4},\ \sin^2\psi=1-\cos^2\psi=\frac{(a^2-b^2)\sin^2\varphi}{a^2\sin^2\varphi+b^2\cos^2\varphi}$$

$$=\frac{e^2\sin^2\varphi}{a^2\sin^2\varphi+b^2\cos^2\varphi},\ \sin^2\psi\cos^2\psi=\frac{b^2e^2\sin^2\varphi}{(a^2\sin^2\varphi+b^2\cos^2\varphi)^2},$$

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right)^2=\frac{b^2e^2\cos^2\varphi}{(a^2\sin^2\varphi+b^2\cos^2\varphi)^2},\ \left(\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right)^2+\cos^2\psi=\frac{b^2(a^2\sin^2\varphi+b^2\cos^2\varphi)+b^2e^2\cos^2\varphi}{(a^2\sin^2\varphi+b^2\cos^2\varphi)^2}=$$

$$\frac{a^2b^2}{(a^2\sin^2\varphi+b^2\cos^2\varphi)^2},\ \sqrt{\left(\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right)^2+\cos^2\psi}=\frac{ab}{a^2\sin^2\varphi+b^2\cos^2\varphi},$$

also da für den vierten Theil der Kurve die Gränzen von φ sind 0 und $\frac{\pi}{2}$, so ist die Kurvenlänge:

$$4a^2b\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\partial\varphi}{a^2\sin^2\varphi+b^2\cos^2\varphi}=4a^2b\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\partial\varphi}{a^2-e^2\cos^2\varphi}=\frac{4a^2b}{ab}\cdot\frac{\pi}{2}=2a\pi\ (\S.\ 50,\ \text{VII}).$$

VI. Die Kugel $x^2+y^2+z^2=b^2$ durchschneidet die Fläche $(x^2+y^2+z^2)^2=a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2$, wo $a^2>b^2>c^2$; man soll die Länge der Durchschnittskurve berechnen.

Führt man Polarkoordinaten ein, so ist $r=b$, also $b^2=a^2\cos^2\psi\cos^2\varphi+b^2\cos^2\psi\sin^2\varphi+c^2\sin^2\psi$, $b^2-c^2=\cos^2\psi(a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi-c^2)$, $\cos^2\psi=\frac{b^2-c^2}{(a^2-c^2)\cos^2\varphi+(b^2-c^2)\sin^2\varphi}$, so dass wenn $a^2-c^2=e^2$, $b^2-c^2=\varepsilon^2$, $\cos^2\psi=\frac{\varepsilon^2}{e^2\cos^2\varphi+\varepsilon^2\sin^2\varphi}$, woraus wie oben $\sqrt{\left(\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right)^2+\cos^2\psi}=\frac{e\varepsilon}{e^2\cos^2\varphi+\varepsilon^2\sin^2\varphi}$, also da für den achten Theil der Durchschnittskurve die Gränzen von φ sind 0 und $\frac{\pi}{2}$, so ist die Kurve $=$

$$8be\varepsilon\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\partial\varphi}{e^2\cos^2\varphi+\varepsilon^2\sin^2\varphi}=8be\varepsilon\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\partial\varphi}{e^2\sin^2\varphi+\varepsilon^2\cos^2\varphi}\ (\S.\ 49,\ \text{IV})$$

$$=8be\varepsilon\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\partial\varphi}{e^2-(e^2-\varepsilon^2)\cos^2\varphi}=8b\sqrt{(a^2-c^2)(b^2-c^2)}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\partial\varphi}{a^2-c^2-(a^2-b^2)\cos^2\varphi}$$

$$=\frac{8b\sqrt{(a^2-c^2)(b^2-c^2)}}{\sqrt{a^2-c^2}\sqrt{b^2-c^2}}\cdot\frac{\pi}{2}=4b\pi,$$

d. h. gleich dem doppelten Umfang eines grössten Kugelkreises.

§. 60.

Soll man endlich den Inhalt eines beliebig begränzten Körpers suchen, so wird man durch Ebenen, die parallel gehen mit den Koordinatenebenen der xy, xz, yz denselben in Prismen zertheilen. Sind die betreffenden Ebenen in je gleichem Abstande und zwar die mit der Ebene der xy parallelen in dem Abstande Δz, die mit der Ebene der xz parallelen in dem Abstande Δy, die mit der Ebene der yz parallelen in dem Abstande Δx, so wird der Inhalt eines solchen Prismas $=\Delta x\Delta y\Delta z$ seyn. Je kleiner nun Δx, Δy, Δz sind, desto mehr solcher Prismen werden sich im Innern des seinem

Inhalte nach zu berechnenden Körperraums befinden, so dass, wenn wir $\varDelta x$, $\varDelta y$, $\varDelta z$ unendlich abnehmen lassen, diese Anzahl immer grösser wird. Allerdings werden durch die gezogenen Ebenen im Innern des Körpers nicht lauter Prismen gebildet werden, vielmehr an den Begränzungen hin unregelmässigere Körperstücke entstehen; je kleiner aber $\varDelta x$, $\varDelta y$, $\varDelta z$ sind, desto kleiner werden auch diese unregelmässigen Stückchen werden, so dass, wenn man $\varDelta x$, $\varDelta y$, $\varDelta z$ schliesslich als unendlich klein ansieht, dieselben um den Körper herum eine unendlich dünne Schichte bilden werden, deren Inhalt mithin verschwinden wird. Wir haben demnach das Recht zu sagen, der zu berechnende Körper bestehe bloss aus den unendlich kleinen Körperelementen $\varDelta x \varDelta y \varDelta z$, deren Summe also den gesuchten Inhalt ausmacht (d. h. letzterer sey die Gränze, der sich jene Summe nähert). Was nun die Begränzung des Körpers anbelangt, so wollen wir uns (Fig. 41) auf der Ebene der xy einen senkrechten Zylinder errichtet denken, dessen Grundfläche MN sey, und das Körperstück berechnen, das innerhalb der Zylinderwand und Stücken von gegebenen krummen Oberflächen liege, die den Zylinder durchschneiden. Sind nun z_0, z_1 die Werthe von z als Funktionen von x und y, wie sie der unteren und oberen dieser krummen Oberflächen innerhalb des Zylinders zukommen, so wird die Grösse

$$\varDelta x \varDelta y \int_{z_0}^{z_1} \partial z = \varDelta x \varDelta y (z_1 - z_0)$$

die Summe all der unendlich kleinen Prismen ausdrücken, die über dem unendlich kleinen Rechtecke PQ stehen, wenn x, y die Koordinaten von P sind. Also wird, wenn y_0, y_1 die als Funktionen von x gegebenen Werthe von pR, pr sind, die Grösse

$$\varDelta x \int_{y_1}^{y_1} \partial y \int_{z_0}^{z_1} \partial z$$

den über dem unendlich schmalen Streifen Rr liegenden Körperstreifen ausdrücken; endlich, wenn a und b die äussersten Werthe von x (OA, OB) sind, so drückt

$$\int_a^b \partial x \int_{y_0}^{y_1} \partial y \int_{z_0}^{z_1} \partial z$$

den gesuchten Körperinhalt aus. Dass man bei der Summirung keineswegs die eben eingeschlagene Ordnung einhalten muss, ist wohl klar, so dass die Ordnung der Integration eine willkürliche ist. Eben so wird man unschwer einsehen, wie man sich in verwickelteren Fällen zu helfen hätte.

Führt man statt rechtwinklicher Koordinaten die bereits in §. 58 angewendeten Polarkoordinaten ein, wo nun r, φ, ψ die drei neuen unabhängig Veränderlichen sind, so ist in §. 52, IV: $\varphi = r \cos\varphi \cos\psi$, $\psi = r \sin\varphi \cos\psi$, $\Theta = r \sin\psi$, $u = r$, $v = \varphi$, $w = \psi$, also:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = \cos\varphi \cos\psi,\ \frac{\partial \varphi}{\partial v} = -r \sin\varphi \cos\psi,\ \frac{\partial \varphi}{\partial w} = -r \cos\varphi \sin\psi,\ \frac{\partial \psi}{\partial u} = \sin\varphi \cos\psi,$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial u} = r \cos\varphi \cos\psi,\ \frac{\partial \psi}{\partial w} = -r \sin\varphi \sin\psi,\ \frac{\partial \Theta}{\partial u} = \sin\psi,\ \frac{\partial \Theta}{\partial v} = 0,\ \frac{\partial \Theta}{\partial w} = r \cos\psi;$$

woraus dann $M = \pm r^2 \cos\psi$,

demnach: $$\int\int\int \partial x\, \partial y\, \partial z = \int\int\int r^2 \cos\psi\, \partial r\, \partial\varphi\, \partial\psi,$$
wo nun die Gränzen des neuen Integrals den Bedingungen der Aufgabe gemäss zu wählen sind. Liegt der Pol im Innern eines allseitig geschlossenen Körpers, so sind die Gränzen nach r: 0 und r, wenn r jetzt die aus der in Polarkoordinaten gegebenen Gleichung der begränzenden krummen Oberfläche gezogene Funktion von φ und ψ ist, die dort mit diesem Buchstaben bezeichnet wird; die Gränzen von ψ sind $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$, von φ: 0 und 2π, so dass also dann der Körperinhalt =
$$\int_0^{2\pi}\partial\varphi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\cos\psi\,\partial\psi\int_0^r r^2\,\partial r = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\partial\varphi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} r^3\cos\psi\,\partial\psi$$
ist. Es lässt sich von der eben gefundenen Formel eine geometrische Ableitung geben, die wir hier beifügen wollen, da sie die Anstände beseitigt, die eine Anwendung der Formeln des §. 52 haben könnte. Denken wir uns nämlich im Innern des zu berechnenden Körperraums einen Punkt, dessen Polarkoordinaten r, φ, ψ seyen, ziehen den Fahrstrahl r nach dem Pole; projiziren denselben auf die Polarebene (Ebene der xy), so wird die Projektion mit der Axe der x den Winkel φ, so wie mit r den Winkel ψ machen. Wir wollen uns nun r um Δr verlängert denken, so wie r selbst sich um den Winkel $\Delta\psi$ gegen die Axe der z sich drehen lassen, so dass also r nicht aus der durch r und die Projektion von r gehenden Ebene heraustritt. Alsdann wird, wenn Δr, $\Delta\psi$ unendlich klein sind, Δr ein Rechteck beschreiben, dessen Seiten Δr und $r\Delta\psi$, dessen Inhalt also $= r\Delta r\Delta\psi$ ist. Lässt man nun die Ebene, in der dieses Rechteck sich befindet, sich drehen um die Axe der z und zwar den Winkel $\Delta\varphi$ durchlaufen, so wird, für ein unendlich kleines $\Delta\varphi$, das Rechteck ein Parallelepiped beschreiben, dessen Grundfläche eben jenes Rechteck, dessen Höhe aber $= r\cos\psi\Delta\varphi$, so dass sein Inhalt $= r^2\cos\psi\Delta r\Delta\psi\Delta\varphi$ ist. Dieses ist nun ein Körperelement und durch Summirung all der Körperelemente erhält man den Körperinhalt, wodurch dann obiges Integral wieder zum Vorschein kommt.

I. Man soll den von dem dreiaxigen Ellipsoide (§. 57, I) umschlossenen Körperraum berechnen.

Die Gleichung des Ellipsoids ist $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, und es wird von der Ebene der xy in einer Ellipse geschnitten, deren Gleichung $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ist. Demnach, wenn man die über der Ebene der xy stehende Hälfte erhalten will, ist $z_0=0$, $z_1 = c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$; ferner ist die Gleichung der Kurve MN (Fig. 41) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$; also $y_0=-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$, $y_1=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$ und die Gränzen von x sind $-a$ und $+a$, so dass die fragliche Hälfte =

$$\int_{-a}^{+a}\partial x\int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{+b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\partial y\int_0^{c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}\partial z = c\int_{-a}^{+a}\partial x\int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{+b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,\partial y =$$

$$\frac{bc\pi}{2}\int_{-a}^{+a}\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\partial x = \frac{2bca\pi}{3}\ (\S. 57, I).$$

Hätte man die obigen Polarkoordinaten eingeführt, so wäre

$$\frac{r^2\cos^2\psi\cos^2\varphi}{a^2}+\frac{r^2\cos^2\psi\sin^2\varphi}{b^2}+\frac{r^2\sin^2\psi}{c^2}=1,$$

$$r^2=\frac{a^2b^2c^2}{b^2c^2\cos^2\psi\cos^2\varphi+a^2c^2\cos^2\psi\sin^2\varphi+a^2b^2\sin^2\psi},$$

demnach ist

$$\frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\partial\varphi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\frac{\partial\psi\,.\,a^3b^3c^3\cos\psi}{[b^2c^2\cos^2\psi\cos^2\varphi+a^2c^2\cos^2\psi\sin^2\varphi+a^2b^2\sin^2\psi]^{\frac{3}{2}}}=\frac{4}{3}abc\pi,$$

d. h. man hat:

$$\int_0^{2\pi}\partial\varphi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\psi\,\partial\psi}{[b^2c^2\cos^2\psi\cos^2\varphi+a^2c^2\cos^2\psi\sin^2\varphi+a^2b^2\sin^2\psi]^{\frac{3}{2}}}=\frac{4\pi}{a^2b^2c^2},$$

ein Resultat, auf das wir später wieder zurückkommen werden. Setzt man übrigens $b^2c^2=\alpha^2$, $a^2c^2=\beta^2$, $a^2b^2=\gamma^2$, und α,β,γ positiv, so ist $a^2b^2c^2=\alpha\beta\gamma$, also

$$\int_0^{2\pi}\partial\varphi\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\psi\,\partial\psi}{[\alpha^2\cos^2\psi\cos^2\varphi+\beta^2\cos^2\psi\sin^2\varphi+\gamma^2\sin^2\psi]^{\frac{3}{2}}}=\frac{4\pi}{\alpha\beta\gamma}.$$

II. Man soll den durch Rotation einer Lemniscate (§. 58, VI) entstandenen Körper berechnen. Derselbe ist:

$$\frac{2}{3}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{+\frac{\pi}{4}}\partial\varphi\int_{-\mathrm{arc}(\mathrm{tg}=\sqrt{\cos 2\varphi})}^{+\mathrm{arc}(\mathrm{tg}=\sqrt{\cos 2\varphi})}a^3(2\cos^2\varphi\cos^2\psi-1)^{\frac{3}{2}}\cos\psi\,\partial\psi.$$

Um dieses Integral zu bestimmen, setze man $\sin\psi=x$, $\cos\psi\frac{\partial\psi}{\partial x}=1$, $\cos^2\psi=1-x^2$ und hat

$$\int(2\cos^2\varphi\cos^2\psi-1)^{\frac{3}{2}}\cos\psi\,\partial\psi=\int(2\cos^2\varphi-2x^2\cos^2\varphi-1)^{\frac{3}{2}}\partial x$$

$$=\int(\cos 2\varphi-2x^2\cos^2\varphi)^{\frac{3}{2}}\partial x=\frac{x(\cos 2\varphi-2x^2\cos^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}{4}$$

$$+\frac{3\cos 2\varphi}{4}\int(\cos 2\varphi-2x^2\cos^2\varphi)^{\frac{1}{2}}\partial x\ (\S. 41)$$

$$=\frac{x(\cos 2\varphi-2x^2\cos^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}{4}+\frac{3\cos 2\varphi(\cos 2\varphi-2x^2\cos^2\varphi)^{\frac{1}{2}}x}{8}$$

$$+\frac{3\cos^2 2\varphi}{8}\int\frac{\partial x}{(\cos 2\varphi-2x^2\cos^2\varphi)^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{x(\cos 2\varphi - 2x^2\cos^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}{4} + \frac{3\cos 2\varphi(\cos 2\varphi - 2x^2\cos^2\varphi)^{\frac{1}{2}} x}{8}$$
$$+ \frac{3\cos^2 2\varphi}{8\sqrt{2\cos\varphi}} \text{arc}\left(\sin = x\sqrt{\frac{2\cos^2\varphi}{\cos 2\varphi}}\right),$$

also da $x = \sin\psi$:

$$\int (2\cos^2\varphi\cos^2\psi - 1)^{\frac{3}{2}}\cos\psi\,\partial\psi = \frac{\sin\psi(2\cos^2\varphi\cos^2\psi - 1)^{\frac{3}{2}}}{4} + \frac{3\cos 2\varphi\sin\psi(2\cos^2\varphi\cos^2\psi - 1)^{\frac{1}{2}}}{8}$$
$$+ \frac{3\cos^2 2\varphi}{8\sqrt{2\cos\varphi}} \text{arc}\left(\sin = \sin\psi\,\frac{\cos\varphi\,.\,\sqrt{2}}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\right).$$

Da ferner $\sin \text{arc}(\text{tg} = \sqrt{\cos 2\varphi}) = \frac{\sqrt{\cos 2\varphi}}{\sqrt{1+\cos 2\varphi}}$, $\cos \text{arc}(\text{tg} = \sqrt{\cos 2\varphi}) = \frac{1}{\sqrt{1+\cos 2\varphi}}$, $\cos^2\varphi\cos^2 \text{arc}(\text{tg} = \sqrt{\cos 2\varphi}) = \frac{\cos^2\varphi}{1+\cos 2\varphi} = \frac{\cos^2\varphi}{2\cos^2\varphi} = \frac{1}{2}$, $2\cos^2\varphi\cos^2 \text{arc}(\text{tg} = \sqrt{\cos 2\varphi}) - 1 = 0$, so ist

$$\int_{-\text{arc}(\text{tg}=\sqrt{\cos 2\varphi})}^{+\text{arc}(\text{tg}=\sqrt{\cos 2\varphi})} (2\cos^2\varphi\cos^2\psi - 1)^{\frac{3}{2}}\cos\psi\,\partial\psi = \frac{3\cos^2 2\varphi}{4\sqrt{2\cos\varphi}} \text{arc}\left(\sin = \sqrt{\frac{\cos 2\varphi}{1+\cos 2\varphi}}\,.\,\frac{\cos\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}\sqrt{2}\right)$$
$$= \frac{3\cos^2 2\varphi}{4\sqrt{2\cos\varphi}} \text{arc}\left(\sin = \frac{\cos\varphi}{\sqrt{1+\cos 2\varphi}}\sqrt{2}\right) = \frac{3\cos^2 2\varphi}{4\sqrt{2\cos\varphi}} \text{arc}(\sin = 1)$$
$$= \frac{3\cos^2 2\varphi}{8\sqrt{2\,.\cos\varphi}}\pi,$$

also der Inhalt:

$$\frac{\pi}{4\sqrt{2}} a^3 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{+\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^2 2\varphi}{\cos\varphi}\partial\varphi = \frac{\pi}{4\sqrt{2}} a^3 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{+\frac{\pi}{4}} \frac{(2\cos^2\varphi - 1)^2}{\cos\varphi}\partial x =$$

$$\frac{\pi}{4\sqrt{2}} a^3 \int_{-\frac{\pi}{4}}^{+\frac{\pi}{4}} \left[4\cos^3\varphi - 4\cos\varphi + \frac{1}{\cos\varphi}\right]\partial\varphi$$

$$= \frac{\pi a^3}{4\sqrt{2}}\left[\frac{8}{6}\sqrt{\frac{1}{2}} + \frac{16}{3}\sqrt{\frac{1}{2}} - 8\sqrt{\frac{1}{2}}\right] + \frac{\pi a^3}{4\sqrt{2}}\left[\text{l tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{8}\right) - \text{l tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{8}\right)\right]$$

$$= -\frac{\pi a^3}{6} + \frac{\pi a^3}{4\sqrt{2}}\,\text{l}\left(\frac{\text{tg}\frac{3\pi}{8}}{\text{tg}\frac{\pi}{8}}\right) = \frac{\pi a^3}{4\sqrt{2}}\,\text{l}\left(\text{tg}\frac{3\pi}{8}\text{cotg}\frac{\pi}{8}\right) - \frac{\pi a^3}{6} = \frac{\pi a^3}{4\sqrt{2}}\,\text{l}\left(\text{cotg}^2\frac{\pi}{8}\right) -$$

$$\frac{\pi a^3}{6} = \frac{\pi a^3}{4\sqrt{2}}\,\text{l}\left(\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{1-\cos\frac{\pi}{4}}\right) - \frac{\pi a^3}{6} = a^3\pi\left[\frac{1}{2\sqrt{2}}\text{l}(1+\sqrt{2}) - \frac{1}{6}\right].$$

(Vergl. §. 56, V.)

III. Ein senkrechter Kreiszylinder wird mit einer Ebene, die durch einen Durchmesser seiner Grundfläche geht, und mit letzterer den Winkel α macht, geschnitten. Man soll das Körperstück berechnen, das dadurch vom Zylinder abgeschnitten wird, wenn r der Halbmesser des Zylinders ist.

Nimmt man den Mittelpunkt der Grundfläche zum Anfangspunkt rechtwinklicher Koordinaten, den fraglichen Durchmesser zur Axe der y, die Grundfläche zur Ebene der xy, so ist die Gleichung des Schnitts: $z = x\,\text{tg}\,\alpha$, und es sind die Gränzen von

$z: 0$ und $x \operatorname{tg}\alpha$, von $y: -\sqrt{r^2-x^2}$ und $\sqrt{r^2-x^2}$, von $x: 0$ und r, so dass der zu berechnende Körper gleich

$$\int_0^r \partial x \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{+\sqrt{r^2-x^2}} \partial y \int_0^{x \operatorname{tg}\alpha} \partial z = \operatorname{tg}\alpha \int_0^r \partial x \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{+\sqrt{r^2-x^2}} x \partial y = 2 \operatorname{tg}\alpha \int_0^r x \sqrt{r^2-x^2}\, \partial x = \frac{2}{3} r^3 \operatorname{tg}\alpha.$$

Dabei ist $r \operatorname{tg}\alpha$ die Höhe des Körperstücks, so dass letzteres $=\frac{2}{3}r^2 h$ ist, wenn man mit h die Höhe bezeichnet.

Elfter Abschnitt.

Weitere Untersuchungen über bestimmte Integrale.

§. 61.

Das bestimmte Integral $\int_a^b f(x)\partial x$ hängt (§. 49) bloss von den Werthen von a und b, so wie den etwa noch in f(x) vorkommenden Konstanten, begreiflich aber nicht von x ab. Gesetzt nun, a und b seyen Funktionen einer Grösse α, die etwa auch noch in f(x) vorkomme, was wir dadurch anzeigen wollen, dass wir $f(x, \alpha)$ für f(x) schreiben, so ist natürlich das bestimmte Integral $\int_a^b f(x, \alpha)\partial x$ eine Funktion von α, und es kann uns die Aufgabe gestellt werden, den Differentialquotienten dieser Grösse nach α zu bestimmen.

Sey nun

$$\int f(x, \alpha)\partial x = F(x, \alpha), \text{ also} \int_a^b f(x, \alpha)\partial x = F(b, \alpha) - F(a, \alpha),$$

so ist (§. 7):

$$\frac{\partial}{\partial \alpha}\int_a^b f(x, \alpha)\partial x = \frac{\partial F(b, \alpha)}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial \alpha} + \frac{\partial F(b, \alpha)}{\partial \alpha} - \frac{\partial F(a, \alpha)}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial \alpha} - \frac{\partial F(a, \alpha)}{\partial \alpha}.$$

Nun ist aber offenbar

$$\frac{\partial F(x, \alpha)}{\partial x} = f(x, \alpha),$$

demnach ist $\frac{\partial F(b, \alpha)}{\partial b} = f(b, \alpha)$, $\frac{\partial F(a, \alpha)}{\partial a} = f(a, \alpha)$. Was ferner die Grösse

$$\frac{\partial F(b, \alpha)}{\partial \alpha} - \frac{\partial F(a, \alpha)}{\partial \alpha} = \frac{\partial (F(b, \alpha) - F(a, \alpha))}{\partial \alpha}$$

anbelangt, so ist sie offenbar gleich dem partiellen Differentialquotienten von $\int_a^b f(x, \alpha)\partial x$ nach α, wenn man dabei a und b als unabhängig von α ansieht. Was denselben anbelangt, so ist er $=$

$$\text{Gr.}\frac{\left[\int_a^b f(x, \alpha + \Delta\alpha)\partial x - \int_a^b f(x, \alpha)\partial x\right]}{\Delta\alpha} = \text{Gr.}\int_a^b \frac{f(x, \alpha + \Delta\alpha) - f(x, \alpha)}{\Delta\alpha}\partial x$$

$$= \int_a^b \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial \alpha} \partial x \ (\S. 45),$$

so dass endlich

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \int_a^b f(x, \alpha)\, \partial x = \int_a^b \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial \alpha} \partial x + f(b,\alpha) \frac{\partial b}{\partial \alpha} - f(a, \alpha) \frac{\partial a}{\partial \alpha}. \qquad (50)$$

Sind b und a unabhängig von α, so sind $\frac{\partial b}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial a}{\partial \alpha}$ Null u. s. w.

Der Satz (50) ist eine fruchtbare Quelle für Bildung bestimmter Integrale. So ist (§. 50):

$$\int_0^\infty e^{-ax} \sin(bx)\, \partial x = \frac{b}{a^2+b^2}, \int_0^\infty e^{-ax} \cos(bx)\, \partial x = \frac{a}{a^2+b^2}, \ a > 0.$$

Hieraus folgt durch nmalige Differentiation nach a:

$$\int_0^\infty x^n e^{-ax} \sin(bx)\, \partial x = (-1)^n b \frac{\partial^n}{\partial a^n}\left(\frac{1}{a^2+b^2}\right), \int_0^\infty x^n e^{-ax} \cos(bx)\, \partial x = (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial a^n}\left(\frac{a}{a^2+b^2}\right).$$

Die hier vorkommenden Differentialquotienten lassen sich leicht bestimmen. Es ist nämlich, wenn wie immer $\sqrt{-1} = i$:

$$\frac{1}{a^2+b^2} = -\frac{1}{2bi}\left[\frac{1}{a+bi} - \frac{1}{a-bi}\right], \ \frac{\partial^n}{\partial a^n}\left(\frac{1}{a^2+b^2}\right) = -\frac{1}{2bi}\left[(-1)^n \frac{1.2\ldots n}{(a+bi)^{n+1}} - \frac{(-1)^n 1.2\ldots n}{(a-bi)^{n+1}}\right] = -\frac{1}{2bi}(-1)^n 1.2\ldots n\left[\frac{(a-bi)^{n+1} - (a+bi)^{n+1}}{(a^2+b^2)^{n+1}}\right],$$

so dass, wenn $a + bi = r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$, also $a - bi = r(\cos\varphi - i\sin\varphi)$ („Grundzüge" S. 10), man hat:

$$(a+bi)^{n+1} = r^{n+1}[\cos(n+1)\varphi + i\sin(n+1)\varphi], \ (a-bi)^{n+1} = r^{n+1}[\cos(n+1)\varphi - i\sin(n+1)\varphi] \ (\S. 17, IV), \ (a^2+b^2)^{n+1} = r^{2(n+1)},$$

$$\frac{(a-bi)^{n+1} - (a+bi)^{n+1}}{2bi(a^2+b^2)^{n+1}} = -\frac{\sin(n+1)\varphi}{b r^{n+1}}, \ (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial a^n}\left(\frac{b}{a^2+b^2}\right) = \frac{1.2\ldots n \sin(n+1)\varphi}{r^{n+1}}.$$

Eben so

$$(-1)^n \frac{\partial^n}{\partial a^n}\left(\frac{a}{a^2+b^2}\right) = \frac{(-1)^n}{2} \frac{\partial^n}{\partial a^n}\left[\frac{1}{a+bi} + \frac{1}{a-bi}\right] = \frac{1.2\ldots n \cos(n+1)\varphi}{r^{n+1}},$$

mithin

$$\int_0^\infty x^n e^{-ax} \sin(bx)\, \partial x = \frac{1.2\ldots n \sin(n+1)\varphi}{r^{n+1}}, \int_0^\infty x^n e^{-ax} \cos(bx)\, \partial x = \frac{1.2\ldots n \cos(n+1)\varphi}{r^{n+1}}, \quad (a)$$

wo

$$r = \sqrt{a^2+b^2}, \ \sin\varphi = \frac{b}{r}, \ \cos\varphi = \frac{a}{r}, \ a > 0.$$

Ferner ist (§. 50): $\displaystyle\int_0^a \frac{\partial x}{a^2+x^2} = \frac{\pi}{4a}.$

Hieraus folgt, wenn man nach a differenzirt:

$$-\int_0^a \frac{2a\, \partial x}{(a^2+x^2)^2} + \frac{1}{2a^2} = -\frac{\pi}{4a^2}, \ \int_0^a \frac{\partial x}{(a^2+x^2)^2} = \frac{\pi}{8a^3} + \frac{1}{4a^3} = \frac{1}{4a^3}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right). \qquad (b)$$

Es versteht hiebei sich von selbst, dass in dem Satze (50) alle vorkommenden Grössen bestimmte, endliche Werthe haben müssen, wenn er gelten soll.

Man hat, wenn α und β nicht negativ:

$$\int_0^\infty \partial x \int_\alpha^\beta e^{-ax} \sin(bx) \partial a = \int_\alpha^\beta \partial a \int_0^\infty e^{-ax} \sin(bx) \partial x.$$

Da aber

$$\int_\alpha^\beta e^{-ax} \sin(bx) \partial a = \frac{-e^{-\beta x} + e^{-\alpha x}}{x} \sin(bx), \quad \int_0^\infty e^{-ax} \sin(bx) \partial x = \frac{b}{a^2 + b^2},$$

so ist also

$$\int_0^\infty \frac{-e^{-\beta x} + e^{-\alpha x}}{x} \sin(bx)\, \partial x = \int_\alpha^\beta \frac{b}{a^2 + b^2} \partial a = \text{arc}\left(\text{tg} = \frac{\beta}{b}\right) - \text{arc}\left(\text{tg} = \frac{\alpha}{b}\right). \quad \text{(c)}$$

Setzt man hier etwa $\alpha = 0$, $\beta = \infty$, so ist für $b > 0$

$$\int_0^\infty \frac{\sin(bx)\, \partial x}{x} = \frac{\pi}{2}, \quad \text{(d)}$$

ein wichtiges Resultat, das wir sogleich noch in anderer Weise nachweisen wollen. Man hat

$$\int_0^\infty \partial x \int_0^\infty e^{-xy} \sin x \partial y = \int_0^\infty \partial y \int_0^\infty e^{-xy} \sin x \partial x.$$

Aber $\int e^{-xy} \sin x \partial y = \sin x \int e^{-xy} \partial y = -\frac{\sin x \,.\, e^{-xy}}{x}$,

also da für $y = \infty$ und positivem x : $e^{-xy} = 0$:

$$\int_0^\infty e^{-xy} \sin x \partial y = \frac{\sin x}{x}.$$

Ferner (§. 50): $\int_0^\infty e^{-xy} \sin x \partial x = \frac{1}{1+y^2}$;

demnach ist $\int_0^\infty \frac{\sin x \partial x}{x} = \int_0^\infty \frac{\partial y}{1+y^2} = \frac{\pi}{2}$.

Setzt man hier bz für x, also $\frac{\partial x}{\partial z} = b$, so sind für $b > 0$ die Gränzen von z; 0 und ∞, mithin

$$\int_0^\infty \frac{\sin x \partial x}{x} = b \int_0^\infty \frac{\sin(bz) \partial z}{bz} = \int_0^\infty \frac{\sin bz}{z} \partial z,$$

d. h. es ist auch (§. 49):

$$\int_0 \frac{\sin(bx)}{x} \partial x = \frac{\pi}{2}, \; b > 0. \quad \text{(d)}$$

Hat man das bestimmte Doppelintegral

$$\int_a^b \partial x \int_{a'}^{b'} f(x, y, \alpha, \beta) \partial y = V$$

und sind a und b Funktionen von α; a', b' von β, so ist natürlich eben so

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha} = \int_a^b \partial x \int_{a'}^{b'} \frac{\partial f(x, y, \alpha, \beta)}{\partial \alpha} \partial y + \int_{a'}^{b'} f(b, y, \alpha \beta) \partial y \cdot \frac{\partial b}{\partial \alpha} - \int_{a'}^{b'} f(a, y, \alpha, \beta) \partial y \cdot \frac{\partial a}{\partial \alpha},$$

$$\frac{\partial V}{\partial \beta} = \int_a^b \partial x \int_{a'}^{b'} \frac{\partial f(x, y, \alpha, \beta)}{\partial \beta} \partial y + \int_a^b f(x, b', \alpha, \beta) \partial x \cdot \frac{\partial b'}{\partial \beta} - \int_a^b f(x, a', \alpha, \beta) \partial x \cdot \frac{\partial a'}{\partial \beta},$$

wie man leicht aus der Gleichung (c') in §. 51 ableiten wird, die hier gibt:

$$V = F(b, b', \alpha, \beta) - F(b, a', \alpha, \beta) - F(a, b', \alpha, \beta) + F(a, a', \alpha, \beta),$$

wenn
$$\int \partial x \int f(x, y, \alpha, \beta) \partial y = F(x, y, \alpha, \beta).$$

Wir fügen hier noch folgende Beispiele bei:

1) Wie in §. 58, II sey in der dortigen Fig. 43 0 der Mittelpunkt einer Kugel, deren Halbmesser aber $= OC$ sey; man soll nun $OA = m$, $OB = n$ so bestimmen, dass das Stück Körper, das zwischen dem über OACB stehenden Parallelepiped und der Kugelfläche liegt, ein Maximum sey.

Nach §. 60 ist der Inhalt $= \int_0^m \partial x \int_0^n \partial y \int_0^z \partial z$, $x^2 + y^2 + z^2 = r$, $m^2 + n^2 = r^2$,

so dass also

$$v = \int_0^m \partial x \int_0^n \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}\, \partial y \text{ ein Maximum, und } m^2 + n^2 = r^2.$$

Also ist nach §. 32:

$$\frac{\partial [v - \lambda(m^2 + n^2 - r^2)]}{\partial m} = 0, \quad \frac{\partial [v - \lambda(m^2 + n^2 - r^2)]}{\partial n} = 0$$

zu setzen. Aber

$$\frac{\partial v}{\partial m} = \int_0^n \sqrt{r^2 - m^2 - y^2}\, \partial y = \frac{r^2 - m^2}{2} \cdot \frac{\pi}{2}, \quad \frac{\partial v}{\partial n} = \int_0^m \sqrt{r^2 - x^2 - n^2}\, \partial x = \frac{r^2 - n^2}{2} \frac{\pi}{2},$$

so dass
$$\frac{r^2 - m^2}{2} \frac{\pi}{2} - 2\lambda m = 0, \quad \frac{r^2 - n^2}{2} \frac{\pi}{2} - 2\lambda n = 0, \quad m^2 + n^2 = r^2.$$

Daraus
$$m = n = r\sqrt{\tfrac{1}{2}}.$$

Da wenn n Funktion von m:

$$\frac{\partial^2}{\partial m^2}(v) = \frac{\partial^2 v}{\partial m^2} + 2 \frac{\partial^2 v}{\partial m \, \partial n} \frac{\partial n}{\partial m} + \frac{\partial^2 v}{\partial n^2} \left(\frac{\partial n}{\partial m}\right)^2 + \frac{\partial v}{\partial n} \frac{\partial^2 n}{\partial m^2} \text{ (§. 12)},$$

und hier

$$\frac{\partial^2 v}{\partial m^2} = -m \frac{\pi}{2}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial m \, \partial n} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial n^2} = -n \frac{\pi}{2}, \quad \frac{\partial v}{\partial n} = \frac{m^2}{2} \frac{\pi}{2}, \quad \frac{\partial n}{\partial m} = -\frac{m}{n}, \quad \frac{\partial^2 n}{\partial m^2} = -\frac{r^2}{n^3},$$

so ist für $m = n = r\sqrt{\frac{1}{2}}$:

$$\frac{\partial^2}{\partial m^2}(v) = -\frac{3 r \pi}{\sqrt{8}},$$

also negativ, so dass v ein Maximum ist (§. 24).

2) Wenn man zwei Räder konstruiren soll so, dass ihre Winkelgeschwindigkeiten in einem gegebenen, sonst aber beliebig veränderlichen oder konstanten Verhältnisse stehen, und es ist a die Entfernung der beiden, parallel angenommenen Drehaxen, also auch die Entfernung der zwei Punkte, in denen diese Axen die Ebene

treffen, in der die beiden Räder liegen, so kommt die Aufgabe offenbar darauf hinaus, in dieser gemeinschaftlichen Ebene zwei Kurven zu konstruiren, die, indem sie sich um die Axen (Punkte in der gemeinschaftlichen Ebene) drehen, sich auf einander abwickeln, wobei die Geschwindigkeit der Bewegung das gegebene Verhältniss hat. Nehmen wir für jede Kurve den Drehpunkt als Anfangspunkt von Polarkoordinaten, die Linie a als Polaraxe, so seyen r, ω die Polarkoordinaten für einen Punkt der ersten Kurve; r_1, ω_1 für den entsprechenden Punkt der zweiten, wobei wir das Wort entsprechend so verstehen, dass in diesen zwei Punkten zu einer gewissen Zeit die Kurven sich berühren werden. Da die Kurven sich auf einander abwickeln sollen, so muss (§. 55):

$$\int_0^{\omega}\sqrt{\left(\frac{\partial r}{\partial \omega}\right)^2+r^2}\,\partial\omega=\int_0^{\omega_1}\sqrt{\left(\frac{\partial r_1}{\partial \omega_1}\right)^2+r_1^2}\,\partial\omega_1$$

seyn. Da ferner die Drehung möglich seyn soll, so muss $r+r_1=a$ seyn, und da endlich das Verhältniss der Winkelgeschwindigkeiten ein gegebenes ist, so ist ω_1 als Funktion von ω bekannt, d. h. $\omega_1=f(\omega)$. Die erste Gleichung gibt durch Differentiation nach ω

$$\sqrt{\left(\frac{\partial r}{\partial \omega}\right)^2+r^2}=\sqrt{\left(\frac{\partial r_1}{\partial \omega_1}\right)^2+r_1^2}\,\frac{\partial\omega_1}{\partial\omega},\ \text{d. h. da}\ \frac{\partial r}{\partial\omega}+\frac{\partial r_1}{\partial\omega_1}\frac{\partial\omega_1}{\partial\omega}=0,\ \left(\frac{\partial r}{\partial \omega}\right)^2$$
$$=\left(\frac{\partial r_1}{\partial \omega_1}\right)^2\left(\frac{\partial \omega_1}{\partial \omega}\right)^2:r^2=r_1^2\left(\frac{\partial \omega_1}{\partial \omega}\right)^2.$$

Da wir annehmen, es wachsen ω und ω_1 zu gleicher Zeit, d. h. es sey $\frac{\partial\omega_1}{\partial\omega}>0$, so hat man also

$$r=r_1\frac{\partial\omega_1}{\partial\omega},\ r+r_1=a,\ \omega_1=f(\omega),$$

aus welchen drei Gleichungen r als Funktion von ω, und r_1 als Funktion von ω_1 darzustellen ist. Nun ist $r_1=a-r$, $\frac{\partial\omega_1}{\partial\omega}=f'(\omega)$, so dass also

$$r=(a-r)f'(\omega),\ \text{woraus}\ r\ \text{als Funktion von}\ \omega.$$

Dann gibt, wenn man $r=a-r_1$ setzt und ω durch ω_1 mittelst $\omega_1=f(\omega)$ ersetzt, dieselbe Gleichung auch die Gleichung zwischen r_1 und ω_1. Wir wollen etwa annehmen, es sey $\omega_1=\alpha\omega+\beta\sin m\omega$, so ist $f'(\omega)=\alpha+m\beta\cos m\omega$, so dass die Gleichung der ersten Kurve ist:

$$r=a.\frac{\alpha+m\beta\cos m\omega}{1+\alpha+m\beta\cos m\omega};$$

die der zweiten findet sich durch Elimination von ω aus

$$r_1=\frac{a}{1+\alpha+m\beta\cos m\omega},\ \omega_1=\alpha\omega+\beta\sin m\omega.$$

Anm. Die Konstanten α, β, m kann man in verschiedener Weise bestimmen. Gesetzt etwa man verlange, dass das eine Rad den vierten Theil seiner Bewegung in derselben Zeit zurücklege wie das andere, so muss für $\omega=\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi, 2\pi$ auch ω_1 dieselben Werthe haben, d. h. es muss $\frac{\pi}{2}=\alpha.\frac{\pi}{2}+\beta\sin\frac{m\pi}{2}$, $\pi=\alpha\pi+\beta\sin m\pi$, $\frac{3}{2}\pi=\alpha\frac{3}{2}\pi+\beta\sin\frac{3m\pi}{2}$, $2\pi=\alpha 2\pi+\beta\sin 2m\pi$ seyn. Verlangt man dazu noch, dass für $\omega=\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi, 2\pi$ auch r denselben Werth annimmt, wie für $\omega=0$, so muss seyn:

$$\frac{\alpha+m\beta}{1+\alpha+m\beta}=\frac{a+m\beta\cos\frac{m\pi}{2}}{1+\alpha+m\beta\cos\frac{m\pi}{2}}=\frac{\alpha+m\beta\cos m\pi}{1+\alpha+m\beta\cos m\pi}=\frac{\alpha+m\beta\cos\frac{3}{2}m\pi}{1+\alpha+m\beta\cos\frac{3}{2}m\pi}=\frac{\alpha+m\beta\cos 2m\pi}{1+\alpha+m\beta\cos 2m\pi}.$$

Diesen Bedingungen genügt $m=4$, $\alpha=1$, während β noch unbestimmt bleibt. — Die Grösse Gr. $\frac{\Delta\omega_1}{\Delta\omega}$, d. h. $\frac{\partial\omega_1}{\partial\omega}$ drückt in jedem Zeitmoment das Verhältniss der Winkelgeschwindigkeiten aus. Gesetzt nun, es sey vorgeschrieben, es sollen der grösste und der kleinste Werth desselben (d. h. $\alpha+4\beta$ und $\alpha-4\beta$) zu einander sich wie 1 zu γ verhalten, so ist $1-4\beta=\gamma(1+4\beta)$, $\beta=\frac{1}{4}\frac{1-\gamma}{1+\gamma}$, so dass also für unsern Fall:

$$r=a\,.\frac{1+\frac{1-\gamma}{1+\gamma}\cos 4\omega}{2+\frac{1-\gamma}{1+\gamma}\cos 4\omega};\; r_1=\frac{a}{2+\frac{1-\gamma}{1+\gamma}\cos 4\omega},\; \omega_1=\omega+\frac{1-\gamma}{1+\gamma}\frac{\sin 4\omega}{4}.$$

Die beiden Räder bewegen sich dann so, dass wenn das erste gleichförmig gedreht wird, das zweite bald etwas langsamer, bald etwas schneller sich dreht, als das erste.

§. 62.

Es sey das Integral $\int_0^\infty e^{-x^2}\partial x$ zur Bestimmung vorgelegt. Setzt man den Werth desselben $=k$, so ist auch $\int_0^\infty e^{-y^2}\partial y=k$ (§. 49) und $\int_0^\infty e^{-x^2}\partial x \int_0^\infty e^{-y^2}\partial y=k^2$. Aber es ist

$$\int_0^\infty\partial x\int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}\partial y=\int_0^\infty\partial x\int_0^\infty e^{-x^2}e^{-y^2}\partial y=\int_0^\infty e^{-x^2}\partial x\int_0^\infty e^{-y^2}\partial y,$$

so dass also
$$\int_0^\infty\partial x\int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}\partial y=k^2.$$

Setzt man hier (§. 52, I, 1) $x=u$, $y=uv$, so ist $x^2+y^2=u^2(1+v^2)$, und also

$$k^2=\int_0^\infty\partial u\int_0^\infty u e^{-u^2(1+v^2)}\partial v=\int_0^\infty\partial v\int_0^\infty u e^{-u^2(1+v^2)}\partial u.$$

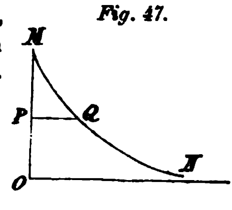
Nun ist aber $\int u e^{-u^2(1+v^2)}\partial u=-\frac{e^{-u^2(1+v^2)}}{2(1+v^2)}$, $\int_0^\infty u e^{-u^2(1+v^2)}\partial u=\frac{1}{2(1+v^2)}$,

also
$$k^2=\int_0^\infty\frac{\partial v}{2(1+v^2)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4},\; k=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

so dass also
$$\int_0^\infty e^{-x^2}\partial x=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}. \qquad (a)$$

Man kann dasselbe Resultat auf einen hievon ganz verschiedenen Wege erhalten. Stelle nämlich MN (Fig. 47) eine Kurve vor, deren Gleichung $z=e^{-x^2}$ ist,

und man lasse diese Kurve sich um die Axe der z drehen, so wird sie eine krumme Oberfläche beschreiben, deren Gleichung ist $z = e^{-(x^2+y^2)}$, und der Inhalt des von dieser Oberfläche und der Ebene der xy eingeschlossenen Körpers ist (§. 60):



$$\int_{-\infty}^{+\infty}\partial x \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}\partial y,$$

da, wie man leicht sieht, die Gränzen nach x und y sind $-\infty$ und $+\infty$. Sey nun aber $OP = z$, $PQ = r$, so ist $z = e^{-r^2}$, und wenn die Kurve sich um die Axe der z dreht, so beschreibt PQ einen Kreis vom Halbmesser r, dessen Fläche also $= r^2\pi$ ist. Denken wir uns nun in der Entfernung Δz von PQ einen zweiten mit dem eben betrachteten parallelen Kreis, so wird, wenn Δz unendlich klein ist, zwischen beiden ein Stück Körper liegen, dessen Inhalt $= r^2\pi\,\Delta z$, oder da $r^2 = -l(z)$, so wird der Inhalt $= -\pi\, l(z)\,\Delta z$ seyn. Der niedersts Werth von z ist 0, der höchste $= 1$ (für $x = 0$); demnach ist der fragliche Körper, den wir zu berechnen haben, auch gleich (§. 57):

$$\pi\int_0^1(-l(z)\partial z) = -\pi\int_0^1 l(z)\partial z = -\pi[-1] \text{ (§. 36, I und §. 22, III)} = \pi,$$

so dass also
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\partial x \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}\partial x = \pi.$$

Aber

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\partial x \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}\partial y = 2\int_{-\infty}^{+\infty}\partial x \int_0^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\partial y = 4\int_0^{\infty}\partial x \int_0^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\partial y \text{ (§. 49, VII)},$$

mithin
$$\int_0^{\infty}\partial x \int_0^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\partial y = \frac{\pi}{4},\quad k^2 = \frac{\pi}{4},\quad k = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}. \text{ (§. 52, 3.)}$$

Setzt man in (a) $x = az$, $a > 0$, so ist $\frac{\partial x}{\partial z} = a$ und die Gränzen von z sind ebenfalls 0 und ∞, so dass (§. 49, IV):

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}\partial x = a\int_0^{\infty} e^{-a^2z^2}\partial z,$$

und also
$$\int_0^{\infty} e^{-a^2x^2}\partial x = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}. \qquad (b)$$

Setzt man hier $\sqrt{a}$ für a, so ist $\int_0^{\infty} e^{-ax^2}\partial x = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}}$, woraus nun, indem man n mal nach a differenzirt:

$$\int_0^{\infty} x^{2n} e^{-ax^2}\partial x = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\frac{\partial^n a^{-\frac{1}{2}}}{\partial a^n} = (-1)^n\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdots\frac{2n-1}{2}a^{-\frac{1}{2}-n} =$$
$$\frac{1.3.5..(2n-1)\sqrt{\pi}}{2^{n+1}\sqrt{a^{2n+1}}},\ a > 0. \qquad (b')$$

Will man $\int_0^\infty x^{2n+1}e^{-ax^2}\partial x$ erhalten, so ist, da $\int x e^{-ax^2}\partial x = -\frac{1}{2a}e^{-ax^2}$, nach §. 36, (41):

$$\int x^{2n+1}e^{-ax^2}\partial x = \int x^{2n}xe^{-ax^2}\partial x = -\frac{x^{2n}e^{-ax^2}}{2a} + \frac{2n}{2a}\int x^{2n-1}e^{-ax^2}\partial x,$$

und da für $x = \infty$: $x^{2n}e^{-ax^2} = \frac{x^{2n}}{e^{ax^2}} = 0$ (§. 22, II), so ist (§. 49, V):

$$\int_0^\infty x^{2n+1}e^{-ax^2}\partial x = \frac{n}{a}\int_0^\infty x^{2n-1}e^{-ax^2}\partial x;$$

eben so nun:

$$\int_0^\infty x^{2n-1}e^{-ax^2}\partial x = \frac{n-1}{a}\int_0^\infty x^{2n-3}e^{-ax^2}\partial x, \ldots, \int_0^\infty x^3 e^{-ax^2}\partial x = \frac{1}{a}\int_0^\infty xe^{-ax^2}\partial x,$$

$$\int_0^\infty xe^{-ax^2}\partial x = \frac{1}{2a},$$

also
$$\int_0^\infty x^{2n+1}e^{-ax^2}\partial x = \frac{n(n-1)\ldots 1}{2a^{n+1}}. \qquad (c)$$

Das Integral $\int_0^1 \frac{\partial x}{\sqrt{-l(x)}}$ kommt unmittelbar auf das obige zurück. Man setze nämlich $x = e^{-z^2}$, $l(x) = -z^2$, $\frac{\partial x}{\partial z} = -2ze^{-z^2}$, so ist

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{-l(x)}} = -2\int \frac{ze^{-z^2}\partial z}{\sqrt{z^2}} = -2\int e^{-z^2}\partial z,$$

und da die Gränzen von z sind ∞ und 0, so ist

$$\int_0^1 \frac{\partial x}{\sqrt{-l(x)}} = -2\int_\infty^0 e^{-z^2}\partial z = 2\int_0^\infty e^{-z^2}\partial z = 2.\frac{1}{2}\sqrt{\pi} = \sqrt{\pi}. \qquad (d)$$

Will man weiter den Werth von $\int_0^\infty e^{-a^2x^2}\cos(bx)\partial x$ ermitteln, so setze man denselben $= u$ und hat nun (§. 61):

$$\frac{\partial u}{\partial b} = -\int_0^\infty e^{-a^2x^2}x\sin(bx)\partial x.$$

Aber es ist (§. 36), da $\int xe^{-a^2x^2}\partial x = -\frac{1}{2a^2}e^{-a^2x^2}$:

$$\int xe^{-a^2x^2}\sin(bx)\partial x = -\frac{\sin(bx)}{2a^2}e^{-a^2x^2} + \frac{b}{2a^2}\int e^{-a^2x^2}\cos(bx)\partial x,$$

$$\int_0^\infty xe^{-a^2x^2}\sin(bx)\partial x = \frac{b}{2a^2}\int_0^\infty e^{-a^2x^2}\cos(bx)\partial x = \frac{bu}{2a^2},$$

d. h. es ist

$$\frac{\partial u}{\partial b} = -\frac{bu}{2a^2}, \quad \frac{1}{u}\frac{\partial u}{\partial b} = -\frac{b}{2a^2}.$$

Daraus folgt, dass

$$\int \frac{1}{u}\frac{\partial u}{\partial b}\partial b = -\int \frac{b\,\partial b}{2a^2} + C, \text{ d. h. } l(u) = -\frac{b^2}{4a^2} + C;$$

worin C nicht von b abhängt. Also da $l(u) = -\frac{b^2}{4a^2} + C$, so ist $u = e^{-\frac{b^2}{4a^2}+C} = e^C e^{-\frac{b^2}{4a^2}}$, d. h. da e^C eine willkürliche Konstante $= C'$, es ist

$$\int_0^\infty e^{-a^2x^2}\cos(bx)\,\partial x = C' e^{-\frac{b^2}{4a^2}},$$

worin C' nicht von b abhängt. Setzt man also hier $b = 0$, so ändert sich natürlich C' nicht, und man hat:

$$\int_0^\infty e^{-a^2x^2}\partial x = C', \text{ d. h. } C' = \frac{\sqrt{\pi}}{2a},$$

und endlich

$$\int_0^\infty e^{-a^2x^2}\cos(bx)\,\partial x = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} e^{-\frac{b^2}{4a^2}}, \; a > 0. \qquad (e)$$

Dass man durch Differentiation nach a oder b hieraus neue Formeln bilden kann, ist klar.

Das Doppelintegral $\int_0^\infty \partial x \int_0^{\sqrt{1+x^2}} \frac{e^{-(a^2x^2+b^2y^2)}\partial y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$ lässt sich leicht hiedurch auf ein einfaches zurückführen. Man hat nämlich nach §. 51:

$$\int_0^\infty \partial x \int_0^{\sqrt{1+x^2}} \frac{e^{-(a^2x^2+b^2y^2)}\partial y}{\sqrt{1+x^2+y^2}} = \int_0^\infty \partial x \sqrt{1+x^2} \int_0^1 \frac{e^{-(a^2x^2+b^2y^2+b^2x^2y^2)}\partial y}{\sqrt{1+x^2+(1+x^2)y^2}} =$$

$$\int_0^\infty \partial x \int_0^1 \frac{e^{-(a^2x^2+b^2y^2+b^2x^2y^2)}\partial y}{\sqrt{1+y^2}} = \int_0^1 \frac{e^{-b^2y^2}\partial y}{\sqrt{1+y^2}} \int_0^\infty e^{-(a^2x^2+b^2x^2y^2)}\partial x =$$

$$\int_0^1 \frac{e^{-b^2y^2}\partial y}{\sqrt{1+y^2}} \int_0^\infty e^{-(a^2+b^2y^2)x^2}\partial x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\int_0^1 \frac{e^{-b^2y^2}\partial y}{\sqrt{1+y^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2y^2}},$$

so dass

$$\int_0^\infty \partial x \int_0^{\sqrt{1+x^2}} \frac{e^{-(a^2x^2+b^2y^2)}\partial y}{\sqrt{1+x^2+y^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\int_0^1 \frac{e^{-b^2x^2}\partial x}{\sqrt{(1+x^2)(a^2+b^2x^2)}}. \qquad (f)$$

§. 63.

I. Sey das Doppelintegral

$$\int_0^1 \frac{\partial x}{1+x^2}\int_0^x \frac{\partial y}{1+y},$$

das offenbar $= \int_0^1 \frac{l(1+x)}{1+x^2}\partial x$ ist, vorgelegt, so hat man nach §. 51 (g'):

$$\int_0^1 \frac{\partial x}{1+x^2}\int_0^x \frac{\partial y}{1+y} = \int_0^1 \frac{x\,\partial x}{1+x^2}\int_0^1 \frac{\partial y}{1+xy} = \int_0^1 \partial y \int_0^1 \frac{x\,\partial x}{(1+xy)(1+x^2)}.$$

Aber $$\int \frac{x\,\partial x}{(1+xy)(1+x^2)} = -\frac{y}{1+y^2}\int\frac{\partial x}{1+xy} + \frac{1}{1+y^2}\int\frac{x\,\partial x}{1+x^2} + \frac{y}{1+y^2}\int\frac{\partial x}{1+x^2}$$
$$= -\frac{l(1+xy)}{1+y^2} + \frac{l(1+x^2)}{2(1+y^2)} + \frac{y}{1+y^2}\operatorname{arc}(tg = x),$$

$$\int_0^1 \frac{x\,\partial x}{(1+xy)(1+x^2)} = -\frac{l(1+y)}{1+y^2} + \frac{l(2)}{2(1+y^2)} + \frac{y}{1+y^2}\frac{\pi}{4}.$$

Demnach $$\int_0^1 \frac{\partial x}{1+x^2}\int_0^x \frac{\partial y}{1+y} = -\int_0^1 \frac{l(1+y)}{1+y^2}\partial y + \frac{1}{2}l(2)\int_0^1\frac{\partial y}{1+y^2} + \frac{\pi}{4}\int_0^1\frac{y\,\partial y}{1+y^2},$$

d. h. $$\int_0^1 \frac{l(1+x)}{1+x^2}\partial x = -\int_0^1 \frac{l(1+x)}{1+x^2}\partial x + \frac{\pi}{8}l(2) + \frac{\pi}{8}l(2),$$

woraus $$\int_0^1 \frac{l(1+x)}{1+x^2}\partial x = \frac{\pi}{8}l(2). \qquad (a)$$

Setzt man hier $x = tg\,z$, so sind die Gränzen von z : 0 und $\frac{\pi}{4}$ und man hat

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{l(1+tg\,z)}{1+tg^2 z}\frac{\partial z}{\cos^2 z} = \frac{\pi}{8}l(2),$$

d. h. $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} l(1+tg\,z)\,\partial z = \frac{\pi}{8}l(2). \qquad (a')$$

II. Nach §. 62 ist

$$a\int_0^\infty e^{-a^2x^2}\cos(2bx)\,\partial x = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,e^{-\left(\frac{b}{a}\right)^2},\ \int_0^\infty a e^{-a^2}\partial a\int_0^\infty e^{-a^2x^2}\cos(2bx)\,\partial x =$$
$$\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\int_0^\infty e^{-a^2-\left(\frac{b}{a}\right)^2}\partial a.$$

Aber die erste Seite ist auch

$$\int_0^\infty \cos(2bx)\,\partial x\int_0^\infty a\,e^{-(1+x^2)a^2}\partial a = \frac{1}{2}\int_0^\infty\frac{\cos(2bx)}{1+x^2}\partial x \ (\S.\ 62),$$

während die zweite gibt

$$\int_0^\infty e^{-a^2-\left(\frac{b}{a}\right)^2}\partial a = e^{2b}\int_0^\infty e^{-\left(a+\frac{b}{a}\right)^2}\partial a = e^{2b}\int_0^\infty e^{-\sqrt{4b+a^2}}\partial a,$$

indem nach §. 50, VIII immer $\int_0 f\left(x+\frac{b}{x}\right)\partial x = \int_0 f(\sqrt{4b+x^2})\,\partial x$ ist, wenn $b > 0$. Demnach ist die zweite Seite

$$\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,e^{2b}\int_0^\infty e^{-(4b+a^2)}\partial a = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,e^{-2b}\int_0^\infty e^{-a^2}\partial a = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,.\,e^{-2b}\,.\,\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,(\S.62) = \frac{\pi}{4}e^{-2b},$$

so dass $$\int_0^\infty \frac{\cos(2bx)}{1+x^2}\partial x = \frac{\pi}{2}e^{-2b}, \int_0^\infty \frac{\cos bx}{1+x^2}\partial x = \frac{\pi}{2}e^{-b}, \; b>0. \qquad \text{(b)}$$

Uebrigens gilt dies auch noch für $b=0$. Durch Differentiation nach b folgt hieraus:

$$\int_0^\infty \frac{x \sin bx}{1+x^2}\partial x = \frac{\pi}{2}e^{-b}. \; b>0. \qquad \text{(c)}$$

Setzt man $x=\frac{z}{a}$, wo $a>0$, so sind die Gränzen von z wieder 0 und ∞, und man hat:

$$\int_0^\infty \frac{\cos\frac{b}{a}z}{1+\frac{z^2}{a^2}}\frac{\partial z}{a} = \frac{\pi}{2}e^{-b},$$

d. h. wenn man ab für b setzt:

$$\int_0^\infty \frac{\cos bx}{a^2+x^2}\partial x = \frac{\pi}{2a}e^{-ab}, \; \int_0^\infty \frac{x \sin bx}{a^2+x^2} = \frac{\pi}{2}e^{-ab}, \; a>0, \; b>0. \qquad \text{(d)}$$

Eine weitere Differentiation nach b ist nicht mehr gestattet, da dieselbe geben würde:

$$\int_0^\infty \frac{x^2 \cos bx}{a^2+x^2}\partial x = -\frac{a\pi}{2}e^{-ab},$$

und da $$\int_0^\infty \frac{x^2\cos bx}{a^2+x^2}\partial x = \int_0^\infty \cos bx\,\partial x - a^2\int_0^\infty \frac{\cos bx}{a^2+x^2}\partial x = \int_0^\infty \cos bx\,\partial x - \frac{a\pi}{2}e^{-ab},$$

so müsste $\int_0^\infty \cos bx\,\partial x = 0$ seyn, was nicht zulässig ist. Denn $\int \cos bx\,\partial x = \frac{\sin bx}{b}$ ist zwar 0 für $x=0$, aber für $x=\infty$ ist dieser Werth unbestimmbar. (Vergl. §. 98.)

Dagegen werden Differentiationen nach a ganz unbedingt gestattet seyn. So wäre

$$\int_0^\infty \frac{\cos bx}{(a^2+x^2)^2}\partial x = \frac{\pi}{4a^3}e^{-ab}\left(b+\frac{1}{a}\right), \int_0^\infty \frac{\cos bx}{(a^2+x^2)^3}\partial x = \frac{\pi}{16a^3}e^{-ab}\left(\frac{3}{a^2}+\frac{3b}{a}+b^2\right), \qquad \text{(e)}$$

und durch Integration nach b:

$$\int_0^\infty \frac{\sin bx}{x(a^2+x^2)}\partial x = \frac{\pi}{2a}\int_0^b e^{-ab}\partial b = \frac{\pi}{2a^2}(1-e^{-ab}). \qquad \text{(f)}$$

Das Integral $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(a\,\mathrm{tg}\,x)\,\partial x$$

kommt auf Obiges zurück, wenn man $\mathrm{tg}\,x = z$, also $\frac{1}{\cos^2 x}\frac{\partial x}{\partial z}=1$, $\frac{\partial x}{\partial z}=\frac{1}{1+z^2}$ setzt, wo dann die Gränzen von z sind 0 und ∞, so dass

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(a\,tg\,x)\partial x=\int_0^\infty\frac{\cos az}{1+z^2}\partial z=\frac{\pi}{2}e^{-a},\ a>0. \qquad (g)$$

III. Wir wollen das Doppelintegral

$$\int_0^1\partial z\int_0^\pi\frac{(az+\cos x)\partial x}{1+2az\cos x+a^2z^2}=\int_0^\pi\partial x\int_0^1\frac{(az+\cos x)\partial z}{1+2az\cos x+a^2z^2},\ 1>a>0,$$

in ähnlicher Weise behandeln, wie in Nr. I geschehen. Da

$$\int\frac{(az+\cos x)\partial z}{1+2az\cos x+a^2z^2}=\frac{1}{2a}l(1+2az\cos x+a^2z^2),$$

so ist
$$\int_0^\pi\partial x\int_0^1\frac{(az+\cos x)\partial z}{1+2az\cos x+a^2z^2}=\frac{1}{2a}\int_0^\pi l(1+2a\cos x+a^2)\partial x.$$

Nun ist aber

$$\int\frac{(az+\cos x)\partial x}{1+2az\cos x+a^2z^2}=\frac{1}{2az}\int\left(1-\frac{1}{1+2az\cos x+a^2z^2}\right)\partial x+$$
$$\frac{1}{2}az\int\frac{\partial x}{1+2az\cos x+a^2z^2}=\frac{x}{2az}+\frac{a^2z^2-1}{2az}\int\frac{\partial x}{1+2az\cos x+a^2z^2}=\frac{x}{2az}-$$
$$\frac{a^2z^2-1}{az\sqrt{(1+a^2z^2)^2-4a^2z^2}}\,arc\left(tg=cotg\frac{x}{2}\sqrt{\frac{1+a^2z^2+2az}{1+a^2z^2-2az}}\right)\ (\S.\ 44,\ III).$$

Da aber $a<1$ und $z\overline{\overline{<}}1$, so ist $(1+a^2z^2)^2-4a^2z^2=(1-a^2z^2)^2$, $\sqrt{(1+a^2z^2)^2-4a^2z^2}=1-a^2z^2$, und eben so $\sqrt{\frac{1+a^2z^2+2az}{1+a^2z^2-2az}}=\sqrt{\frac{(1+az)^2}{(1-az)^2}}=\frac{1+az}{1-az}$, so dass also

$$\int\frac{(az+\cos x)\partial x}{1+2az\cos x+a^2z^2}=\frac{x}{2az}+\frac{1}{az}arc\left(tg=cotg\frac{x}{2}\cdot\frac{1+az}{1-az}\right),$$

und
$$\int_0^\pi\frac{(az+\cos x)\partial x}{1+2az\cos x+a^2z^2}=\frac{\pi}{2az}-\frac{\pi}{2az}=0.$$

mithin
$$\int_0^1\partial z\int_0^\pi\frac{(az+\cos x)\partial x}{1+2az\cos x+a^2z^2}=0,$$

d. h. endlich
$$\int_0^\pi l(1+2a\cos x+a^2)\partial x=0,\ 1>a>0, \qquad (h)$$

Ist $a>1$, so setze man $a=\frac{1}{\alpha}$, wo $\alpha<1$, und man hat:

$$\int_0^\pi l(1+2a\cos x+a^2)\partial x=\int_0^\pi l\left(1+\frac{2\cos x}{\alpha}+\frac{1}{\alpha^2}\right)\partial x=\int_0^\pi l\left(\frac{1+2\alpha\cos x+\alpha^2}{\alpha^2}\right)\partial x=$$
$$\int_0^\pi l(1+2\alpha\cos x+\alpha^2)\partial x-l(\alpha^2)\int_0^\pi\partial x,$$

d. h. da $\int_0^\pi l(1+2\alpha\cos x+\alpha^2)\partial x=0$, $l(\alpha^2)=-l(a^2)$:

$$\int_0^\pi l(1+2a\cos x+a^2)\partial x=\pi l(a^2),\ a>1. \qquad (h')$$

Setzt man $\pi-x$ für x, so ergibt sich leicht

$$\int_0^\pi l(1-2a\cos x+a^2)\partial x=0,\ \int_0^\pi l(1-2a\cos x+a^2)\partial x=\pi l(a^2), \qquad (h'')$$
$$1>a>0, \qquad\qquad 1<a<\infty.$$

Für $a=1$ geben alle Formeln:

$$\int_0^\pi l(1+\cos x)\partial x=-\pi l(2)=\int_0^\pi l(1-\cos x)\partial x, \qquad (i)$$

d. h. da $1+\cos x=2\cos^2\frac{x}{2}$, $1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}$, wenn man $2x$ für x setzt:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} l(\cos x)\partial x=\int_0^{\frac{\pi}{2}} l(\sin x)\partial x=-\frac{\pi}{2}l(2). \qquad (i')$$

IV. Es ist, immer unter der Voraussetzung $1>az>0$:

$$\int_0^\pi \frac{\partial x}{1+2az\cos x+a^2z^2}=\frac{\pi}{1-a^2z^2},$$

also
$$\int_0^\pi \partial x\int_0^1 \frac{az\,\partial z}{1+2az\cos x+a^2z^2}=a\pi\int_0^1\frac{z\,\partial z}{1-a^2z^2}=-\frac{\pi}{2a}l(1-a^2),\ a\gtrless\begin{matrix}0\\1\end{matrix}, \qquad (k)$$

mithin da (III)
$$\int_0^\pi \partial x\int_0^1 \frac{(az+\cos x)\partial z}{1+2az\cos x+a^2z^2}=0,$$

so ist
$$\int_0^\pi \partial x\int_0^1 \frac{\cos x\,\partial z}{1+2az\cos x+a^2z^2}=\int_0^1 \partial z\int_0^\pi \frac{\cos x\,\partial x}{1+2az\cos x+a^2z^2}=\frac{\pi}{2a}l(1-a^2).$$

Aber es ist, da $\sin x>0$:

$$\int\frac{\partial z}{1+2az\cos x+a^2z^2}=\frac{1}{a\sin x}\operatorname{arc}\left(tg=\frac{az+\cos x}{\sin x}\right)+C,$$

$$\int_0^1\frac{\partial z}{1+2az\cos x+a^2z^2}=\frac{1}{a\sin x}\left[\operatorname{arc}\left(tg=\frac{a+\cos x}{\sin x}\right)-\operatorname{arc}(tg=\operatorname{cotg}x)\right],$$

und da $\operatorname{arc}(tg=\operatorname{cotg}x)=\frac{\pi}{2}-x$:

$$\int_0^1\frac{\partial z}{1+2az\cos x+a^2z^2}=\frac{1}{a\sin x}\left[\operatorname{arc}\left(tg=\frac{a+\cos x}{\sin x}\right)-\frac{\pi}{2}+x\right]$$
$$=\frac{1}{a\sin x}\left[x-\operatorname{arc}\left(tg=\frac{\sin x}{a+\cos x}\right)\right],$$

so dass
$$\int_0^\pi\frac{\cos x}{\sin x}\left[x-\operatorname{arc}\left(tg=\frac{\sin x}{a+\cos x}\right)\right]\partial x=\frac{\pi}{2}l(1-a^2). \qquad (k')$$

Nun ist aber (§. 36, Formel (41)):

$$\int\frac{\cos x}{\sin x}\left[x-\operatorname{arc}\left(tg=\frac{\sin x}{a+\cos x}\right)\right]\partial x=\left[x-\operatorname{arc}\left(tg=\frac{\sin x}{a+\cos x}\right)\right]l(\sin x)-$$

$$\frac{\alpha+m\beta}{1+\alpha+m\beta}=\frac{a+m\beta\cos\frac{m\pi}{2}}{1+\alpha+m\beta\cos\frac{m\pi}{2}}=\frac{\alpha+m\beta\cos m\pi}{1+\alpha+m\beta\cos m\pi}=\frac{\alpha+m\beta\cos\frac{3}{2}m\pi}{1+\alpha+m\beta\cos\frac{3}{2}m\pi}=\frac{\alpha+m\beta\cos 2m\pi}{1+\alpha+m\beta\cos 2m\pi}.$$

Diesen Bedingungen genügt $m=4$, $\alpha=1$, während β noch unbestimmt bleibt. — Die Grösse Gr. $\frac{\varDelta\omega_1}{\varDelta\omega}$, d. h. $\frac{\partial\omega_1}{\partial\omega}$ drückt in jedem Zeitmoment das Verhältniss der Winkelgeschwindigkeiten aus. Gesetzt nun, es sey vorgeschrieben, es sollen der grösste und der kleinste Werth desselben (d. h. $\alpha+4\beta$ und $\alpha-4\beta$) zu einander sich wie 1 zu γ verhalten, so ist $1-4\beta=\gamma(1+4\beta)$, $\beta=\frac{1}{4}\frac{1-\gamma}{1+\gamma}$, so dass also für unsern Fall:

$$r=a\,.\frac{1+\frac{1-\gamma}{1+\gamma}\cos 4\omega}{2+\frac{1-\gamma}{1+\gamma}\cos 4\omega};\ r_1=\frac{a}{2+\frac{1-\gamma}{1+\gamma}\cos 4\omega},\ \omega_1=\omega+\frac{1-\gamma}{1+\gamma}\frac{\sin 4\omega}{4}.$$

Die beiden Räder bewegen sich dann so, dass wenn das erste gleichförmig gedreht wird, das zweite bald etwas langsamer, bald etwas schneller sich dreht, als das erste.

§. 62.

Es sey das Integral $\int_0^\infty e^{-x^2}\partial x$ zur Bestimmung vorgelegt. Setzt man den Werth desselben $=k$, so ist auch $\int_0^\infty e^{-y^2}\partial y=k$ (§. 49) und $\int_0^\infty e^{-x^2}\partial x\int_0^\infty e^{-y^2}\partial y=k^2$. Aber es ist

$$\int_0^\infty\partial x\int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}\partial y=\int_0^\infty\partial x\int_0^\infty e^{-x^2}e^{-y^2}\partial y=\int_0^\infty e^{-x^2}\partial x\int_0^\infty e^{-y^2}\partial y,$$

so dass also

$$\int_0^\infty\partial x\int_0^\infty e^{-(x^2+y^2)}\partial y=k^2.$$

Setzt man hier (§. 52, I, 1) $x=u$, $y=uv$, so ist $x^2+y^2=u^2(1+v^2)$, und also

$$k^2=\int_0^\infty\partial u\int_0^\infty u e^{-u^2(1+v^2)}\partial v=\int_0^\infty\partial v\int_0^\infty u e^{-u^2(1+v^2)}\partial u.$$

Nun ist aber $\int u e^{-u^2(1+v^2)}\partial u=-\frac{e^{-u^2(1+v^2)}}{2(1+v^2)}$, $\int_0^\infty u e^{-u^2(1+v^2)}\partial u=\frac{1}{2(1+v^2)}$,

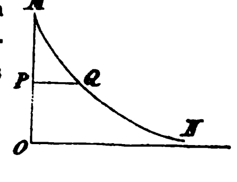
also
$$k^2=\int_0^\infty\frac{\partial v}{2(1+v^2)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4},\ k=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

so dass also
$$\int_0^\infty e^{-x^2}\partial x=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}. \qquad \text{(a)}$$

Man kann dasselbe Resultat auf einen hievon ganz verschiedenen Wege erhalten. Stelle nämlich MN (Fig. 47) eine Kurve vor, deren Gleichung $z=e^{-x^2}$ ist,

und man lasse diese Kurve sich um die Axe der z drehen, so wird sie eine krumme Oberfläche beschreiben, deren Gleichung ist $z = e^{-(x^2+y^2)}$, und der Inhalt des von dieser Oberfläche und der Ebene der xy eingeschlossenen Körpers ist (§. 60):

Fig. 47.



$$\int_{-\infty}^{+\infty}\partial x \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}\partial y,$$

da, wie man leicht sieht, die Gränzen nach x und y sind $-\infty$ und $+\infty$. Sey nun aber $OP = z$, $PQ = r$, so ist $z = e^{-r^2}$, und wenn die Kurve sich um die Axe der z dreht, so beschreibt PQ einen Kreis vom Halbmesser r, dessen Fläche also $= r^2\pi$ ist. Denken wir uns nun in der Entfernung Δz von PQ einen zweiten mit dem eben betrachteten parallelen Kreis, so wird, wenn Δz unendlich klein ist, zwischen beiden ein Stück Körper liegen, dessen Inhalt $= r^2\pi\,\Delta z$, oder da $r^2 = -l(z)$, so wird der Inhalt $= -\pi\, l(z)\,\Delta z$ seyn. Der niederste Werth von z ist 0, der höchste $= 1$ (für $x = 0$); demnach ist der fragliche Körper, den wir zu berechnen haben, auch gleich (§. 57):

$$\pi\int_0^1(-l(z)\partial z) = -\pi\int_0^1 l(z)\partial z = -\pi[-1] \text{ (§. 36, I und §. 22, III)} = \pi,$$

so dass also
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\partial x\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}\partial x = \pi.$$

Aber
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\partial x\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}\partial y = 2\int_{-\infty}^{+\infty}\partial x\int_0^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\partial y = 4\int_0^{\infty}\partial x\int_0^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\partial y \text{ (§. 49, VII)},$$

mithin
$$\int_0^{\infty}\partial x\int_0^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\partial y = \frac{\pi}{4},\quad k^2 = \frac{\pi}{4},\quad k = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}. \quad \text{(§. 52, 3.)}$$

Setzt man in (a) $x = az$, $a > 0$, so ist $\frac{\partial x}{\partial z} = a$ und die Gränzen von z sind ebenfalls 0 und ∞, so dass (§. 49, IV):

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}\partial x = a\int_0^{\infty} e^{-a^2z^2}\partial z,$$

und also
$$\int_0^{\infty} e^{-a^2x^2}\partial x = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}. \qquad \text{(b)}$$

Setzt man hier $\sqrt{a}$ für a, so ist $\int_0^{\infty} e^{-ax^2}\partial x = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}}$, woraus nun, indem man n mal nach a differenzirt:

$$\int_0^{\infty} x^{2n} e^{-ax^2}\partial x = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\frac{\partial^n a^{-\frac{1}{2}}}{\partial a^n} = (-1)^n\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdots\frac{2n-1}{2}a^{-\frac{1}{2}-n} =$$
$$\frac{1.3.5..(2n-1)\sqrt{\pi}}{2^{n+1}\sqrt{a^{2n+1}}},\ a > 0. \qquad \text{(b')}$$

Will man $\int_0^\infty x^{2n+1}e^{-ax^2}\partial x$ erhalten, so ist, da $\int x e^{-ax^2}\partial x = -\frac{1}{2a}e^{-ax^2}$, nach §. 36, (41):

$$\int x^{2n+1}e^{-ax^2}\partial x = \int x^{2n} x e^{-ax^2}\partial x = -\frac{x^{2n}e^{-ax^2}}{2a} + \frac{2n}{2a}\int x^{2n-1}e^{-ax^2}\partial x,$$

und da für $x=\infty$: $x^{2n}e^{-ax^2} = \frac{x^{2n}}{e^{ax^2}} = 0$ (§. 22, II), so ist (§. 49, V):

$$\int_0^\infty x^{2n+1}e^{-ax^2}\partial x = \frac{n}{a}\int_0^\infty x^{2n-1}e^{-ax^2}\partial x;$$

eben so nun:

$$\int_0^\infty x^{2n-1}e^{-ax^2}\partial x = \frac{n-1}{a}\int_0^\infty x^{2n-3}e^{-ax^2}\partial x, \ldots, \int_0^\infty x^3 e^{-ax^2}\partial x = \frac{1}{a}\int_0^\infty x e^{-ax^2}\partial x,$$

$$\int_0^\infty x e^{-ax^2}\partial x = \frac{1}{2a},$$

also

$$\int_0^\infty x^{2n+1}e^{-ax^2}\partial x = \frac{n(n-1)\ldots 1}{2a^{n+1}}. \qquad (c)$$

Das Integral $\int_0^1 \frac{\partial x}{\sqrt{-l(x)}}$ kommt unmittelbar auf das obige zurück. Man setze nämlich $x = e^{-z^2}$, $l(x) = -z^2$, $\frac{\partial x}{\partial z} = -2ze^{-z^2}$, so ist

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{-l(x)}} = -2\int \frac{z e^{-z^2}\partial z}{\sqrt{z^2}} = -2\int e^{-z^2}\partial z,$$

und da die Gränzen von z sind ∞ und 0, so ist

$$\int_0^1 \frac{\partial x}{\sqrt{-l(x)}} = -2\int_\infty^0 e^{-z^2}\partial z = 2\int_0^\infty e^{-z^2}\partial z = 2.\frac{1}{2}\sqrt{\pi} = \sqrt{\pi}. \qquad (d)$$

Will man weiter den Werth von $\int_0^\infty e^{-a^2x^2}\cos(bx)\partial x$ ermitteln, so setze man denselben $=u$ und hat nun (§. 61):

$$\frac{\partial u}{\partial b} = -\int_0^\infty e^{-a^2x^2} x\sin(bx)\partial x.$$

Aber es ist (§. 36), da $\int x e^{-a^2x^2}\partial x = -\frac{1}{2a^2}e^{-a^2x^2}$:

$$\int x e^{-a^2x^2}\sin(bx)\partial x = -\frac{\sin(bx)}{2a^2}e^{-a^2x^2} + \frac{b}{2a^2}\int e^{-a^2x^2}\cos(bx)\partial x,$$

$$\int_0^\infty x e^{-a^2x^2}\sin(bx)\partial x = \frac{b}{2a^2}\int_0^\infty e^{-a^2x^2}\cos(bx)\partial x = \frac{bu}{2a^2},$$

d. h. es ist

$$\frac{\partial u}{\partial b} = -\frac{bu}{2a^2}, \quad \frac{1}{u}\frac{\partial u}{\partial b} = -\frac{b}{2a^2}.$$

Daraus folgt, dass

$$\int \frac{1}{u}\frac{\partial u}{\partial b}\partial b = -\int \frac{b\,\partial b}{2a^2} + C, \text{ d. h. } l(u) = -\frac{b^2}{4a^2} + C;$$

worin C nicht von b abhängt. Also da $l(u) = -\frac{b^2}{4a^2} + C$, so ist $u = e^{-\frac{b^2}{4a^2}+C} = e^C e^{-\frac{b^2}{4a^2}}$, d. h. da e^C eine willkürliche Konstante $= C'$, es ist

$$\int_0^\infty e^{-a^2x^2}\cos(bx)\,\partial x = C' e^{-\frac{b^2}{4a^2}},$$

worin C' nicht von b abhängt. Setzt man also hier $b = 0$, so ändert sich natürlich C' nicht, und man hat:

$$\int_0^\infty e^{-a^2x^2}\partial x = C', \text{ d. h. } C' = \frac{\sqrt{\pi}}{2a},$$

und endlich

$$\int_0^\infty e^{-a^2x^2}\cos(bx)\,\partial x = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} e^{-\frac{b^2}{4a^2}}, \; a>0. \qquad (e)$$

Dass man durch Differentiation nach a oder b hieraus neue Formeln bilden kann, ist klar.

Das Doppelintegral $\int_0^\infty \partial x \int_0^{\sqrt{1+x^2}} \frac{e^{-(a^2x^2+b^2y^2)}\partial y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}$ lässt sich leicht hiedurch auf ein einfaches zurückführen. Man hat nämlich nach §. 51:

$$\int_0^\infty \partial x \int_0^{\sqrt{1+x^2}} \frac{e^{-(a^2x^2+b^2y^2)}\partial y}{\sqrt{1+x^2+y^2}} = \int_0^\infty \partial x \sqrt{1+x^2} \int_0^1 \frac{e^{-(a^2x^2+b^2y^2+b^2x^2y^2)}\partial y}{\sqrt{1+x^2+(1+x^2)y^2}} =$$

$$\int_0^\infty \partial x \int_0^1 \frac{e^{-(a^2x^2+b^2y^2+b^2x^2y^2)}\partial y}{\sqrt{1+y^2}} = \int_0^1 \frac{e^{-b^2y^2}\partial y}{\sqrt{1+y^2}} \int_0^\infty e^{-(a^2x^2+b^2x^2y^2)}\partial x =$$

$$\int_0^1 \frac{e^{-b^2y^2}\partial y}{\sqrt{1+y^2}} \int_0^\infty e^{-(a^2+b^2y^2)x^2}\partial x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\int_0^1 \frac{e^{-b^2y^2}\partial y}{\sqrt{1+y^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2y^2}}.$$

so dass
$$\int_0^\infty \partial x \int_0^{\sqrt{1+x^2}} \frac{e^{-(a^2x^2+b^2y^2)}\partial y}{\sqrt{1+x^2+y^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\int_0^1 \frac{e^{-b^2x^2}\partial x}{\sqrt{(1+x^2)(a^2+b^2x^2)}}. \qquad (f)$$

§. 63.

I. Sey das Doppelintegral

$$\int_0^1 \frac{\partial x}{1+x^2}\int_0^x \frac{\partial y}{1+y},$$

das offenbar $= \int_0^1 \frac{l(1+x)}{1+x^2}\partial x$ ist, vorgelegt, so hat man nach §. 51 (g'):

$$\int_0^1\frac{\partial x}{1+x^2}\int_0^x\frac{\partial y}{1+y}=\int_0^1\frac{x\,\partial x}{1+x^2}\int_0^1\frac{\partial y}{1+xy}=\int_0^1\partial y\int_0^1\frac{x\,\partial x}{(1+xy)(1+x^2)}.$$

Aber
$$\int\frac{x\,\partial x}{(1+xy)(1+x^2)}=-\frac{y}{1+y^2}\int\frac{\partial x}{1+xy}+\frac{1}{1+y^2}\int\frac{x\,\partial x}{1+x^2}+\frac{y}{1+y^2}\int\frac{\partial x}{1+x^2}$$
$$=-\frac{l(1+xy)}{1+y^2}+\frac{l(1+x^2)}{2(1+y^2)}+\frac{y}{1+y^2}\,\text{arc}(tg=x),$$

$$\int_0^1\frac{x\,\partial x}{(1+xy)(1+x^2)}=-\frac{l(1+y)}{1+y^2}+\frac{l(2)}{2(1+y^2)}+\frac{y}{1+y^2}\,\frac{\pi}{4}.$$

Demnach
$$\int_0^1\frac{\partial x}{1+x^2}\int_0^x\frac{\partial y}{1+y}=-\int_0^1\frac{l(1+y)}{1+y^2}\partial y+\frac{1}{2}l(2)\int_0^1\frac{\partial y}{1+y^2}+\frac{\pi}{4}\int_0^1\frac{y\,\partial y}{1+y^2},$$

d. h.
$$\int_0^1\frac{l(1+x)}{1+x^2}\partial x=-\int_0^1\frac{l(1+x)}{1+x^2}\partial x+\frac{\pi}{8}l(2)+\frac{\pi}{8}l(2),$$

woraus
$$\int_0^1\frac{l(1+x)}{1+x^2}\partial x=\frac{\pi}{8}l(2). \qquad \text{(a)}$$

Setzt man hier $x=tg\,z$, so sind die Gränzen von z: 0 und $\frac{\pi}{4}$ und man hat

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{l(1+tg\,z)}{1+tg^2z}\,\frac{\partial z}{\cos^2 z}=\frac{\pi}{8}l(2),$$

d. h.
$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}l(1+tg\,z)\,\partial z=\frac{\pi}{8}l(2). \qquad \text{(a')}$$

II. Nach §. 62 ist

$$a\int_0^\infty e^{-a^2x^2}\cos(2bx)\,\partial x=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,e^{-\left(\frac{b}{a}\right)^2},\quad \int_0^\infty a e^{-a^2}\partial a\int_0^\infty e^{-a^2x^2}\cos(2bx)\,\partial x=$$
$$\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\int_0^\infty e^{-a^2-\left(\frac{b}{a}\right)^2}\partial a.$$

Aber die erste Seite ist auch

$$\int_0^\infty\cos(2bx)\,\partial x\int_0^\infty a\,e^{-(1+x^2)a^2}\partial a=\frac{1}{2}\int_0^\infty\frac{\cos(2bx)}{1+x^2}\partial x \text{ (§. 62)},$$

während die zweite gibt

$$\int_0^\infty e^{-a^2-\left(\frac{b}{a}\right)^2}\partial a=e^{2b}\int_0^\infty e^{-\left(a+\frac{b}{a}\right)^2}\partial a=e^{2b}\int_0^\infty e^{-\sqrt{4b+a^2}}\,\partial a,$$

indem nach §. 50, VIII immer $\int_0^\infty f\left(x+\frac{b}{x}\right)\partial x=\int_0^\infty f\left(\sqrt{4b+x^2}\right)\partial x$ ist, wenn $b>0$. Demnach ist die zweite Seite

$$\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,e^{2b}\int_0^\infty e^{-(4b+a^2)}\partial a=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,e^{-2b}\int_0^\infty e^{-a^2}\partial a=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,.\,e^{-2b}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\text{ (§. 62)}=\frac{\pi}{4}e^{-2b},$$

so dass $$\int_0^\infty \frac{\cos(2bx)}{1+x^2}\partial x = \frac{\pi}{2}e^{-2b}, \int_0^\infty \frac{\cos bx}{1+x^2}\partial x = \frac{\pi}{2}e^{-b},\ b>0. \quad (b)$$

Uebrigens gilt dies auch noch für $b=0$. Durch Differentiation nach b folgt hieraus:

$$\int_0^\infty \frac{x\sin bx}{1+x^2}\partial x = \frac{\pi}{2}e^{-b}.\ b>0. \quad (c)$$

Setzt man $x=\frac{z}{a}$, wo $a>0$, so sind die Gränzen von z wieder 0 und ∞, und man hat:

$$\int_0^\infty \frac{\cos\frac{b}{a}z}{1+\frac{z^2}{a^2}}\frac{\partial z}{a} = \frac{\pi}{2}e^{-b},$$

d. h. wenn man ab für b setzt:

$$\int_0^\infty \frac{\cos bx}{a^2+x^2}\partial x = \frac{\pi}{2a}e^{-ab},\ \int_0^\infty \frac{x\sin bx}{a^2+x^2} = \frac{\pi}{2}e^{-ab},\ a>0,\ b>0. \quad (d)$$

Eine weitere Differentiation nach b ist nicht mehr gestattet, da dieselbe geben würde:

$$\int_0^\infty \frac{x^2\cos bx}{a^2+x^2}\partial x = -\frac{a\pi}{2}e^{-ab},$$

und da $$\int_0^\infty \frac{x^2\cos bx}{a^2+x^2}\partial x = \int_0^\infty \cos bx\,\partial x - a^2\int_0^\infty \frac{\cos bx}{a^2+x^2}\partial x = \int_0^\infty \cos bx\,\partial x - \frac{a\pi}{2}e^{-ab},$$

so müsste $\int_0^\infty \cos bx\,\partial x = 0$ seyn, was nicht zulässig ist. Denn $\int \cos bx\,\partial x = \frac{\sin bx}{b}$ ist zwar 0 für $x=0$, aber für $x=\infty$ ist dieser Werth unbestimmbar. (Vergl. §. 98.)

Dagegen werden Differentiationen nach a ganz unbedingt gestattet seyn. So wäre

$$\int_0^\infty \frac{\cos bx}{(a^2+x^2)^2}\partial x = \frac{\pi}{4a^2}e^{-ab}\left(b+\frac{1}{a}\right), \int_0^\infty \frac{\cos bx}{(a^2+x^2)^3}\partial x = \frac{\pi}{16a^3}e^{-ab}\left(\frac{3}{a^2}+\frac{3b}{a}+b^2\right), \quad (e)$$

und durch Integration nach b:

$$\int_0^\infty \frac{\sin bx}{x(a^2+x^2)}\partial x = \frac{\pi}{2a}\int_0^b e^{-ab}\partial b = \frac{\pi}{2a^2}(1-e^{-ab}). \quad (f)$$

Das Integral $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(a\,tg\,x)\,\partial x$$

kommt auf Obiges zurück, wenn man $tg\,x=z$, also $\frac{1}{\cos^2 x}\frac{\partial x}{\partial z}=1$, $\frac{\partial x}{\partial z}=\frac{1}{1+z^2}$ setzt, wo dann die Gränzen von z sind 0 und ∞, so dass

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(a\,\mathrm{tg}\,x)\partial x=\int_0^\infty\frac{\cos az}{1+z^2}\partial z=\frac{\pi}{2}e^{-a},\ a>0. \qquad (g)$$

III. Wir wollen das Doppelintegral

$$\int_0^1\partial z\int_0^\pi\frac{(az+\cos x)\partial x}{1+2az\cos x+a^2z^2}=\int_0^\pi\partial x\int_0^1\frac{(az+\cos x)\partial z}{1+2az\cos x+a^2z^2},\ 1>a>0,$$

in ähnlicher Weise behandeln, wie in Nr. I geschehen. Da

$$\int\frac{(az+\cos x)\partial z}{1+2az\cos x+a^2z^2}=\frac{1}{2a}l(1+2az\cos x+a^2z^2),$$

so ist
$$\int_0^\pi\partial x\int_0^1\frac{(az+\cos x)\partial z}{1+2az\cos x+a^2z^2}=\frac{1}{2a}\int_0^\pi l(1+2a\cos x+a^2)\partial x.$$

Nun ist aber

$$\int\frac{(az+\cos x)\partial x}{1+2az\cos x+a^2z^2}=\frac{1}{2az}\int\left(1-\frac{1}{1+2az\cos x+a^2z^2}\right)\partial x+$$
$$\frac{1}{2}az\int\frac{\partial x}{1+2az\cos x+a^2z^2}=\frac{x}{2az}+\frac{a^2z^2-1}{2az}\int\frac{\partial x}{1+2az\cos x+a^2z^2}=\frac{x}{2az}-$$
$$\frac{a^2z^2-1}{az\sqrt{(1+a^2z^2)^2-4a^2z^2}}\operatorname{arc}\left(\mathrm{tg}=\mathrm{cotg}\frac{x}{2}\sqrt{\frac{1+a^2z^2+2az}{1+a^2z^2-2az}}\right)\ (§.\ 44,\ III).$$

Da aber $a<1$ und $z\overline{\overline{<}}1$, so ist $(1+a^2z^2)^2-4a^2z^2=(1-a^2z^2)^2$, $\sqrt{(1+a^2z^2)^2-4a^2z^2}=1-a^2z^2$, und eben so $\sqrt{\frac{1+a^2z^2+2az}{1+a^2z^2-2az}}=\sqrt{\frac{(1+az)^2}{(1-az)^2}}=\frac{1+az}{1-az}$, so dass also

$$\int\frac{(az+\cos x)\partial x}{1+2az\cos x+a^2z^2}=\frac{x}{2az}+\frac{1}{az}\operatorname{arc}\left(\mathrm{tg}=\mathrm{cotg}\frac{x}{2}\cdot\frac{1+az}{1-az}\right),$$

und
$$\int_0^\pi\frac{(az+\cos x)\partial x}{1+2az\cos x+a^2z^2}=\frac{\pi}{2az}-\frac{\pi}{2az}=0,$$

mithin
$$\int_0^1\partial z\int_0^\pi\frac{(az+\cos x)\partial x}{1+2az\cos x+a^2z^2}=0,$$

d. h. endlich
$$\int_0^\pi l(1+2a\cos x+a^2)\partial x=0,\ 1>a>0. \qquad (h)$$

Ist $a>1$, so setze man $a=\frac{1}{\alpha}$, wo $\alpha<1$, und man hat:

$$\int_0^\pi l(1+2a\cos x+a^2)\partial x=\int_0^\pi l\left(1+\frac{2\cos x}{\alpha}+\frac{1}{\alpha^2}\right)\partial x=\int_0^\pi l\left(\frac{1+2\alpha\cos x+\alpha^2}{\alpha^2}\right)\partial x=$$
$$\int_0^\pi l(1+2\alpha\cos x+\alpha^2)\partial x-l(\alpha^2)\int_0^\pi\partial x,$$

d. h. da $\int_0^\pi l(1+2\alpha\cos x+\alpha^2)\partial x=0$, $l(\alpha^2)=-l(a^2)$:

$$\int_0^\pi l(1+2a\cos x+a^2)\partial x=\pi l(a^2),\quad a>1. \qquad (h')$$

Setzt man $\pi-x$ für x, so ergibt sich leicht

$$\int_0^\pi l(1-2a\cos x+a^2)\partial x=0,\quad \int_0^\pi l(1-2a\cos x+a^2)\partial x=\pi l(a^2), \qquad (h'')$$
$$1>a>0, \qquad\qquad 1<a<\infty.$$

Für $a=1$ geben alle Formeln:

$$\int_0^\pi l(1+\cos x)\partial x=-\pi l(2)=\int_0^\pi l(1-\cos x)\partial x, \qquad (i)$$

d. h. da $1+\cos x=2\cos^2\frac{x}{2}$, $1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}$, wenn man $2x$ für x setzt:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} l(\cos x)\partial x=\int_0^{\frac{\pi}{2}} l(\sin x)\partial x=-\frac{\pi}{2}l(2). \qquad (i')$$

IV. Es ist, immer unter der Voraussetzung $1>az>0$:

$$\int_0^\pi\frac{\partial x}{1+2az\cos x+a^2z^2}=\frac{\pi}{1-a^2z^2},$$

also
$$\int_0^\pi\partial x\int_0^1\frac{az\,\partial z}{1+2az\cos x+a^2z^2}=a\pi\int_0^1\frac{z\,\partial z}{1-a^2z^2}=-\frac{\pi}{2a}l(1-a^2),\ a\begin{smallmatrix}>0\\<1\end{smallmatrix}, \qquad (k)$$

mithin da (III)
$$\int_0^\pi\partial x\int_0^1\frac{(az+\cos x)\partial z}{1+2az\cos x+a^2z^2}=0,$$

so ist
$$\int_0^\pi\partial x\int_0^1\frac{\cos x\,\partial z}{1+2az\cos x+a^2z^2}=\int_0^1\partial z\int_0^\pi\frac{\cos x\,\partial x}{1+2az\cos x+a^2z^2}=\frac{\pi}{2a}l(1-a^2).$$

Aber es ist, da $\sin x>0$:

$$\int\frac{\partial z}{1+2az\cos x+a^2z^2}=\frac{1}{a\sin x}\operatorname{arc}\left(tg=\frac{az+\cos x}{\sin x}\right)+C,$$

$$\int_0^1\frac{\partial z}{1+2az\cos x+a^2z^2}=\frac{1}{a\sin x}\left[\operatorname{arc}\left(tg=\frac{a+\cos x}{\sin x}\right)-\operatorname{arc}(tg=\operatorname{cotg}x)\right],$$

und da $\operatorname{arc}(tg=\operatorname{cotg}x)=\frac{\pi}{2}-x$:

$$\int_0^1\frac{\partial z}{1+2az\cos x+a^2z^2}=\frac{1}{a\sin x}\left[\operatorname{arc}\left(tg=\frac{a+\cos x}{\sin x}\right)-\frac{\pi}{2}+x\right]$$
$$=\frac{1}{a\sin x}\left[x-\operatorname{arc}\left(tg=\frac{\sin x}{a+\cos x}\right)\right],$$

so dass
$$\int_0^\pi\frac{\cos x}{\sin x}\left[x-\operatorname{arc}\left(tg=\frac{\sin x}{a+\cos x}\right)\right]\partial x=\frac{\pi}{2}l(1-a^2). \qquad (k')$$

Nun ist aber (§. 36, Formel (41)):

$$\int\frac{\cos x}{\sin x}\left[x-\operatorname{arc}\left(tg=\frac{\sin x}{a+\cos x}\right)\right]\partial x=\left[x-\operatorname{arc}\left(tg=\frac{\sin x}{a+\cos x}\right)\right]l(\sin x)-$$

$$\int l(\sin x)\left[1-\frac{a\cos x-1}{a^2-2a\cos x+1}\right]dx=\left[x-\text{arc}\left(tg=\frac{\sin x}{a-\cos x}\right)\right]l(\sin x)-$$
$$\int\frac{(a^2-a\cos x)\,l(\sin x)}{1-2a\cos x+a^2}dx.$$

Lässt man aber x stetig von 0 bis π verlaufen (vergl. § 50), so wird, da $a<1$ die Grösse $\text{arc}\left(tg=\frac{\sin x}{a-\cos x}\right)$ von 0 an stetig wachsen bis $\frac{\pi}{2}$ (wenn $\cos x=a$), dann aber plötzlich zu $-\frac{\pi}{2}$ springen, was nicht seyn darf, so dass man für $x=\pi$ nicht $\text{arc}\left(tg=\frac{\sin x}{a-\cos x}\right)=0$, sondern $=\pi$ setzen muss. Daraus folgt, dass für $x=0$ und $x=\pi$ die Grösse $x-\text{arc}\left(tg=\frac{\sin x}{a-\cos x}\right)$ Null seyn wird, so dass, wie leicht zu sehen:

$$\int_0^\pi\frac{\cos x}{\sin x}\left[x-\text{arc}\left(tg=\frac{\sin x}{a-\cos x}\right)\right]dx=-\int_0^\pi\frac{(a^2-a\cos x)\,l(\sin x)\,dx}{1-2a\cos x+a^2}.$$

Aber
$$2\frac{a^2-a\cos x}{1-2a\cos x+a^2}=1-\frac{1-a^2}{1-2a\cos x+a^2},$$

also
$$\int_0^\pi\frac{(a^2-a\cos x)\,l(\sin x)\,dx}{1-2a\cos x+a^2}=\frac{1}{2}\int_0^\pi l(\sin x)dx-\frac{1-a^2}{2}\int_0^\pi\frac{l(\sin x)dx}{1-2a\cos x+a^2},$$

mithin da $\int_0^\pi l(\sin x)dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}l(\sin x)dx=-\pi l(2)$:

$$\frac{\pi}{2}l(1-a^2)=\frac{\pi}{2}l\,2-\frac{1-a^2}{2}\int_0^\pi\frac{l\sin x}{1-2a\cos x+a^2}dx.$$

$$\int_0^\pi\frac{l(\sin x)dx}{1-2a\cos x+a^2}=\frac{\pi}{1-a^2}l\left(\frac{1-a^2}{2}\right),\quad a\begin{matrix}>0\\<1\end{matrix} \qquad \text{[illegible]}$$

Ist $a>1$, so erhält man wie oben:

$$\int_0^\pi\frac{l(\sin x)dx}{1-2a\cos x+a^2}=\frac{\pi}{a^2-1}l\left(\frac{a^2-1}{2a^2}\right) \qquad \text{[illegible]}$$

Setzt man $\pi-x$ für x, so ergibt sich noch

$$\int_0^\pi\frac{l(\sin x)dx}{1-2a\cos x+a^2}=\frac{\pi}{1-a^2}l\left(\frac{1-a^2}{2}\right),\quad \int_0^\pi\frac{l(\sin x)dx}{1-2a\cos x+a^2}=\frac{\pi}{a^2-1}l\left(\frac{a^2-1}{2a^2}\right) \qquad (m)$$

$1>a>0$ $\qquad\qquad$ $1<a<\infty$.

Anm. Man hätte die Betrachtung wegen der Stetigkeit nicht nöthig gehabt, wenn man die Formel (k) sofort in folgender Form geschrieben hätte:

$$\int_0^\pi\frac{\cos x}{\sin x}\left[\text{arc}\left(tg=\frac{a-\cos x}{\sin x}\right)-\text{arc}(tg=\text{cotg}\,x)\right]dx=\frac{\pi}{2}l(1-a^2),$$

wo dann $\text{arc}\left(tg=\frac{a-\cos x}{\sin x}\right)$ und $\text{arc}(tg=\text{cotg}\,x)$ stetig von $\frac{\pi}{2}$ zu $-\frac{\pi}{2}$ verlaufen.

Alsdann ist

$$\int\frac{\cos x}{\sin x}\left[\operatorname{arc}\left(tg=\frac{a+\cos x}{\sin x}\right)-\operatorname{arc}(tg=\operatorname{cotg} x)\right]\partial x=l(\sin x)\left[\operatorname{arc}\left(tg=\frac{a+\cos x}{\sin x}\right)-\right.$$
$$\left.\operatorname{arc}(tg=\operatorname{cotg} x)\right]-\int l(\sin x)\left[\frac{-1-a\cos x}{1+2a\cos x+a^2}+1\right]\partial x=l(\sin x)\left[\operatorname{arc}\left(tg=\frac{a+\cos x}{\sin x}\right)\right.$$
$$\left.-\operatorname{arc}(tg=\operatorname{cotg} x)\right]-\int\frac{a(a+\cos x)l(\sin x)\partial x}{1+2a\cos x+a^2},$$

woraus dann dasselbe Resultat sich ergibt.

V. Die Resultate in II. setzen uns in Stand, eine ziemlich allgemeine Formel zur Ermittlung des Werthes bestimmter Integrale aufzustellen. Gesetzt nämlich, es sey

$$F(x)=a+bx+cx^2+dx^3+\ldots\ldots,$$

wobei die Reihe endlich oder unendlich seyn kann, wenn sie nur im letztern Falle konvergent ist (wo dann $F(x)$ ihre Summe ist, vergl. §. 16), so ist, wenn man $x=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ setzt:

$$F[r(\cos\varphi+i\sin\varphi)]=a+br\cos\varphi+cr^2\cos 2\varphi+\ldots+i(br\sin\varphi+cr^2\sin 2\varphi\ldots),$$

so dass wenn

$$F[r(\cos\varphi+i\sin\varphi)]=F_1(r,\varphi)+iF_2(r,\varphi), \qquad \text{(n)}$$

wo $F_1(r,\varphi)$, $F_2(r,\varphi)$ zwei reelle Funktionen von r und φ sind, man hat

$$F_1(r,\varphi)=a+br\cos\varphi+cr^2\cos 2\varphi+\ldots,\ F_2(r,\varphi)=br\sin\varphi+cr^2\sin 2\varphi+\ldots,$$

natürlich $a, b, c, \ldots\ldots$ reell vorausgesetzt. Gemäss den Formeln (d) folgt hieraus:

$$\int_0^\infty\frac{F_1(r,\varphi)\partial\varphi}{\alpha^2+\varphi^2}=a\int_0^\infty\frac{\partial\varphi}{\alpha^2+\varphi^2}+br\int_0^\infty\frac{\cos\varphi\,\partial\varphi}{\alpha^2+\varphi^2}+\ldots=\frac{\pi}{2\alpha}\left[a+bre^{-\alpha}+cr^2e^{-2\alpha}+\ldots\right],$$

$$\int_0^\infty\frac{\varphi F_2(r,\varphi)}{\alpha^2+\varphi^2}\partial\varphi=br\int_0^\infty\frac{\varphi\sin\varphi}{\alpha^2+\varphi^2}\partial\varphi+\ldots=\frac{\pi}{2}\left[bre^{-\alpha}+cr^2e^{-2\alpha}+\ldots\right].$$

Nun ist aber $a+bre^{-\alpha}+cr^2e^{-2\alpha}+\ldots=F(re^{-\alpha})$, $a=F(0)$, so dass demnach

$$\int_0^\infty\frac{F_1(r,\varphi)\partial\varphi}{\alpha^2+\varphi^2}=\frac{\pi}{2\alpha}F(re^{-\alpha}),\ \int_0^\infty\frac{\varphi F_2(r,\varphi)\partial\varphi}{\alpha^2+\varphi^2}=\frac{\pi}{2}\left[F(re^{-\alpha})-F(0)\right]. \qquad \text{(n')}$$

Setzt man in der letzten Formel (n') $\alpha=0$, und subtrahirt dann das Resultat von derselben, so erhält man noch:

$$\int_0^\infty\frac{F_2(r,\varphi)\partial\varphi}{\varphi}=\frac{\pi}{2}\left[F(r)-F(0)\right],\ \int_0^\infty\frac{F_2(r,\varphi)}{\varphi(\alpha^2+\varphi^2)}\partial\varphi=\frac{\pi}{2\alpha^2}\left[F(r)-F(re^{-\alpha})\right]. \qquad \text{(n'')}$$

Es ist sehr leicht, hiernach Integrale zu ermitteln. So ist für $F(x)=l(1+x)$: $F[r(\cos\varphi+i\sin\varphi)]=l[1+r\cos\varphi+ir\sin\varphi]$, so dass wenn $1+r\cos\varphi+ir\sin\varphi=k+hi=m(\cos n+i\sin n)$, man hat $m^2=k^2+h^2=1+2r\cos\varphi+r^2$, $\cos n=\frac{k}{m}=\frac{1+r\cos\varphi}{m}$, $\sin n=\frac{r\sin\varphi}{m}$, folglich $1+r\cos\varphi+ir\sin\varphi=me^{ni}$, $l(1+r\cos\varphi+ir\sin\varphi)=l(m)+ni$, und mithin

$$\int_0^\infty\frac{l(1+2r\cos\varphi+r^2)}{\alpha^2+\varphi^2}\partial\varphi=\frac{\pi}{\alpha}l(1+re^{-\alpha}),\ \alpha\geqq 0,$$

wo $r^2<1$ seyn muss (damit $1+2r\cos\varphi+r^2$ nicht Null werde), was schon daraus folgt, dass sonst $l(1+x)$ nicht in eine unendliche Reihe entwickelt werden kann, von welcher Voraussetzung wir doch ausgiengen.

Setzt man $r=\frac{1}{\varrho}$, so muss $\varrho>1$ seyn, und man hat

$$\int_0^\infty \frac{l\left[\frac{\varrho^2+2\varrho\cos\varphi+1}{\varrho^2}\right]}{\alpha^2+\varphi^2}\partial\varphi=\frac{\pi}{\alpha}l(1+\frac{1}{\varrho}e^{-\alpha})=\int_0^\infty\frac{l(\varrho^2+2\varrho\cos\varphi+1)}{\alpha^2+\varphi^2}\partial\varphi-$$

$$2l(\varrho)\int_0^\infty\frac{\partial\varphi}{\alpha^2+\varphi^2}=\int\frac{l(\varrho^2+2\varrho\cos\varphi+1)}{\alpha^2+\varrho^2}\partial\varphi-l(\varrho)\frac{\pi}{\alpha},$$

also $$\int_0^\infty\frac{l(\varrho^2+2\varrho\cos\varphi+1)}{\alpha^2+\varphi^2}\partial\varphi=\frac{\pi}{\alpha}l(\varrho)+\frac{\pi}{\alpha}l\left(1+\frac{1}{\varrho}e^{-\alpha}\right)=\frac{\pi}{\alpha}l(\varrho+e^{-\alpha}),\quad \varrho>1.$$

§. 64.

Bereits in §. 61 haben wir gesehen, dass das Integral $\int_0^\infty\frac{\sin(bx)}{x}\partial x=\frac{\pi}{2}$, wenn $b>0$; für $b=0$ ist es offenbar $=0$, für $b<0$ aber $-\frac{\pi}{2}$, da für $b=-b'$: $\int_0^\infty\frac{\sin bx}{x}\partial x=-\int\frac{\sin(b'x)}{x}\partial x=-\frac{\pi}{2}$.

Nun ist $\sin(az)\cos(xz)=\frac{1}{2}\sin(a+x)z+\frac{1}{2}\sin(a-x)z$; demnach

$$\int_0^\infty\frac{\sin(az)\cos(xz)}{z}\partial z=\frac{1}{2}\int_0^\infty\frac{\sin(a+x)z}{z}\partial z+\frac{1}{2}\int_0^\infty\frac{\sin(a-x)z}{z}\partial z.$$

Von diesen Integralen ist das erste $=\frac{\pi}{2}$, wenn $a+x>0$, d. h. $x>-a$; 0, wenn $a+x=0$ oder $x=-a$; $-\frac{\pi}{2}$, wenn $a+x<0$, d. h. $x<-a$; das zweite ist $\frac{\pi}{2}$, wenn $a-x>0$, d. h. $x<a$; 0, wenn $a-x=0$, $x=a$; $-\frac{\pi}{2}$, wenn $a-x<0$, d. h. $x>a$. Daraus folgt nun leicht:

$$\int_0^\infty\frac{\sin az\cos xz}{z}\partial z=\begin{cases}\frac{\pi}{2}, \text{ wenn } -a<x<+a,\\ 0, \text{ wenn } x<-a,\\ 0, \text{ wenn } x>+a,\\ \frac{\pi}{4}, \text{ wenn } x=\pm a.\end{cases}$$

Ganz eben so ist

$$\int_0^\infty\frac{\sin xz\cos az}{z}\partial z=\begin{cases}-\frac{\pi}{2}, \text{ wenn } -\infty<x<-a,\\ -\frac{\pi}{4}, \text{ wenn } x=-a,\\ 0, \text{ wenn } -a<x<+a,\\ \frac{\pi}{4}, \text{ wenn } x=+a,\\ \frac{\pi}{2}, \text{ wenn } +\infty>x>+a.\end{cases}$$

Da ferner

$$\sin xz \sin az \sin bz = \frac{1}{4}\sin(x+a-b)z + \frac{1}{4}\sin(x+b-a)z - \frac{1}{4}\sin(x+a+b)z - \frac{1}{4}\sin(x-a-b)z,$$

also

$$\int_0^\infty \frac{\sin xz \sin az \sin bz}{z}\partial z = \frac{1}{4}\int_0^\infty \frac{\sin(x+a-b)z}{z}\partial z + \frac{1}{4}\int_0^\infty \frac{\sin(x+b-a)z}{z}\partial z - \frac{1}{4}\int_0^\infty \frac{\sin(x+a+b)z}{z}\partial z - \frac{1}{4}\int_0^\infty \frac{\sin(x-a-b)z}{z}\partial z$$

und da ferner von diesen Integralen das erste $\frac{\pi}{2}$ ist für $x > -(a-b)$, 0 für $x = -(a-b)$, $-\frac{\pi}{2}$ für $x < -(a-b)$, u. s. w., so folgt daraus, dass wenn $a > b > 0$:

$$\int_0^\infty \frac{\sin xz \sin az \sin bz}{z}\partial z = \begin{cases} 0, & -\infty < x < -(a+b), \\ -\frac{\pi}{8}, & x = -(a+b), \\ -\frac{\pi}{4}, & -(a+b) < x < -(a-b), \\ -\frac{\pi}{8}, & x = -(a-b), \\ 0, & -(a-b) < x < a-b \\ +\frac{\pi}{8}, & x = a-b, \\ +\frac{\pi}{4}, & a-b < x < a+b, \\ +\frac{\pi}{8}, & x = a+b, \\ 0, & a+b < x < +\infty. \end{cases}$$

Daraus für $a = b$:

$$\int_0^\infty \frac{\sin xz \sin^2 az}{z}\partial z = \begin{cases} 0, & \text{wenn } -\infty < x < -2a, \\ -\frac{\pi}{8}, & \text{wenn } x = -2a, \\ -\frac{\pi}{4}, & \text{wenn } -2a < x < 0, \\ 0, & \text{wenn } x = 0, \\ +\frac{\pi}{4}, & 0 < x < 2a, \\ +\frac{\pi}{4}, & x = 2a, \\ 0, & 2a < x < \infty. \end{cases}$$

wie sich leicht auch daraus findet, dass

$$\sin xz \sin^2 az = \frac{1}{2}\sin xz - \frac{1}{4}\sin(x+2a)z - \frac{1}{4}\sin(x-2a)z.$$

Wie man in dieser Weise weiter gehen kann, ist klar. Wir werden von diesen Formeln später mehrfach Gebrauch machen; für jetzt mag es an ihrer Ableitung genügen.

Drittes Buch.

Integration der Differentialgleichungen.

Zwölfter Abschnitt.

Die Differentialgleichungen erster Ordnung.

§. 65.

Eine jede Gleichung zwischen x, y und den Differentialquotienten von y nach x heisst eine Differentialgleichung zwischen y und x, und zwar ist sie der ersten Ordnung, wenn nur der erste Differentialquotient von y vorkommt, der zweiten, wenn auch noch der zweite vorkommt, u. s. w. Wir wollen hier zunächst nur die Differentialgleichungen der ersten Ordnung ins Auge fassen. Was diese nun anbelangt, so können wir uns eine solche in folgender Weise entstanden denken. Gesetzt

$$f(x, y, a) = 0 \qquad (a)$$

sey eine Gleichung zwischen x und y, in der die Konstante a (nebst vielleicht noch andern Konstanten) vorkomme; aus ihr folgt (§. 8):

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} = 0, \qquad (b)$$

in welcher Gleichung im Allgemeinen auch noch die Konstante a vorkommen wird. Eliminirt man nun a aus den beiden Gleichungen (a) und (b), so wird man eine Gleichung

$$F\left(x, y, \frac{\partial y}{\partial x}\right) = 0 \qquad (c)$$

erhalten, in der a nicht mehr vorkömmt, die aber sicher aus (a) folgt. Diese Gleichung (c) ist nun eine Differentialgleichung erster Ordnung, während die Gleichung (a) ihre Integralgleichung ist. Daraus folgt ganz unmittelbar, dass die Integralgleichung einer Differentialgleichung eine (willkürliche) Konstante enthalten kann, die in der letzteren nicht vorkommt, und dass sie also eine solche enthalten muss, wenn sie allgemein genug seyn soll. Zwei Konstanten, die in der Differentialgleichung nicht vorkommen, kann die Integralgleichung aber nicht enthalten, da man zwei solche nicht eliminiren kann, wenn man nicht über die erste Ordnung hinausgeht.

Es fragt sich nunmehr bloss, ob jede Differentialgleichung (c) auch nothwendig eine Integralgleichung habe, oder vielmehr, ob es nothwendig eine Funktion y von x gebe, die der Gleichung (c) genügt, und eine willkürliche Konstante enthält, die in (c) nicht vorkommt. Dass dem so ist, wird man sich am Einfachsten durch eine Art geometrischer Konsruktion verdeutlichen. Wir sagen nämlich, mittelst der Gleichung (c) lassen sich Kurven

konstruiren, und wenn wir dies gezeigt haben, so haben wir hiemit auch nachgewiesen, dass es eine Funktion von x gibt, welche der Gleichung (c) genügt, indem die Ordinate einer Kurve nothwendig eine Funktion der Abszisse ist, und eben diese Ordinate ja der (c) genügt. Nun drückt aber $\frac{\partial y}{\partial x}$ für einen bestimmten Werth von x die Tangente des Winkels aus, den die berührende Gerade in dem Punkte der Kurve, der zu x gehört, mit der Abszissenaxe macht (§. 3); kennt man also $\frac{\partial y}{\partial x}$, so kennt man auch die Richtung der berührenden Geraden, von der wir sagen dürfen, dass sie auf eine unendlich kleine Entfernung hin mit der Kurve zusammenfalle. Nehmen wir nun an, der Abszisse x_0 entspreche die (willkürliche, aber bestimmte) Ordinate y_0, so folgt aus (c) der zu $x=x_0$, $y=y_0$ gehörige Werth von $\frac{\partial y}{\partial x}$, also die Richtung der berührenden Geraden in dem betreffenden Kurvenpunkte. Konstruiren wir diese und nehmen dann eine Abszisse $x_0+\Delta x$, wo wir uns Δx als unendlich klein denken wollen, so werden wir die zugehörige Ordinate einfach dadurch erhalten, dass wir die im Punkte $x=x_0+\Delta x$ errichtete Senkrechte auf die Abszissenaxe an der vorhin konstruirten berührenden Geraden enden lassen. Wir kennen somit auch die neue Ordinate y_1, die zu $x_0+\Delta x=x_1$ gehört, können also aus (c) den gehörigen Werth von $\frac{\partial y}{\partial x}$ finden, also die neue berührende Gerade konstruiren. Gehen wir dann zur Abszisse $x_1+\Delta x=x_2$ über, so werden wir ganz in derselben Weise die weitere Ordinate y_2 finden, und dann aus (c) den neuen Werth von $\frac{\partial y}{\partial x}$ ziehen, also die dritte Tangente konstruiren können u. s. w. Man ersieht hieraus wohl schon, dass man also mittels der Gleichung (c) eine stetige Kurve konstruiren kann, deren Ordinate y ihr genügt. Da y_0 ganz willkürlich ist, so gibt es unendlich viele solcher Kurven; das einmal bestimmte y_0 spezialisirt jede einzelne und vertritt also die willkürliche Konstante.

Von den Differentialgleichungen erster Ordnung werden wir nun zunächst diejenigen betrachten, in denen $\frac{\partial y}{\partial x}$ nur in der ersten Potenz vorkommt, die also die Form

$$P+Q\frac{\partial y}{\partial x}=0 \qquad \text{(d)}$$

haben, wo P, Q bekannte Funktionen von x und y sind. Man nennt dieselben Differentialgleichungen der ersten Ordnung und **des ersten Grades**, wobei wir bemerken wollen, dass man die Gleichung (d) wohl auch in folgender Form schreibt:

$$Pdx+Qdy=0, \qquad \text{(d')}$$

die wir jedoch in der Regel vermeiden werden, da die Formel (d) klarer die Bedeutung der Gleichung ausspricht.

Die einfachste Gestalt nun, welche die Gleichung (d) haben kann, ist die, in der die **Veränderlichen getrennt sind**, d. h. da P kein y, Q kein x enthält. Alsdann ist die Integralgleichung von (d) einfach:

$$\int P\partial x + \int Q\partial y = C, \qquad (e)$$

wo C eine willkürliche Konstante bedeutet, und $\int P\partial x$ das Integral nach x, $\int Q\partial y$ nach y bezeichnet. Aus der Gleichung (e) folgt nämlich (§. 8):

$$\frac{\partial\left(\int P\partial x + \int Q\partial y\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(\int P\partial x + \int Q\partial y\right)}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} = 0, \qquad (e')$$

und da $\int Q\partial y$ kein x enthält, also $\frac{\partial \int Q\partial y}{\partial x} = 0$, aber $\frac{\partial \int P\partial x}{\partial x} = P$ ist; ferner $\int P\partial x$ kein y enthält, also $\frac{\partial \int P\partial x}{\partial y} = 0$, aber $\frac{\partial \int Q\partial y}{\partial y} = Q$ ist, so folgt also aus (e'):

$$P + Q\frac{\partial y}{\partial x} = 0,$$

d. h. die Gleichung (d), so dass (e) wirklich die Integralgleichung von (d) ist, und augenscheinlich die nicht in (d) vorkommende ganz willkürliche Konstante C enthält.

Sehr oft lassen sich aber in der Gleichung (d) die Veränderlichen leicht trennen, wenn sie es noch nicht sind. Seyen etwa X_1, X_2 Grössen, die kein y; Y_1, Y_2 Grössen, die kein x enthalten, und man habe die Gleichung

$$X_1 Y_1 + X_2 Y_2 \frac{\partial y}{\partial x} = 0, \qquad (f)$$

so folgt aus ihr

$$\frac{X_1}{X_2} + \frac{Y_2}{Y_1}\frac{\partial y}{\partial x} = 0,$$

woraus nun, da jetzt die Veränderlichen getrennt sind:

$$\int \frac{X_1}{X_2}\partial x + \int \frac{Y_2}{Y_1}\partial y = C.$$

Einige Beispiele mögen das Gesagte erläutern.

1.) $$a + b\frac{\partial y}{\partial x} = 0, \quad (a\,dx + b\,dy = 0).$$

Hier sind die Veränderlichen getrennt, also ist

$$\int a\partial x + \int b\partial y = C, \quad ax + by = C.$$

2.) Ein mit einer Flüssigkeit gefülltes Gefäss wird um eine vertikale Axe gleichförmig gedreht. Dabei entsteht ersichtlich eine Vertiefung der Oberfläche der Flüssigkeit und man soll die Gestalt derselben ermitteln.

Sicher ist dieselbe die einer Rotationsfläche, die durch Rotation um die Drehaxe des Gefässes entstanden ist, so dass es genügt, einen Schnitt derselben, der durch diese Axe geht, zu kennen. Betrachten wir nun ein Wassertheilchen in einem solchen, und sey y die Entfernung desselben von der Drehaxe, x seine Erhöhung über der durch den tiefsten Punkt der Fläche gelegten Horizontalebene, (also x und y seine rechtwinklichen Koordinaten), so muss die Kraft, die auf dies Theilchen wirkt, senkrecht auf die Fläche gerichtet seyn, da dasselbe sonst auf

dieser Fläche fortgleiten würde. Auf das Theilchen aber wirken: das eigene Gewicht vertikal, sodann die Zentrifugalkraft nach horizontaler Richtung. Ist μ das Gewicht des Theilchens, so ist letztere $=\frac{\mu v^2}{y g}$, wenn v die Geschwindigkeit des Theilchens; ist aber α die Rotationsgeschwindigkeit, so ist $v=\alpha y$, also ist die Zentrifugalkraft $=\frac{\mu\alpha^2 y}{g}$ (wo g dieselbe Bedeutung hat wie in §. 14, X). Die auf das Theilchen wirkende Kraft ist also $=\sqrt{\mu^2+\frac{\mu^2\alpha^4 y^2}{g^2}}$, und sie macht mit der Axe der x einen Winkel $180^0-\varrho$, so dass $\operatorname{tg}\varrho=\frac{\alpha^2 y}{g}$, und da diese Kraft auf der Fläche oder auf der Tangente an den Meridianschnitt senkrecht stehen soll, so muss, wenn t der Winkel der Tangente mit der x-Axe ist:

$$t=90^0-\varrho,\ \operatorname{tg} t=\operatorname{cotg}\varrho,\ \text{d. h. } \frac{\partial y}{\partial x}=\frac{g}{\alpha^2 y},\quad \alpha^2 y\frac{\partial y}{\partial x}=g$$

seyn. Daraus

$$\alpha^2\int y\,\partial y=g\int\partial x,\quad \frac{\alpha^2 y^2}{2}=gx+C.$$

Da aber hier für $x=0$ auch $y=0$ seyn muss, so muss $C=0$ seyn, so dass

$$y^2=\frac{2g}{\alpha^2}x$$

ist. Daraus folgt, dass die fragliche Fläche durch Rotation einer Parabel um ihre Hauptaxe entsteht.

3.) $ay^2\frac{\partial y}{\partial x}+4x^3-2x^2+bx+12=0$, oder $ay^2dy+(4x^3-2x^2+bx+12)dx=0$.

$$\int ay^2\partial y+\int(4x^3-2x^2+bx+12)\partial x=C,$$

$$\frac{ay^3}{3}+x^4-\frac{2x^3}{3}+\frac{bx^2}{2}+12x=C.$$

4.) $$x(ay^2+b)+y(cx+g)\frac{\partial y}{\partial x}=0,$$

$$\frac{x}{cx+g}+\frac{y}{ay^2+b}\frac{\partial y}{\partial x}=0,\quad \int\frac{x\partial x}{cx+g}+\int\frac{y\partial y}{ay^2+b}=C,$$

und da $\int\frac{x\partial x}{cx+g}=\int\left(\frac{1}{c}-\frac{g}{c}\cdot\frac{1}{cx+g}\right)\partial x=\frac{x}{c}-\frac{g}{c^2}l(cx+g)$, $\int\frac{y\partial y}{ay^2+b}=\frac{1}{2a}\cdot l(ay^2+b)$, so ist also

$$\frac{x}{c}-\frac{g}{c^2}l(cx+g)+\frac{1}{2a}l(ay^2+b)=C,$$

$$l(ay^2+b)=2aC-\frac{2ax}{c}+\frac{2ag}{c^2}l(cx+g),$$

woraus $$ay^2+b=e^{2aC}e^{\frac{2ag}{c^2}l(cx+g)}e^{-\frac{2ax}{c}},$$

und da e^{2aC} eine willkürliche Konstante, die man füglich mit C bezeichnen kann; $e^{\frac{2ag}{c^2}l(cx+g)}=(cx+g)^{\frac{2ag}{c^2}}$, so ist also

$$ay^2+b=C(cx+g)^{\frac{2ag}{c^2}}e^{-\frac{2ax}{c}}.$$

5.) $$(6xy+3x)\frac{\partial y}{\partial x}+(5x^2+8x)=0$$

(durch Division mit x): $3(2y+1)\frac{\partial y}{\partial x}+5x+8=0$,

$$\int 3(2y+1)\partial y + \int (5x+8)\partial x = 0,$$

$$3y^2+3y+\frac{5x^2}{2}+8x = C.$$

6.) In einer engen prismatischen oder zylindrischen, überall gleich dicken Röhre ströme heisse Luft, während sie von einer Flüssigkeit umgeben sey, die immer dieselbe Temperatur τ habe. Unter der Voraussetzung, es ströme durch jeden Querschnitt der Röhre in derselben Zeit dieselbe (Gewichts-)Menge Luft, es bleibe ferner in jedem einzelnen solchen Querschnitte die Temperatur der durchströmenden Luft zu jeder Zeit dieselbe und es gebe die Röhrenwand alle empfangene Wärme an die Flüssigkeit ab, soll die Wärmemenge bestimmt werden, die in der Zeiteinheit durch diese Wand strömt.

Sey t_0 die Temperatur der in die Röhre einströmenden, t_1 die der ausströmenden Luft, p das Gewicht der in jeder Zeiteinheit durch einen Querschnitt strömenden Luft, t deren Temperatur in dem um x vom Anfang entfernten Schnitte, also $t+\Delta t$ die im Querschnitt, der $x+\Delta x$ zugehört. Ist c die spezifische Wärme (§. 34, II) der Luft, so verliert in der Zeiteinheit die durch das (unendlich kleine) Element Δx strömende Luft die Wärmemenge $-pc\Delta t$. Sey s der (konstante) Umfang des Querschnitts, als $s\Delta x$ die Fläche der Wand, die das Röhrenelement begränzt; γ die Wärmemenge, die in der Zeiteinheit durch die Wandeinheit strömen würde, wenn Luft und Wasser um 1° Temperatur verschieden wären, so ist $\gamma s\Delta x(t-\tau)$ die Wärmemenge, die in der Zeiteinheit durch das fragliche Stück der Wand strömt (vergl. §. 72, Nr. 9 und 10). Da diese letztere der gleich ist, welche die Luft verliert, so hat man

$$-pc\Delta t = \gamma s\Delta x(t-\tau),\quad -pc\frac{\Delta t}{\Delta x} = \gamma s(t-\tau),$$

d. h.
$$-pc\frac{\partial t}{\partial x} = \gamma s(t-\tau),\quad -\frac{pc}{\gamma s(t-\tau)}\frac{\partial t}{\partial x} = 1,\quad -\frac{pc}{\gamma s}\int\frac{\partial t}{t-\tau} = x+C,$$

$$-\frac{pc}{\gamma s}l(t-\tau) = x+C,\quad t-\tau = Ce^{-\frac{\gamma s}{pc}x}.$$

Für $x=0$ ist $t=t_0$, also

$$t_0-\tau = C,\ \text{und allgemein:}\ \frac{t-\tau}{t_0-\tau} = e^{-\frac{\gamma s}{pc}x}.$$

Ist h die Länge der Röhre, also sh ihre innere Fläche $=a$, so ist (für $x=h$: $t=t_1$):

$$\frac{t_1-\tau}{t_0-\tau} = e^{-\frac{\gamma a}{pc}},\quad t_0-t_1 = (t_0-\tau)\left(1-e^{-\frac{\gamma a}{pc}}\right).$$

Die in der Zeiteinheit von der durchströmenden Luft verlorene Wärmemenge ist (§. 48):

$$-pc\int_{t_0}^{t_1}\partial t = pc(t_0-t_1) = pc(t_0-\tau)\left(1-e^{-\frac{\gamma a}{pc}}\right),$$

welches nun die Menge ist, die an die Flüssigkeit gelangt.

7.) Man soll eine Kurve beschreiben, in der immer die Tangente des Winkels, den die berührende Gerade in dem Punkte (x, y) gemacht, gleich sey $\frac{x}{y}$.

Man hat also

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{x}{y}, \; y\frac{\partial y}{\partial x} - x = 0,$$

$$\int y\partial y - \int x\partial x = C, \; \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} = C, \; y^2 - x^2 = C,$$

wo wir statt $2C$ bloss C geschrieben haben. Die Kurve ist also eine gleichseitige Hyperbel, für welche der Anfangspunkt Mittelpunkt ist.

Dieses Beispiel (nebst dem vorigen und Nr. 2) zeigt uns zugleich, wie man im gegebenen Falle die willkürliche Konstante zu bestimmen habe. Sagt man nämlich, die gesuchte Kurve müsse durch den Punkt gehen, dessen Abszisse und Ordinate a und b sind, so ist, da C für alle zusammengehörigen x und y dasselbe bleibt, und a und b solche seyn sollen, nothwendig

$$b^2 - a^2 = C,$$

wodurch nun C bestimmt ist. Man wird also im Allgemeinen die willkürliche Konstante bestimmen können, wenn man für einen bestimmten Werth von x den zugehörigen Werth von y kennt. Es versteht sich übrigens hier auch von selbst, dass nothwendig y eine solche Funktion von x seyn muss, die stetig verlauft, wenn x stetig verlauft, da sonst die Konstante nicht nothwendig immer dieselbe bliebe (§§. 35, 49).

Die Hauptaufgabe bei Integration der Differentialgleichungen erster Ordnung und ersten Grades ist nun die, durch irgend welche Hilfsmittel die Veränderlichen zu trennen, und wir wollen nun die wichtigsten Methoden, die zu diesem Endziele führen, angeben.

§. 66.

I. Seyen X, X_1 Grössen, die kein y enthalten, und die Differentialgleichung

$$\frac{\partial y}{\partial x} + Xy + X_1 = 0 \qquad (a)$$

zur Integration vorgelegt. Man setze $y = uv$, wo u und v zwei noch zu bestimmende Funktionen von x sind, so ist $\frac{\partial y}{\partial x} = u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial x}$, mithin wird die Gleichung (a):

$$u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial x} + Xuv + X_1 = 0,$$

d. h.

$$u\left(\frac{\partial v}{\partial x} + Xv\right) + v\frac{\partial u}{\partial x} + X_1 = 0. \qquad (a')$$

Gesetzt nun, v werde so bestimmt, dass

$$\frac{\partial v}{\partial x} + Xv = 0, \qquad (b)$$

so folgt aus (a') von selbst

$$v\frac{\partial u}{\partial x} + X_1 = 0. \qquad (b')$$

Und umgekehrt, wenn v und u den Gleichungen (b) und (b') genügen, so genügt $y = uv$ der Gleichung (a).

Die Gleichung (b) gibt aber

$$\frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial x} + X = 0,$$

und da hier die Veränderlichen getrennt sind, so hat man (§. 65):

$$\int \frac{\partial v}{v} + \int X \partial x = C, \; l(v) = C - \int X \partial x, \; v = e^C e^{-\int X \partial x} = C e^{-\int X \partial x},$$

wenn man C für e^C schreibt.* Setzt man diesen Werth in (b'), so hat man

$$C e^{-\int X \partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + X_1 = 0, \; C \frac{\partial u}{\partial x} + X_1 e^{\int X \partial x} = 0,$$

also nach §. 65:

$$C u + \int X_1 e^{\int X \partial x} \partial x = C', \; u = \frac{C' - \int X_1 e^{\int X \partial x} \partial x}{C},$$

wenn C' eine Konstante. Also

$$y = uv = e^{-\int X \partial x}(C' - \int X_1 e^{\int X \partial x} \partial x),$$

d. h. die Integralgleichung der Gleichung (a) ist

$$y = e^{-\int X \partial x}(C - \int X_1 e^{\int X \partial x} \partial x), \qquad \text{(c)}$$

wie man durch direkte Substitution in (a) sich leicht überzeugen kann.

1.) Aus $\frac{\partial y}{\partial x} + y = a x^n$, oder $dy + y \partial x = a x^n dx$

folgt also, da jetzt $X = 1$, $X_1 = -a x^n$, $\int X \partial x = x$:

$$y = e^{-x}(C + a \int x^n e^x \partial x). \quad (\S. 36, \text{II}).$$

2.) $(1-x^2)\frac{\partial y}{\partial x} + xy = a$, $\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{x}{1-x^2} y = \frac{a}{1-x^2}$; $X = \frac{x}{1-x^2}$, $X_1 = -\frac{a}{1-x^2}$, $\int X \partial x = -\frac{1}{2} l(1-x^2) = -l(\sqrt{1-x^2})$, $e^{-\int X \partial x} = e^{l\sqrt{1-x^2}} = \sqrt{1-x^2}$, $e^{\int X \partial x} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, also

$$y = \sqrt{1-x^2}\left[C + a \int \frac{\partial x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}\right] = \sqrt{1-x^2}\left[C + \frac{ax}{\sqrt{1-x^2}}\right] \; (\S. 41, (c)),$$

d. h.

$$y = C\sqrt{1-x^2} + ax.$$

3.) Sucht man die Summe der unendlichen Reihe $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots\ldots$ und setzt dieselbe $= z$, so ist für $x^2 < 1$ (§. 27):

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 1 + x + x^2 + \ldots = \frac{1}{1-x}, \text{ also } (\S. 65){:}\; z = \int \frac{\partial x}{1-x} + C = -l(1-x) + C,$$

und da für $x = 0$ auch $z = 0$, so ist $C = 0$, mithin

$$x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots\ldots = -l(1-x).$$

Gesetzt nun, man habe die unendliche Reihe

$$\frac{x}{1.2} + \frac{x^2}{2.3} + \frac{x^3}{3.4} + \frac{x^4}{4.5} + \ldots\ldots,$$

welche für $x^2 < 1$ konvergirt, und sey deren Summe $= y$, so ist

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x^2}{4} + \ldots, \; x\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{4} + \ldots,$$

---

* Begreiflich soll damit nicht gesagt seyn, es sey $e^C = C$, sondern nur, e^C sey eben eine Konstante, die man füglich auch mit C bezeichnen kann.

$$y+x\frac{\partial y}{\partial x}=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\ldots\ldots,\quad \text{d. h. } y+x\frac{\partial y}{\partial x}=-l(1-x).$$

Hieraus folgt

$$\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{1}{x}y+\frac{l(1-x)}{x}=0,\quad y=e^{-\int\frac{x}{x}}\left[C-\int\frac{l(1-x)}{x}e^{\int\frac{x}{x}}\partial x\right]=\frac{1}{x}\left[C-\int l(1-x)\partial x\right]$$

$$=\frac{1}{x}\left[C+x+(1-x)\,l(1-x)\right].$$

Da für $x=0$ auch $y=0$, so ist nothwendig $C=0$, da $1+\frac{(1-x)l(1-x)}{x}$ Null ist für $x=0$ (§. 22), so dass

$$\frac{x}{1.2}+\frac{x^2}{2.3}+\frac{x^3}{3.4}+\ldots\ldots=1+\frac{(1-x)l(1-x)}{x},\quad x^2<1.$$

II. Ist Y eine bloss von y abhängige Grösse; X, X_1 wie oben, so kann die Gleichung

$$\frac{\partial Y}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}+XY+X_1=0 \qquad \text{(d)}$$

leicht auf (a) zurückgeführt werden. Setzt man nämlich (§. 5): $\frac{\partial Y}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}Y$, so ist die (d):

$$\frac{\partial Y}{\partial x}+XY+X_1=0,$$

und aus ihr folgt

$$Y=e^{-\int X\partial x}\left[C-\int X_1 e^{\int X\partial x}\partial x\right].$$

Hieher gehört u. A. die Gleichung

$$y^{m-1}\frac{\partial y}{\partial x}+X\,y^m+X_1=0. \qquad \text{(e)}$$

Multiplizirt man diese Gleichung nämlich mit m, so ist sie

$$my^{m-1}\frac{\partial y}{\partial x}+mXy^m+mX_1=0,$$

und geht in (d) über, wenn $Y=y^m$, und mX, mX_1 statt X, X_1 gesetzt werden. Demnach ist die Integralgleichung von (e):

$$y^m=e^{-m\int X\partial x}\left[C-m\int X_1 e^{m\int X\partial x}\partial x\right].$$

Eben so gehört hieher die Gleichung

$$\frac{\partial y}{\partial x}+Xy+X_1y^n=0. \qquad \text{(f)}$$

Denn aus ihr folgt

$$-\frac{(n-1)}{y^n}\frac{\partial y}{\partial x}-\frac{(n-1)X}{y^{n-1}}-(n-1)X_1=0,$$

und geht in (d) über, wenn $Y=\frac{1}{y^{n-1}}=y^{-n+1}$, und $-(n-1)X$, $-(n-1)X_1$ für X und X_1 gesetzt werden, so dass die Integralgleichung von (f) ist:

$$\frac{1}{y^{n-1}}=e^{(n-1)\int X\partial x}\left[C+(n-1)\int X_1 e^{-(n-1)\int X\partial x}\partial x\right].$$

III. Setzt man in der Gleichung

$$x^2\frac{\partial y}{\partial x}+xy+e^{xy}=a$$

wieder $y=uv$, $\frac{\partial y}{\partial x}=u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial x}$, so wird sie

$$x^2\left(u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial x}\right)+xuv+e^{xuv}=a,$$

$$xu\left(x\frac{\partial v}{\partial x}+v\right)+x^2v\frac{\partial u}{\partial x}+e^{xuv}=a,$$

also wenn $x\frac{\partial v}{\partial x}+v=0$, $\frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{1}{x}=0$, $l(v)+l(x)=c$ (§. 65), $l(xv)=c$, $xv=e^c$, $xv=c$,* $v=\frac{c}{x}$, so ist

$$xc\frac{\partial u}{\partial x}+e^{cu}=a,\ xc\frac{\partial u}{\partial x}+e^{cu}-a=0,\ \frac{c}{e^{cu}-a}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{x}=0,$$

woraus

$$\int\frac{c\partial u}{e^{cu}-a}+l(x)=C.$$

Um das Integral zu bestimmen, sey $e^{cu}-a=z$, $ce^{cu}\frac{\partial u}{\partial z}=1$, $\frac{c\partial u}{\partial z}=\frac{1}{e^{cu}}=\frac{1}{a+z}$, also (§. 36)

$$\int\frac{c\partial u}{e^{cu}-a}=\int\frac{\partial z}{z(a+z)}=\frac{1}{a}l\left(\frac{z}{a+z}\right)=\frac{1}{a}l\left(\frac{e^{cu}-a}{e^{cu}}\right)\ (\text{§. 37}),$$

also
$$\frac{1}{a}l\left(\frac{e^{cu}-a}{e^{cu}}\right)+l(x)=C,\ \text{d. h. } l\left(\left(\frac{e^{cu}-a}{e^{cu}}\right)^{\frac{1}{a}}x\right)=C,$$

also auch
$$\left(\frac{e^{cu}-a}{e^{cu}}\right)^{\frac{1}{a}}x=C,\quad cu=\frac{cy}{v}=xy,$$

und mithin, da auch C^a konstant:

$$\frac{e^{xy}-a}{e^{xy}}x^a=C,\ (e^{xy}-a)\,x^a=Ce^{xy}.$$

IV. Als Beispiele zu dem Vorstehenden mögen noch folgende dienen:

4.) Die Gleichung

$$x\frac{\partial y}{\partial x}+ay+by^2=0$$

zu integriren. In (f) ist jetzt $X=\frac{a}{x}$, $X_1=\frac{b}{x}$, $n=2$; $\int X\partial x=a\,l(x)$, $e^{a\,l(x)}=x^a$, also

$$\frac{1}{y}=x^a\left[C+b\int\frac{\partial x}{x^{a+1}}\right]=x^a\left[C-\frac{b}{ax^a}\right]=Cx^a-\frac{b}{a},$$

d. h.
$$y=\frac{a}{Cx^a-b},$$

welche Gleichung für $a=0$ unzulässig ist, in welchem Falle aber die vorgelegte Gleichung zu §. 65 (f) gehört.

* Wo abermals für e^c bloss c gesetzt wird.

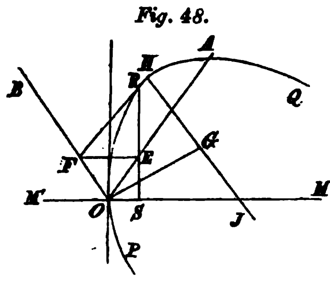


Fig. 48.

5.) OA, OB sind zwei durch den Anfangspunkt O gehende Gerade (Fig. 48), die mit der Abszissenaxe OM Winkel machen, die sich zu 180^0 ergänzen, deren Gleichungen also sind $y = mx$, $y = -mx$ ($m > 0$). In einem beliebigen Punkte E der Geraden OA zieht man die Ordinate ES, EF parallel mit der Abszissenaxe, und soll nun eine Kurve PQ finden der Art, dass wenn man den Durchschnittspunkt R dieser Kurve und der Ordinate ES mit F verbindet, alsdann RF Tangente von PQ sey.

Die Koordinaten des Punktes E seyen $x = \alpha$, $y = m\alpha$, so ist die Gleichung der Geraden EF: $y = m\alpha$, und dieselbe schneidet OB im Punkte F, dessen Koordinaten sind: $x = -\alpha$, $y = m\alpha$; die Koordinaten des Punktes R seyen x, y, so ist die Gleichung der Geraden RF:

$$v - y = \frac{m\alpha - y}{-\alpha - x}(\xi - x) = \frac{y - m\alpha}{\alpha + x}(\xi - x),$$

wenn ξ, v die laufenden Koordinaten von RF sind. Zugleich ist aber auch $\alpha = x$, und da RF Tangente an die Kurve seyn soll, so ist

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{y - mx}{2x}, \quad \frac{\partial y}{\partial x} - \frac{y}{2x} + \frac{m}{2} = 0,$$

aus welcher Gleichung die Kurve zu bestimmen ist. Nach I. folgt hieraus:

$$y = e^{\int \frac{\partial x}{2x}}\left[C - \frac{m}{2}\int e^{-\int \frac{\partial x}{2x}} \partial x\right] = \sqrt{x}\left[C - \frac{m}{2}\int \frac{\partial x}{\sqrt{x}}\right] = \sqrt{x}\left[C - m\sqrt{x}\right],$$

$(y + mx)^2 = Cx$ (C statt C^2).

Diese Gleichung stellt (für ein positives C z. B.) eine Parabel vor, die man erhält, wenn man OG senkrecht auf OB zieht und $= \frac{mC}{2(1+m^2)^{\frac{3}{2}}}$ macht, sodann GH parallel OB und $= \frac{m^2 C}{4(1+m^2)^{\frac{3}{2}}}$; alsdann ist H der Scheitel der Parabel, HJ deren Hauptaxe, und die Entfernung des Brennpunkts vom Scheitel ist $\frac{C}{4(1+m^2)^{\frac{3}{2}}}$. Für $C = 0$ würde die Parabel in die Gerade OB übergehen. Da C willkürlich ist, so gibt es unendlich viele Parabeln; da wir $m > 0$ voraussetzen, so haben bei positivem C alle ihren Scheitel zwischen OB und OM, so wie auch alle durch O gehen und dort von der Ordinatenaxe berührt werden.

§. 67.

I. Die Gleichung

$$(ax + bx^{n+1}y^m)\frac{\partial y}{\partial x} + cy + hx^n y^{m+1} = 0 \qquad \text{(a)}$$

lässt sich leicht integriren. Dividirt man dieselbe durch x y, so heisst sie auch:

$$\frac{a}{y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{c}{x} + x^n y^m\left(\frac{b}{y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{h}{x}\right) = 0,$$

und wenn man nun

$$x^c y^a = z, \quad y^b x^h = u,$$

setzt, so ist die vorgelegte Gleichung:

also $$\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{a}{y}\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{c}{x},\quad \frac{1}{u}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{b}{y}\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{h}{x}$$

$$\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{u}\frac{\partial u}{\partial x}x^ny^m=0.$$

Aber es ist

$$x^{bc}y^{ab}=z^b,\ y^{ab}x^{ah}=u^a,\ x^{ch}y^{ah}=z^h,\ y^{bc}x^{ch}=u^c,$$

also $$x^{bc-ah}=z^bu^{-a},\ y^{ah-bc}=z^hu^{-c},$$

$$x=z^{\frac{b}{bc-ah}}u^{\frac{a}{ah-bc}},\ y=z^{\frac{h}{ah-bc}}u^{\frac{c}{bc-ah}},\ x^ny^m=z^{\frac{bn-mh}{bc-ah}}u^{\frac{cm-an}{bc-ah}},$$

also $$\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x}+z^{\frac{bn-mh}{bc-ah}}u^{\frac{cm-an}{bc-ah}}\frac{1}{u}\frac{\partial u}{\partial x}=0,$$

und wenn zur Abkürzung $\frac{bn-mh}{bc-ah}=-\alpha$, $\frac{cm-an}{bc-ah}=\beta$ gesetzt wird:

$$z^{\alpha-1}\frac{\partial z}{\partial x}+u^{\beta-1}\frac{\partial u}{\partial x}=0,\ \frac{z^\alpha}{\alpha}+\frac{u^\beta}{\beta}=C\ (\S.\ 65),$$

d. h. man hat als Integralgleichung der vorgelegten:

$$\frac{(x^cy^a)^{\frac{mh-bn}{bc-ah}}}{mh-bn}+\frac{(y^bx^h)^{\frac{cm-an}{bc-ah}}}{mc-na}=C. \qquad \text{(b)}$$

Die gegebene Auflösung ist unzulässig, wenn α oder β Null oder unendlich werden, d. h. wenn entweder $bn-mh=0$, oder $cm-an=0$, oder $bc-ah=0$. Sey also

1.) $\alpha=0$, d. h. $bn-mh=0$,

nicht aber $cm-an$ oder $bc-ah$ Null. Alsdann ist $x^ny^m=u^\beta$, also

$$\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x}+u^{\beta-1}\frac{\partial u}{\partial x}=0,\ l(z)+\frac{u^\beta}{\beta}=C,\ \ l(x^cy^a)+\frac{bc-ah}{cm-an}(y^bx^h)^{\frac{cm-an}{bc-ah}}=C.$$

2.) $\beta=0$, d. h. $cm-an=0$,

nicht aber $bn-mh$, oder $bc-ah$ Null. Alsdann ist $x^ny^m=z^{-\alpha}$, also

$$z^{\alpha-1}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{u}\frac{\partial u}{\partial x}=0,\ \frac{ah-bc}{bn-mh}(x^cy^a)^{\frac{mh-bn}{bc-ah}}+l(y^bx^h)=C.$$

3.) $bc-ah=0$.

Jetzt ist $b=\frac{ah}{c}$, also die vorgelegte Gleichung

$$\left(ax+\frac{ah}{c}x^{n+1}y^m\right)\frac{\partial y}{\partial x}+cy+hx^ny^{m+1}=0,$$

$$\frac{a}{c}x(c+hx^ny^m)\frac{\partial y}{\partial x}+y(c+hx^ny^m)=0,$$

$$\frac{a}{c}x\frac{\partial y}{\partial x}+y=0,\ \frac{a}{y}\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{c}{x}=0,\ al(y)+cl(x)=C,$$

$$l(x^cy^a)=C,\ x^cy^a=C.$$

Dies ist nun richtig, was immer auch n, m, h, b seyen, also wenn auch noch zugleich etwa $bn-mh=0$, oder $cm-an=0$.

4.) $\alpha=0$, $\beta=0$, nicht aber $bc-ah=0$.

Alsdann ist $x^ny^m=1$, also

$$\frac{1}{z}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{u}\frac{\partial u}{\partial x}=0,\ l(uz)=C,\ x^{c+h}y^{a+b}=C.$$

II. Die Gleichung

$$ax^r y^s \frac{\partial y}{\partial x} + bx^m y^n = c \qquad (c)$$

lässt sich unter gewissen Bedingungen ebenfalls integriren. Man setze nämlich

$$x = u^\alpha,\; y = z^\beta,$$

so wird (§. 5):

$$\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u},\; \frac{\partial (z^\beta)}{\partial u} = \frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial u^\alpha}{\partial u},\; \beta z^{\beta-1}\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial y}{\partial x}\alpha u^{\alpha-1},\; \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\beta}{\alpha} z^{\beta-1} u^{1-\alpha}\frac{\partial z}{\partial u},$$

mithin die Gleichung (c):

$$\frac{\beta a}{\alpha} u^{r\alpha} z^{s\beta} z^{\beta-1} u^{1-\alpha}\frac{\partial z}{\partial u} + bu^{\alpha m} z^{n\beta} = c,\; \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{b\alpha}{a\beta} u^{\alpha(m+1)-1-r\alpha} z^{\beta(n-s-1)+1}$$
$$= \frac{c\alpha}{a\beta} u^{\alpha(1-r)-1} z^{1-\beta(s+1)}.$$

Was nun α und β anbelangt, so wollen wir sie so bestimmen, dass:

$$\alpha(m-r+1) - 1 + 0,\; 1 - \beta(s+1) = 0, \qquad (d)$$

was immer möglich ist, wenn nicht $s = -1$, $m = r - 1$; alsdann ist die vorgelegte Gleichung:

$$\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{b\alpha}{a\beta} z^\delta = \frac{c\alpha}{a\beta} u^{\delta'},\; \delta = \beta(n-s-1)+1,\; \delta' = \alpha(1-r) - 1.$$

Diese Gleichung ist geradezu integrabel, wenn $\delta = 0$, d. h. $\frac{n-s-1}{s+1} + 1 = 0$, $n - s - 1 + s + 1 = 0$, $n = 0$, wie sich von selbst versteht, da dann in (c) die Veränderlichen getrennt werden können; sie kommt auf §. 66, I zurück, wenn $\delta = 1$, d. h. $\frac{n-s-1}{s+1} + 1 = 1$, $n - s - 1 = 0$, $n = s + 1$, und kann also ebenfalls integrirt werden.

Bestimmt man aber zweitens α und β, so dass

$$\beta(n-s-1) + 1 = 0,\; \alpha(1-r) - 1 = 0, \qquad (e)$$

was möglich ist, wenn nicht $n = s + 1$ oder $r = 1$, so wird die vorgelegte Gleichung:

$$\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{b\alpha}{\beta a} u^\varrho = \frac{c\alpha}{a\beta} z^{\varrho'},\; \varrho = \alpha(m-r+1) - 1,\; \varrho' = 1 - \beta(s+1).$$

Diese Gleichung ist geradezu integrabel, wenn $\varrho' = 0$, d. h. $1 + \frac{s+1}{n-s-1} = 0$, $n = 0$, wie vorhin; kommt auf §. 66, I zurück, wenn $\varrho' = 1$, d. h. $1 + \frac{s+1}{n-s-1} = 1$, $s + 1 = 0$, $s = -1$.

Daraus nun folgt:

„Die Gleichung (c) kann integrabel gemacht werden, wenn $n = s + 1$, indem man $x = u^{\frac{1}{m-r+1}}$, $y = z^{\frac{1}{n}}$ setzt; ferner wenn $s = -1$, indem man $x = u^{\frac{1}{1-r}}$, $y = z^{-\frac{1}{n}}$ setzt. In beiden Fällen kömmt sie auf §. 66, I zurück."

Ist zugleich $n = s + 1$, $m - r + 1 = 0$, also $r = m + 1$, so kann der erste Fall nicht angewendet werden. Dann ist die Gleichung (c):

$$ax^{m+1} y^s \frac{\partial y}{\partial x} + bx^m y^{s+1} = c,\; y^s \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{b}{ax} y^{s+1} - \frac{c}{ax^{m+1}} = 0,$$

und gehört zu §. 66, II, wo $Y = y^{s+1}$. Ist ferner zugleich $s = -1$ und $r = 1$, so kann der zweite Fall nicht angewendet werden. Alsdann heisst die Gleichung

$$\frac{ax}{y}\frac{\partial y}{\partial x}+bx^m y^n=c,\ \frac{\partial y}{\partial x}-\frac{c}{ax}y+\frac{b}{a}x^{m-1}y^{n+1}=0,$$

und gehört zu §. 66, II, Gleichung (f).

Wir wollen nun gleichfalls durch einige Beispiele das Vorstehende erläutern.

1.) $$(4-3xy^2)x\frac{\partial y}{\partial x}+(2+5xy^2)y=0.$$

In (a) ist jetzt: $a=4$, $b=-3$, $c=2$, $h=5$, $m=2$, $n=1$, $bn-mh=-13$, $cm-an=0$, $bc-ah=-26$, also $\beta=0$ und

$$-2(x^2y^4)^{-\frac{1}{2}}+\mathrm{l}(y^{-3}x^5)=C,\ y^{-3}x^5=e^{C+2(x^{-1}y^{-2})}=Ce^{\frac{2}{xy^2}},\ x^5=Cy^3e^{\frac{2}{xy^2}}.$$

2.) $$(4xy^2-3x^3)\frac{\partial y}{\partial x}+2y^3-5x^2y=0,\ \text{d. h.}\ \left(4x-\frac{3x^3}{y^2}\right)\frac{\partial y}{\partial x}+2y-\frac{5x^2}{y}=0,$$

gibt $a=4$, $b=-3$, $c=2$, $h=-5$, $n=2$, $m=-2$, $mh-bn=16$, $cm-an=-12$, $bc-ah=14$, also

$$\frac{(x^2y^4)^{\frac{8}{7}}}{16}-\frac{(x^{-5}y^{-8})^{-\frac{6}{7}}}{12}=C,\ \frac{1}{4}\sqrt[7]{(x^2y^4)^8}-\frac{1}{3}\sqrt[7]{(x^5y^8)^6}=C.$$

3.) $$(3x^3-4y)\frac{\partial y}{\partial x}-3x^2y+\frac{4y^2}{x}=0,\ \left(3x-\frac{4y}{x^2}\right)\frac{\partial y}{\partial x}-3y+\frac{4y^2}{x^3}=0,$$

$a=3$, $b=-4$, $c=-3$, $h=4$, $m=1$, $n=-3$, $bc-ah=0$, also ist die vorgelegte Gleichung:

$$x\left(3-\frac{4y}{x^3}\right)\frac{\partial y}{\partial x}-y\left(3-\frac{4y}{x^3}\right)=0,\ x\frac{\partial y}{\partial x}-y=0,\ \frac{1}{y}\frac{\partial y}{\partial x}-\frac{1}{x}=0,\ \mathrm{l}(y)-\mathrm{l}(x)=C,$$

$$\mathrm{l}\left(\frac{y}{x}\right)=C,\ \frac{y}{x}=C,\ y=Cx;$$

während allerdings der Faktor $3-\frac{4y}{x^3}=0$, $y=\frac{3}{4}x^3$ auch genügt (§. 88).

4.) $$6x^4y^2\frac{\partial y}{\partial x}-4x^3y^3=1$$

gibt in (c): $a=6$, $r=4$, $s=2$, $b=-4$, $m=2$, $n=3$, $c=1$, also $n=s+1$, nicht aber $m-r+1=0$, so dass man setzen wird $x=u^{-1}=\frac{1}{u}$, $y=z^{\frac{1}{3}}$, $\alpha=-1$, $\beta=\frac{1}{3}$, also $\delta=1$, $\delta'=2$, so dass

$$\frac{\partial z}{\partial u}+2z+\frac{1}{2}u^2=0,\ z=e^{-\int 2\partial u}\left[C-\frac{1}{2}\int u^2e^{\int 2\partial u}\partial u\right]$$

$$=e^{-2u}\left[C-\frac{1}{2}\int u^2e^{2u}\partial u\right]=Ce^{-2u}-\frac{1}{4}u^2+\frac{1}{4}u-\frac{1}{8},$$

d. h. endlich $$y^3=Ce^{-\frac{2}{x}}-\frac{1}{4x^2}+\frac{1}{4x}-\frac{1}{8}.$$

5.) $$5x^3\frac{\partial y}{\partial x}-3x^2y^5=2y,\ \text{d. h.}\ \frac{5x^3}{y}\frac{\partial y}{\partial x}-3x^2y^4=2,$$

gibt in (c): $a=5$, $r=2$, $s=-1$, $b=-3$, $m=3$, $n=4$, $c=2$, also da $s=-1$, so hat man zu setzen: $x=u^{-1}$, $y=z^{-\frac{1}{4}}$, $u=x^{-1}$, $z=y^{-4}$, $\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{\frac{\partial y}{\partial u}}{\frac{\partial x}{\partial u}}$ (§.14) $=\frac{1}{4}u^2z^{-\frac{5}{4}}\frac{\partial z}{\partial u}$, und erhält:

$$5\,u^{-2}\,z^{\frac{1}{4}}\cdot\frac{1}{4}u^{2}\,z^{-\frac{5}{4}}\frac{\partial z}{\partial u}-3\,u^{-3}\,z^{-1}=2,\ \frac{\partial z}{\partial u}-\frac{8}{5}z-\frac{12}{5}u^{-3}=0,$$

mithin (§. 66, I):

$$z=e^{\frac{8}{5}u}\left[C+\frac{12}{5}\int u^{-3}e^{-\frac{8}{5}u}\partial u\right],$$

$$\frac{1}{y^4}=e^{\frac{8}{5x}}\left[C-\frac{12}{5}\int x\; e^{-\frac{8}{5x}}\partial x\right].$$

§. 68.

Ein aus x und y zusammengesetzter Ausdruck heist homogen, wenn er so beschaffen ist, dass wenn man $y=xz$ setzt, alle einzelnen Glieder ein und dieselbe Potenz von x als gemeinschaftlichen Faktor erhalten, während sonst x nicht mehr vorkommt. Ist x^n dieser gemeinschaftliche Faktor, so heisst der Ausdruck eine homogene Funktion von x und y vom n^{ten} Grade. So ist $5x^2y^3+7x^5-8yx^4-7y^5$ homogen vom 5ten Grade, indem, wenn man $y=xz$ setzt, x^5 überall als gemeinschaftlicher Faktor erscheint und x sonst nicht mehr vorkommt; eben so ist $\frac{3x}{y}-\frac{12y}{x}+\frac{15y^2}{x^2}-8$ homogen vom 0ten Grade, $\frac{2y}{x^3}-\frac{4}{y^2}+\frac{1}{x^2}-\frac{14y^2}{x^4}$ homogen vom Grade -2 u. s. w.

I. Sind nun in der Gleichung

$$P+Q\frac{\partial y}{\partial x}=0 \qquad \text{(a)}$$

P und Q homogene Funktionen von x und y des n^{ten} Grades, so können die Veränderlichen in (a) getrennt werden. Man setze nämlich $y=xz$, also $\frac{\partial y}{\partial x}=z+x\frac{\partial z}{\partial x}$, so werden P und Q den gemeinschaftlichen Faktor x^n erhalten, so dass dann etwa $P=x^nZ$, $Q=x^nZ'$, wo Z und Z' blosse Funktionen von z sind. Alsdann wird die Gleichung (a), wenn man den gemeinschaftlichen Faktor x^n gleich weglässt;

$$Z+Z'\left(z+x\frac{\partial z}{\partial x}\right)=0,\ \ xZ'\frac{\partial z}{\partial x}+Z+Z'z=0,$$

woraus unmittelbar folgt:

$$\frac{Z'}{Z+Z'z}\,\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{x}=0,\ \int\frac{Z'\partial z}{Z+zZ'}+l(x)=C \quad (\S.\ 65),$$

in welcher Gleichung schliesslich $z=\frac{y}{x}$ zu setzen ist.

II. Die Gleichung

$$(ax+by+c)\frac{\partial y}{\partial x}+a'x+b'y+c'=0, \qquad \text{(b)}$$

kann homogen gemacht werden. Man setze nämlich $x=u+\alpha$, $y=v+\beta$, also $\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{\frac{\partial y}{\partial u}}{\frac{\partial x}{\partial u}}=\frac{\frac{\partial(v+\beta)}{\partial u}}{\frac{\partial(u+\alpha)}{\partial u}}=\frac{\partial v}{\partial u}$, so wird sie zu:

$$(au+bv+a\alpha+b\beta+c)\frac{\partial v}{\partial u}+a'u+b'v+a'\alpha+b'\beta+c'=0$$

und wird eine homogene Differentialgleichung zwischen u und v des ersten Grades, wenn man α und β so bestimmt, dass

$$a\alpha + b\beta + c = 0,\ a'\alpha + b'\beta + c' = 0,\ \alpha = \frac{bc' - b'c}{ab' - a'b},\ \beta = \frac{a'c - ac'}{ab' - a'b}.$$

Diese Auflösung ist nicht anwendbar, wenn $ab' - a'b = 0$. Für diesen Fall ist aber $b' = \frac{a'b}{a}$ und die vorgelegte Differentialgleichung heisst auch

$$(ax + by + c)\frac{\partial y}{\partial x} + a'x + \frac{a'b}{a}y + c' = 0,\ (ax + by)\left(\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{a'}{a}\right) + c\frac{\partial y}{\partial x} + c' = 0.$$

Man setze nun $ax + by = z$, $a + b\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{b}\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{a}{b}$, so wird diese Gleichung zu

$$z\left(\frac{1}{b}\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{a}{b} + \frac{a'}{a}\right) + \frac{c}{b}\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{ac}{b} + c' = 0,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}(az + ac) + (a'b - a^2)z - a^2c + abc' = 0,$$

welche nun zu §. 65, (f) gehört. Schliesslich ist $z = ax + by$ zu setzen.

III. Versucht man die Gleichung

$$(ax^m y^n + bx^r y^s + cx^p y^q + \ldots)\frac{\partial y}{\partial x} + a'x^{m'} y^{n'} + b'x^{r'} y^{s'} + c'x^{p'} y^{q'} + \ldots = 0 \qquad (c)$$

durch die Substitution $y = z^\alpha$, $\frac{\partial y}{\partial x} = \alpha z^{\alpha - 1}\frac{\partial z}{\partial x}$ zu einer homogenen Differentialgleichung zwischen z und x zu machen, so wird dieselbe zunächst seyn:

$$\alpha(ax^m y^{n\alpha + \alpha - 1} + bx^r z^{\alpha s + \ -1} + cx^p y^{\alpha q + \alpha - 1} + \ldots)\frac{\partial z}{\partial x} + a'x^{m'} z^{n'\alpha} + b'x^{r'} z^{s'\alpha}$$
$$+ c'x^{p'} z^{q'\alpha} + \ldots = 0,$$

und wird homogen seyn, wenn es möglich ist, dass die folgenden Gleichungen zugleich bestehen:

$$m + (n + 1)\alpha - 1 = r + (s + 1)\alpha - 1 = p + (q + 1)\alpha - 1 = \ldots = m' + n'\alpha = r' + s'\alpha$$
$$= p' + q'\alpha \ldots\ldots$$

1) $x\frac{\partial y}{\partial x} - y = \sqrt{x^2 + y^2}$ ist eine homogene Differentialgleichung der ersten Ordnung. Sie gibt:

$$z + x\frac{\partial z}{\partial x} - z = \sqrt{1 + z^2},\ \frac{1}{\sqrt{1 + z^2}}\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{1}{x} = 0,\ \int\frac{\partial z}{\sqrt{1 + z^2}} - l(x) = C,\ l(z + \sqrt{1 + z^2})$$
$$- l(x) = C,\ l\left(\frac{y}{x} + \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}}\right) - l(x) = C,\ l(y + \sqrt{x^2 + y^2}) - 2l(x) = C,$$
$$y + \sqrt{x^2 + y^2} = Cx^2.$$

2) $ay - ax\frac{\partial y}{\partial x} + \sqrt{x^2 + y^2}\frac{\partial y}{\partial x} = 0$ gibt $az - a\left(z + x\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \sqrt{1 + z^2}\left(z + x\frac{\partial z}{\partial x}\right) = 0$,

$$\frac{-a + \sqrt{1 + z^2}}{z\sqrt{1 + z^2}}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{x} = 0,\ \left(\frac{-a}{z\sqrt{1 + z^2}} + \frac{1}{z}\right)\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{x} = 0, \int\left(\frac{-a}{z\sqrt{1 + z^2}} + \frac{1}{z}\right)\partial z$$
$$+ l(z) = C,\ -al\left(\frac{-1 + \sqrt{1 + z^2}}{z}\right) + l(z) + l(x) = C,\ -al\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{y}\right) + l\left(\frac{y}{x}\right)$$
$$+ l(x) = C,\ -al\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{y}\right) + l(y) = C,\ y = C\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{y}\right)^a,$$
$$y^{a+1} = C(\sqrt{x^2 + y^2} - x)^a.$$

Fig. 49.

3) Man soll (Fig. 49) eine Kurve PQ konstruiren, so beschaffen, dass wenn M ein Punkt derselben, BM seine Ordinate, und OM sein Radius vector ist, ferner BD senkrecht auf OM gezogen und bis zum Durchschnitt C mit der Ordinatenaxe verlängert wird, die Gerade CM Tangente sey an PQ.

Man findet, wenn x, y die Koordinaten von M sind, leicht als Gleichungen der Geraden OM: $v=\frac{y}{x}\xi$, BC: $v=-\frac{x}{y}(\xi-x)$, CM: $v-y=-\frac{x^2-y^2}{xy}(\xi-x)$, so dass also, da CM Tangente an die Kurve seyn soll:

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{y^2-x^2}{xy},\quad xy\frac{\partial y}{\partial x}+x^2-y^2=0,$$

welche Gleichung homogen vom zweiten Grade ist. Sie gibt schliesslich: $y^2+2x^2 l(x)=Cx^2$.

4) Die Differentialgleichung $\frac{\partial y}{\partial x}=f\left(\frac{y}{x}\right)$, wo f eine beliebige Funktion bedeutet, ist homogen vom 0ten Grade. Sie gibt $z+x\frac{\partial z}{\partial x}=f(z)$, $\frac{1}{z-f(z)}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{x}=0$, $\int\frac{\partial z}{z-f(z)}+l(x)=C$, $z=\frac{y}{x}$.

5) Man sucht diejenige Kurve, in der der Winkel, den die berührende Gerade in einem Punkte derselben mit der Abszissenaxe macht, eine gegebene Funktion des Winkels ist, den der Radiusvector in denselben Punkt mit derselben Axe macht.

Ist α der erste, β der zweite Winkel, so ist $tg\,\alpha=\frac{\partial y}{\partial x}$ (§. 3), $tg\,\beta=\frac{y}{x}$, mithin hat man wie in Nr. 4:

$$\frac{\partial y}{\partial x}=f\left(\frac{y}{x}\right),\ \int\frac{\partial z}{z\quad f(z)}+l(x)=C,\ z=\frac{y}{x}.$$

Sey z. B. verlangt, dass $\alpha=2\beta$, so ist $tg\,\alpha=tg\,2\beta=\frac{2\,tg\,\beta}{1-tg^2\beta}$, d. h. $\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{2\frac{y}{x}}{1-\frac{y^2}{x^2}}$, oder es ist $f(z)=\frac{2z}{1-z^2}$, also

$$\int\frac{\partial z}{z-\frac{2z}{1-z^2}}+l(x)=C,\ -\int\frac{1-z^2}{z(1+z^2)}\partial z+l(x)=C,\ l\left(\frac{1+z^2}{z}\right)+l(x)=C,$$

d. h.

$$l\left(\frac{x^2+y^2}{y}\right)=C,\ x^2+y^2-Cy=0,$$

d. h. die Kurve ist ein Kreis, dessen Mittelpunkt in der Ordinatenaxe liegt, in der Entfernung $\frac{C}{2}$ vom Anfangspunkt, während der Kreis durch letztern geht. (Es ist dies der Satz vom Winkel der Tangente und Sehne.)

§. 69.

I. Es kann sich ereignen, dass die Differentialgleichung

$$P+Q\frac{\partial y}{\partial x}=0,\text{ oder } Pdx+Qdy=0 \qquad (a)$$

geradezu durch Differentiation einer Gleichung $f(x,y)=C$ entstanden ist,

d. h. dass $P+Q\frac{\partial y}{\partial x}$ identisch ist mit $\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}$ (§. 5). Alsdann muss offenbar $P=\frac{\partial f}{\partial x}$, $Q=\frac{\partial f}{\partial y}$ seyn, woraus folgt (§. 12):

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}. \qquad \text{(b)}$$

Ist die Gleichung (b) nicht richtig, so wird sicherlich (a) nicht unmittelbar durch Differentiation entstanden seyn. Umgekehrt aber, wenn (b) richtig ist, ist diess der Fall. Statt diesen Satz theoretisch zu beweisen, wollen wir, unter Voraussetzung der Gleichung (b), die Grösse $f(x,y)$ thatsächlich bestimmen. Vorausgesetzt nämlich, $f(x,y)$ sey so beschaffen, dass $\frac{\partial f}{\partial x}=P$, $\frac{\partial f}{\partial y}=Q$, so folgt zuerst aus

$$\frac{\partial f}{\partial x}=P: f(x,y)=\int P\partial x+R,$$

worin die Integration bloss nach x geschieht, und R eine Funktion von y, ohne x, seyn wird (§. 47). Hieraus folgt (§. 45):

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\int\frac{\partial P}{\partial y}\partial x+\frac{\partial R}{\partial y},$$

und da $\frac{\partial f}{\partial y}=Q$:

$$\frac{\partial R}{\partial x}=Q-\int\frac{\partial P}{\partial y}\partial x.$$

Da nun R bloss y enthalten soll, so muss auch $Q-\int\frac{\partial P}{\partial y}\partial x$ kein x enthalten, also der Differentialquotient dieser Grösse nach $x=0$ seyn. Derselbe ist aber $=\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial\int\frac{\partial P}{\partial y}\partial x}{\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}$, und ist 0 vermöge der Gleichung (b). Demnach ist

$$R=\int\left[Q-\int\frac{\partial P}{\partial y}\partial x\right]\partial y+C,$$

wo C nun weder x noch y enthält; also endlich

$$f(x,y)=\int P\partial x+\int\left[Q-\int\frac{\partial P}{\partial y}\partial x\right]\partial y+C,$$

woraus wirklich folgt:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=P+\int\left[\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right]\partial y=P,\quad \frac{\partial f}{\partial y}=\int\frac{\partial P}{\partial y}\partial x+Q-\int\frac{\partial P}{\partial y}\partial x=Q,$$

so dass also, unter Voraussetzung der Gleichung (b), die Integralgleichung von (a) ist:

$$\int P\partial x+\int\left[Q-\int\frac{\partial P}{\partial y}\partial x\right]\partial y=C. \qquad \text{(c)}$$

Offenbar erhielte man ebenso:

$$\int Q\partial y+\int\left[P-\int\frac{\partial Q}{\partial x}\partial y\right]\partial x=C. \qquad \text{(c')}$$

1.) $x^m+y+(y^n+x)\frac{\partial y}{\partial x}=0: P=x^m+y,\ Q=y^n+x,\ \frac{\partial P}{\partial y}=1, \frac{\partial Q}{\partial x}=1;$

$\int P \partial x = \frac{x^{m+1}}{m+1} + yx, \int \frac{\partial P}{\partial y} \partial x = x, \; Q - \int \frac{\partial P}{\partial y} \partial x = y^n, \int \left[Q - \int \frac{\partial P}{\partial y} \partial x \right] \partial y = \frac{y^{n+1}}{n+1}$, also

$$\frac{x^{m+1}}{m+1} + yx + \frac{y^{n+1}}{n+1} = C.$$

2.) $\frac{1}{x} + \frac{y^2 + y\sqrt{x^2+y^2}}{x^3} + \left(\frac{1}{2y} - \frac{y + \sqrt{x^2+y^2}}{x^2}\right) \cdot \frac{\partial y}{\partial x} = 0$ gibt $P = \frac{1}{x} + \frac{y^2 + y\sqrt{x^2+y^2}}{x^3}$, $Q = \frac{1}{2y} - \frac{y + \sqrt{x^2+y^2}}{x^2}$, $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{2y}{x^3} + \frac{x^2 + 2y^2}{x^3\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, $\int P \partial x = l(x) - \frac{y^2}{2x^2} - \frac{y\sqrt{x^2+y^2}}{2x^2} + \frac{1}{2} l\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2} - y}{x}\right)$, $\int \frac{\partial P}{\partial y} \partial x = -\frac{y}{x^2} - \frac{\sqrt{x^2+x^2}}{x^2}$, $\int \left[Q - \int \frac{\partial P}{\partial y} \partial x \right] = \frac{1}{2} l(y)$, also

$$l(x) - \frac{y^2}{2x^2} - \frac{y\sqrt{x^2+y^2}}{2x^2} + \frac{1}{2} l\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2} - y}{x}\right) + \frac{1}{2} l(y) = C.$$

II. Es ist nun aber ganz wohl denkbar, dass, nachdem die Gleichung $f(x,y) = C$ differenzirt worden, ein allen Gliedern gemeinschaftlicher Faktor $\varphi(x, y)$ weggelassen wurde und dadurch erst die Gleichung $P + Q\frac{\partial y}{\partial x} = 0$ entstanden ist. Alsdann wird freilich letztere nicht in dem oben betrachteten Falle seyn, würde jedoch, wenn man den Faktor $\varphi(x, y)$ herstellen könnte, leicht in denselben zu bringen seyn. Diesen Faktor nun nennt man den integrirenden Faktor und es lässt sich leicht nachweisen, dass ein solcher immer vorhanden seyn muss. Gesetzt nämlich, die Integralgleichung der vorgelegten Differentialgleichung $P + Q\frac{\partial y}{\partial x} = 0$ sey $\psi(x, y, C) = 0$, und man löse letztere Gleichung nach C auf, wodurch sie die Form $f(x, y) = C$ annehme, so folgt hieraus

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} = 0, \; \frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}},$$

wo nun von der willkürlichen Konstanten keine Spur mehr vorkommt. Da auch $\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{P}{Q}$ ist, so muss also

$$\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{P}{Q} \qquad \text{(d)}$$

seyn, d. h. wenn $\frac{P}{Q} = \varrho$, so ist nothwendig auch $\frac{\partial f}{\partial x} = \varrho \frac{\partial f}{\partial y}$ und $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}\left(\varrho + \frac{\partial y}{\partial x}\right) = \frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{P}{Q} + \frac{\partial y}{\partial x}\right) = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{Q}\left[P + Q\frac{\partial y}{\partial x}\right]$, so dass also, wenn man $P + Q\frac{\partial y}{\partial x}$ mit $\frac{1}{Q}\frac{\partial f}{\partial y}$ multiplizirt, diese Grösse dann identisch ist mit $\frac{\partial f}{\partial x} +$

$\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}$, so dass mithin $\frac{1}{Q}\frac{\partial f}{\partial y}$ ein integrirender Faktor seyn wird. Man kann sich dies auch noch in folgender Weise erklären. Aus (d) folgt, dass $P = \mu\frac{\partial f}{\partial x}$, $Q = \mu\frac{\partial f}{\partial y}$, mithin

$$P + Q\frac{\partial y}{\partial x} = \mu\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}\right), \quad \frac{1}{\mu}\left(P + Q\frac{\partial y}{\partial x}\right) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x},$$

dass also $\frac{1}{\mu}$ ein integrirender Faktor ist. Aber $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{Q}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{P}\frac{\partial f}{\partial x}$, wie oben.

Kennt man aber einmal einen solchen Faktor, so kann man sogleich unendlich viele finden. Sey nämlich v ein solcher, also $v\left(P + Q\frac{\partial y}{\partial x}\right) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}$, und man setze $f(x, y) = u$, $\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}f(x,y)$ (§. 7), so ist, wenn $\varphi(u)$ eine ganz beliebige Funktion von u bedeutet:

$$\varphi(u)\,v\left(P + Q\frac{\partial y}{\partial x}\right) = \varphi(u)\frac{\partial}{\partial x}f(x,y) = \varphi(u)\frac{\partial u}{\partial x},$$

und da $\varphi(u)\frac{\partial u}{\partial x}$ immer ein genauer Differentialquotient nach x, nämlich von $\int\varphi(u)\partial u$ ist, so ist auch $v\varphi(u)\left(P + Q\frac{\partial y}{\partial x}\right)$ ein solcher, so dass auch $v\varphi(u)$ ein integrirender Faktor seyn wird.

Man kann sich nun die Frage stellen, ob man nicht mittelst der Gleichung (b) im Stande ist, den integrirenden Faktor zu finden. Sey also wieder (a) die vorgelegte Gleichung, v ihr integrirender Faktor, so müsste

$$\frac{\partial(vP)}{\partial y} = \frac{\partial(vQ)}{\partial x}, \quad P\frac{\partial v}{\partial y} + v\frac{\partial P}{\partial y} = Q\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial Q}{\partial x}, \quad v\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) = Q\frac{\partial v}{\partial x} - P\frac{\partial v}{\partial y} \qquad (e)$$

seyn; allein diese Gleichung ist schwerer aufzulösen, als die vorgelegte, so dass sie hier Nichts fruchten kann. In gewissen besonderen Fällen jedoch leitet sie zur Kenntniss von v. Gesetzt nämlich

$$\frac{1}{Q}\left[\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right]$$

enthalte kein y, so können wir annehmen, auch v sey unabhängig von y, also $\frac{\partial v}{\partial y} = 0$ setzen und haben dann aus (e):

$$\frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{Q}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right), \quad l(v) = \int\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)\frac{\partial x}{Q} + C, \quad v = Ce^{\int\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)\frac{\partial x}{Q}}. \qquad (f)$$

Dessgleichen, wenn $\frac{1}{P}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)$ unabhängig von x seyn sollte, wäre v unabhängig von x und

$$-\frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{P}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right), \quad v = Ce^{-\int\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right)\frac{\partial y}{P}}. \qquad (g)$$

Kann man die Gleichung (a) in folgende Form bringen:

$$M + N\frac{\partial y}{\partial x} + M_1 + N_1\frac{\partial y}{\partial x} + M_2 + N_2\frac{\partial y}{\partial x} + \ldots = 0, \qquad (h)$$

und man wäre im Stande, integrirende Faktoren $v, v_1, v_2, \ldots$ für $M + N\frac{\partial y}{\partial x}$, $M_1 + N_1\frac{\partial y}{\partial x}$, $M_2 + N_2\frac{\partial y}{\partial x}$, ... aufzufinden, so dass identisch

$v\left(M+N\frac{\partial y}{\partial x}\right)=f(x,y)$, $v_1\left(M_1+N_1\frac{\partial y}{\partial x}\right)=f_1(x,y)$, $v_2\left(M_2+N_2\frac{\partial y}{\partial x}\right)=f_2(x,y),\ldots,$
so wären, wenn $f(x,y)=u$, $f_1(x,y)=u_1,\ldots$, auch $v\varphi(u)$, $v_1\varphi_1(u_1),\ldots$ integrirende Faktoren von $M+N\frac{\partial y}{\partial x}$, $M_1+N_1\frac{\partial y}{\partial x},\ldots\ldots$, und wenn man $\varphi(u)$, $\varphi_1(u_1),\ldots\ldots$ so bestimmt, dass

$$v\varphi(u)=v_1\varphi_1(u_1)=v_2\varphi_2(u_2)=\ldots\ldots, \qquad \text{(i)}$$

so ist $v\varphi(u)$ ein integrirender Faktor der Gleichung (h).

III. Seyen $\varphi(x)$, $\psi(x)$ bekannte Funktionen von x, und die Differentialgleichung

$$a\varphi(y)\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x}+b\varphi(x)\frac{\partial\varphi(y)}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}+\psi(y)\frac{\partial y}{\partial x}=0 \qquad \text{(k)}$$

vorgelegt, so lässt sie sich in der so eben angedeuteten Weise abtrennen und es ist

$$M=a\varphi(y)\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x},\quad N=b\varphi(x)\frac{\partial\varphi(y)}{\partial y},\quad M_1=0,\quad N_1=\psi(y),$$

wo nun $M_1+N_1\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\int\psi(y)\partial y$ ist, so dass $v_1=1$. Ferner ist $\frac{\partial M}{\partial y}=a\frac{\partial\varphi(y)}{\partial y}\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x}$, $\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{b\,\partial\varphi(x)}{\partial x}\frac{\partial\varphi(y)}{\partial y}$, also $\frac{1}{N}\left[\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right]=\frac{1}{b\varphi(x)}\left[a\frac{\partial\varphi(y)}{\partial x}-b\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x}\right]=\frac{a-b}{b}\frac{\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x}}{\varphi(x)}=\frac{a-b}{b}\frac{\partial}{\partial x}l(\varphi(x))$, mithin nach (f):

$$v=e^{\frac{a-b}{b}l\varphi(x)}=\varphi(x)^{\frac{a-b}{b}};$$

aber auch $\frac{1}{M}\left[\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right]=\frac{a-b}{a\varphi(y)}\frac{\partial\varphi(y)}{\partial y}=\frac{a-b}{a}\frac{\partial l\varphi(y)}{\partial y}$, also auch $v=e^{-\frac{(a-b)}{a}l\varphi(y)}=\varphi(y)^{\frac{b-a}{a}}$, und gerade diese letztere Form ist bequemer, da jede Funktion von y auch integrirender Faktor von $\psi(y)\frac{\partial y}{\partial x}$ ist. Multiplizirt man also die Gleichung (k) mit $\varphi(y)^{\frac{b-a}{a}}$, so hat man

$$a\varphi(y)^{\frac{b}{a}}\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x}+b\varphi(x)\varphi(y)^{\frac{b-a}{a}}\frac{\partial\varphi(y)}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}+\varphi(y)^{\frac{b-a}{a}}\psi(y)\frac{\partial y}{\partial x}=0$$

oder

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{a\varphi(x)\varphi(y)^{\frac{b}{a}}\right\}+\frac{\partial}{\partial x}\int\varphi(y)^{\frac{b-a}{a}}\psi(y)\partial y=0,$$

woraus als Integralgleichung von (k) unmittelbar sich ergibt:

$$a\varphi(x)\varphi(y)^{\frac{b}{a}}+\int\varphi(y)^{\frac{b-a}{a}}\psi(y)\partial y=C. \qquad \text{(k')}$$

Ist z. B. $\varphi(x)=x^m$, so ist die (k):

$$m a x^{m-1}y^m+m b x^m y^{m-1}\frac{\partial y}{\partial x}+\psi(y)\frac{\partial y}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial y}{\partial x}+\frac{m a x^{m-1}y^m}{b m x^m y^{m-1}+\psi(y)}=0,$$

deren Integralgleichung also:

$$a x^m y^{\frac{mb}{a}}+\int y^{\frac{m(b-a)}{a}}\psi(y)\partial y=C.$$

Für $\psi(y)=y^m$ etwa:

$$\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{max^{m-1}y}{bmx^m+y}=0,\quad \begin{array}{l} ax^m y^{\frac{mb}{a}}+\int y^{\frac{mb}{a}}\partial y=C, \\ ax^m y^{\frac{mb}{a}}+\frac{a}{mb+a}y^{\frac{mb+a}{a}}=C. \end{array}$$

IV. Die Gleichung

$$a\varphi(x)\frac{\partial\varphi(y)}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}+b\varphi(y)\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x}+\psi(x)=0 \qquad (1)$$

kann in ähnlicher Weise behandelt werden. Man hat dann $M=b\varphi(y)\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x}$, $N=a\varphi(x)\frac{\partial\varphi(y)}{\partial y}$, also $\frac{\partial M}{\partial y}=b\frac{\partial\varphi(y)}{\partial y}\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x}$, $\frac{\partial N}{\partial x}=a\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x}\frac{\partial\varphi(y)}{\partial y}$, $\frac{1}{N}\left[\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right]=\frac{b-a}{a}\frac{\partial l\varphi(x)}{\partial x}$, also $v=e^{\frac{b-a}{a}l\varphi(x)}=\varphi(x)^{\frac{b-a}{a}}$, so dass $\varphi(x)^{\frac{b-a}{a}}$ ein integrirender Faktor von (1) ist. Multiplizirt man, so erhält man:

$$a\varphi(x)^{\frac{b}{a}}\frac{\partial\varphi(y)}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}+b\varphi(y)\varphi(x)^{\frac{b-a}{a}}\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x}+\psi(x)\varphi(x)^{\frac{b-a}{a}}=0,$$

d. h.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[a\varphi(x)^{\frac{b}{a}}\varphi(y)\right]+\frac{\partial}{\partial x}\int\psi(x)\varphi(x)^{\frac{b-a}{a}}\partial x=0,$$

so dass die Integralgleichung von (1) ist:

$$a\varphi(x)^{\frac{b}{a}}\varphi(y)+\int\psi(x)\varphi(x)^{\frac{b-a}{a}}\partial x=C. \qquad (1')$$

Die Gleichung (a) in §. 66, I lässt sich unter die Form (1) bringen, wenn $\varphi(y)=y$, da alsdann (1) gleich ist:

$$a\varphi(x)\frac{\partial y}{\partial x}+by\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x}+\psi(x)=0,\quad \frac{\partial y}{\partial x}+\frac{b}{a}y\frac{\partial l\varphi(x)}{\partial x}+\frac{\psi(x)}{a\varphi(x)}=0,$$

so dass bloss $b=a=1$ und

$$\frac{\partial l\varphi(x)}{\partial x}=X,\ l\varphi(x)=\int X\partial x,\ \varphi(x)=e^{\int X\partial x},\ \frac{\psi(x)}{\varphi(x)}=X_1,\ \psi(x)=X_1e^{\int X\partial x}$$

zu setzen ist. Demnach ist nach (1'):

$$e^{\int X\partial x}y+\int X_1e^{\int X\partial x}\partial x=C,$$

was eben die Gleichung (c) des §. 66 gibt.

Für $\varphi(x)=\sin x$ hat man:

$$a\sin x\cos y\frac{\partial y}{\partial x}+b\sin y\cos x+\psi(x)=0,\ a\sin^{\frac{b}{a}}x\sin y+\int\psi(x)\sin^{\frac{b-a}{a}}x\,\partial x=C.$$

Für $\varphi(x)=l(x)$:

$$\frac{al(x)}{y}\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{bl(y)}{x}+\psi(x)=0,\ al(x)^{\frac{b}{a}}l(y)+\int\psi(x)l(x)^{\frac{b-a}{a}}\partial x=C.$$

Für $\varphi(x)=x^m$:

$$max^m y^{m-1}\frac{\partial y}{\partial x}+mby^m x^{m-1}+\psi(x)=0,\ ax^{\frac{mb}{a}}y^m+\int\psi(x)x^{\frac{m(a-b)}{a}}\partial x=C.$$

V. Bei der Unmöglichkeit, den integrirenden Faktor direkt zu bestimmen, kann man sich die Frage stellen, wie eine Gleichung beschaffen seyn

müsse, damit sie durch einen der Form nach vorgeschriebenen Faktor integrirbar werde. So wollen wir etwa uns die Frage stellen, wie die Grössen X, X_1, ξ, ξ_1, die wir als blosse Funktionen von x voraussetzen, beschaffen seyn müssen, damit die Gleichung

$$\frac{\partial y}{\partial x}+Xy^2+X_1=0 \qquad (m)$$

durch den Faktor

$$\frac{F(x)}{y^2+2\xi y+\xi_1} \qquad (n)$$

integrirbar werde, wo F(x) eine bekannte Funktion von x ist. Es muss also identisch seyn:

$$\frac{\partial\left(\frac{F(x)}{y^2+2\xi y+\xi_1}\right)}{\partial x}=\frac{\partial\left(\frac{(Xy^2+X_1)F(x)}{y^2+2\xi y+\xi_1}\right)}{\partial y},$$

d. h.

$$(y^2+2\xi y+\xi_1)F'(x)-\left(2y\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial \xi_1}{\partial x}\right)F(x)=(y^2+2\xi y+\xi_1)2XF(x)y-(Xy^2+X_1)F(x)(2y+2\xi),$$

oder

$$y^2[F'(x)-2\xi XF(x)]+y\left[2\xi F'(x)-2\frac{\partial \xi}{\partial x}F(x)-2\xi_1 XF(x)+2X_1F(x)\right]+\xi_1 F'(x)-\frac{\partial \xi_1}{\partial x}F(x)+2\xi X_1F(x)=0,$$

so dass also

$$F'(x)-2\xi XF(x)=0,\ \xi F'(x)-\frac{\partial \xi}{\partial x}F(x)-\xi_1 XF(x)+X_1F(x)=0,\ \xi_1F'(x)-\frac{\partial \xi_1}{\partial x}F(x)+2\xi X_1F(x)=0.$$

Hieraus folgt

$$\xi=\frac{F'(x)}{2XF(x)},\ \text{also}\ \frac{\partial \xi}{\partial x}=\frac{XF(x)F''(x)-F'(x)\left[\frac{\partial X}{\partial x}F(x)+XF'(x)\right]}{2X^2F(x)^2},$$

und dann aus der zweiten Gleichung:

$$X_1=X\xi_1+\frac{XF(x)F''(x)-\frac{\partial X}{\partial x}F(x)F'(x)-2XF'(x)^2}{2X^2F(x)^2};$$

somit wenn man diesen Werth in die dritte Gleichung einsetzt:

$$\xi_1F'(x)-\frac{\partial \xi_1}{\partial x}F(x)+\frac{F'(x)}{X}\left\{\xi_1 X+\frac{XF(x)F''(x)-\frac{\partial X}{\partial x}F(x)F'(x)-2XF'(x)^2}{2X^2F(x)^2}\right\}=0$$

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial x}-2\frac{F'(x)}{F(x)}\xi_1-\frac{XF(x)F''(x)-\frac{\partial X}{\partial x}F(x)F'(x)-2XF'(x)^2}{2X^2F(x)^3}F'(x)=0,$$

mithin da $\int\frac{F'(x)}{F(x)}\partial x=lF(x)$, nach §. 66, I:

$$\xi_1=F(x)^2\left[C+\frac{1}{2}\int\frac{XF(x)F''(x)-\frac{\partial X}{\partial x}F(x)F'(x)-2XF'(x)^2}{X^2F(x)^5}F'(x)\partial x\right],$$

so dass mithin in der Gleichung (m) X eine beliebige Funktion von x seyn kann; dann aber:

$$\xi=\frac{F'(x)}{2XF(x)},\ \xi_1=CF(x)^2+\frac{1}{2}F(x)^2\int\frac{XF(x)F''(x)-\frac{\partial X}{\partial x}F(x)F'(x)-2XF'(x)^2}{X^3F(x)^5}F'(x)\partial x,$$

$$X_1=X\xi_1+\frac{XF(x)F''(x)-\frac{\partial X}{\partial x}F(x)F'(x)-2XF'(x)^2}{2X^2F(x)^2}$$

seyn muss, damit (m) durch den Faktor (n) integrabel wird.

3) Sey $F(x)=1$, $X=a$ d. h. konstant, so ist $F'(x)=0$, $F''(x)=0$, also

$$\xi=0,\ \xi_1=C,\ X_1=aC,$$

d. h. die Gleichung

$$\frac{\partial y}{\partial x}+ay^2+aC=0$$

wird integrabel durch den Faktor $\frac{1}{y^2+C}$, wie natürlich, da derselbe die Veränderlichen trennt.

4) Sey $F(x)=x^m$, $X=a$, so ist $F'(x)=mx^{m-1}$, $F''(x)=m(m-1)x^{m-2}$, also

$$\xi=\frac{m}{2ax},\ \xi_1=Cx^{2m}+\frac{1}{2}x^{2m}\int\frac{m(m-1)ax^{2m-2}-2am^2x^{2m-2}}{a^3x^{5m}}mx^{m-1}\partial x=Cx^{2m}+$$

$$\frac{m^2}{4a^2x^2},\ X_1=aCx^{2m}+\frac{m^2}{4ax^2}-\frac{m(m+1)}{2ax^2}=aCx^{2m}-\frac{m(m+2)}{4ax^2},$$

mithin ist die Gleichung

$$\frac{\partial y}{\partial x}+ay^2+bx^{2m}-\frac{m(m+2)}{4ax^2}=0$$

integrabel zu machen durch den Faktor

$$\frac{x^m}{y^2+\frac{my}{ax}+\frac{bx^{2m}}{a}+\frac{m^2}{4a^2x^2}}.$$

Will man nun wirklich integriren, so ist in I:

$$P=\frac{ay^2+bx^{2m}-\frac{m(m+2)}{4ax^2}}{y^2+\frac{my}{ax}+\frac{bx^{2m}}{a}+\frac{m^2}{4a^2x^2}}.x^m,\ Q=\frac{x^m}{y^2+\frac{my}{ax}+\frac{bx^{2m}}{a}+\frac{m^2}{4a^2x^2}},$$

also wenn man die Form (c') wählt:

$$\int Q\,\partial y=\sqrt{\frac{a}{b}}\,\mathrm{arc}\left(\mathrm{tg}=\frac{2y+\frac{m}{ax}}{2x^m\sqrt{\frac{b}{a}}}\right)=\sqrt{\frac{a}{b}}\,\mathrm{arc}\left(\mathrm{tg}=\frac{2axy+m}{2ax^{m+1}}\sqrt{\frac{a}{b}}\right),$$

$$\text{wenn } \frac{a}{b}>0,$$

$$=\sqrt{\frac{-a}{b}}\,l\left(\frac{2y+\frac{m}{ax}-2x^m\sqrt{\frac{-b}{a}}}{2\sqrt{y^2+\frac{my}{ax}+\frac{bx^{2m}}{a}+\frac{m^2}{4a^2x^2}}}\right),\ \text{wenn } \frac{b}{a}<0.$$

Ferner

$$\int\frac{\partial Q}{\partial x}\partial y=\frac{2a^2x^m[2axy-(2axy+m)(m+1)]}{4a^3bx^{2m+2}+4a^3x^2y^2+4a^2mxy+m^2a},$$

$$P-\int\frac{\partial Q}{\partial x}\partial y=\frac{\left(ay^2+bx^{2m}-\frac{m(m+2)}{4ax^2}\right)x^m}{y^2+\frac{my}{ax}+\frac{bx^{2m}}{a}+\frac{m^2}{4a^2x^2}}+\frac{x^m}{2ax^2}\cdot\frac{2maxy+m(m+1)}{y^2+\frac{my}{ax}+\frac{bx^{2m}}{a}+\frac{m^2}{4a^2x^2}}=$$

$$\frac{x^m\left(ay^2+bx^{2m}+\frac{my}{x}+\frac{m^2}{4ax^2}\right)}{y^2+\frac{my}{ax}+\frac{bx^{2m}}{a}+\frac{m}{4a^2x^2}}=ax^m,$$

$$\int\left[P-\int\frac{\partial Q}{\partial x}\partial z\right]\partial x=\frac{ax^{m+1}}{m+1},$$

so dass also die Integralgleichung ist:

$$\sqrt{\frac{a}{b}}\,\text{arc}\left(\text{tg}=\frac{2axy+m}{2ax^{m+1}}\sqrt{\frac{a}{b}}\right)+\frac{ax^{m+1}}{m+1}=C,\quad \frac{a}{b}>0,$$

$$\sqrt{\frac{-a}{b}}\,l\left(\frac{2y+\frac{m}{ax}-2x^m\sqrt{\frac{-b}{a}}}{2\sqrt{\left(y^2+\frac{my}{ax}+\frac{bx^{2m}}{a}+\frac{m}{4a^2x^2}\right)}}\right)+\frac{ax^{m+1}}{m+1}=C,\quad \frac{a}{b}<0.$$

Für $m=-1$ tritt an die Stelle von $\frac{x^{m+1}}{m+1}$: $l(x)$. (Die zweite Form kann übrigens aus der ersten abgeleitet werden, wenn man die Gleichung (10) in meinen „Grundzügen" S. 199 beachtet.)

5) Sey $X=aF(x)$, so ist

$$\xi=\frac{F'(x)}{2aF(x)^2},\quad \xi_1=CF(x)^2+\frac{1}{2}\frac{F(x)^2}{a^2}\int\frac{F(x)F''(x)-3F'(x)^2}{F(x)^7}F'(x)\partial x,$$

$$X_1=aCF(x)^3+\frac{1}{2}\frac{F(x)^3}{a}\int\frac{F(x)F''(x)-3F'(x)^2}{F(x)^7}F'(x)\partial x+\frac{F(x)F''(x)-3F'(x)^2}{2aF(x)^3}.$$

Für $F(x)=x^m$ wäre also

$$\xi=-\frac{m}{2ax^{m+1}},\quad \xi_1=Cx^{2m}+\frac{m^2}{4a^2x^{2m+2}},\quad X_1=aCx^{3m}-\frac{(3m+2)m}{4ax^{m+2}},$$

so dass die Gleichung

$$\frac{\partial y}{\partial x}+ax^my^2+bx^{3m}-\frac{m(3m+2)}{4ax^{m+2}}=0$$

integral wird durch den Faktor

$$\frac{x^m}{y^2+\frac{my}{ax^{m+1}}+\frac{bx^{2m}}{a}+\frac{m^2}{4a^2x^{2m+2}}}.$$

Als Integralgleichung findet sich wie oben

$$\sqrt{\frac{a}{b}}\,\text{arc}\left(\text{tg}=\frac{2ax^{m+1}y+m}{2ax^{2m+1}}\sqrt{\frac{a}{b}}\right)+\frac{ax^{2m+1}}{2m+1}=C,\quad \frac{a}{b}>0,$$

$$\sqrt{\frac{-a}{b}}\,l\left(\frac{2y+\frac{m}{ax^{m+1}}-2x^m\sqrt{\frac{-b}{a}}}{2\sqrt{\left(2y+\frac{my}{ax^{m+1}}+\frac{bx^{2m}}{a}+\frac{m^2}{4a^2x^{2m+2}}\right)}}\right)+\frac{ax^{2m+1}}{2m+1}=C,\quad \frac{a}{b}<0.$$

§. 70.

Im Seitherigen haben wir immer vorausgesetzt, $\frac{\partial y}{\partial x}$ komme in der gegebenen Gleichung in der ersten Potenz vor. Wird diese Beschränkung aufgehoben, so stellt sich die Aufgabe allgemeiner so: Die Integralgleichung der Gleichung

$$F_n\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^n+F_{n-1}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^{n-1}+\ldots+F_1\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)+F_0=0 \qquad (a)$$

zu finden, wenn $F_0, F_1, \ldots, F_n$ gewisse gegebene Funktionen von x und y sind.

Der direkteste Weg hiezu wäre nun allerdings, die Gleichung (a) nach $\frac{\partial y}{\partial x}$ aufzulösen, d. h. sie in ihre einfachen Faktoren zu zerfällen, so dass sie identisch wäre mit

$$F_n\left(\frac{\partial y}{\partial x}-f_1\right)\left(\frac{\partial y}{\partial x}-f_2\right)\ldots\left(\frac{\partial y}{\partial x}-f_n\right)=0, \qquad (a')$$

wo $f_1, f_2, \ldots, f_n$ bekannte Funktionen von x und y sind. Da alsdann die Gleichung (a'), d. h. (a), befriedigt ist, wenn entweder

$$\frac{\partial y}{\partial x}-f_1=0,\ \text{oder}\ \frac{\partial y}{\partial x}-f_2=0,\ \text{oder}\ \frac{\partial y}{\partial x}-f_3=0,\ldots,\ \text{oder}\ \frac{\partial y}{\partial x}-f_n=0, \qquad (b)$$

so wird auch, wenn

$$\varphi_1(x,y,C_1)=0,\ \varphi_2(x,y,C_2)=0,\ldots,\varphi_n(x,y,C_n)=0 \qquad (c)$$

die Integralgleichungen der Gleichungen (b) sind, jede der Gleichungen (c) der Gleichung (a) genügen, und also eine Auflösung derselben seyn, wobei $C_1, C_2, \ldots, C_n$ willkürliche Konstanten sind. Die Gleichung

$$\varphi_1(x,y,C_1)\,\varphi_2(x,y,C_2)\ldots\varphi_n(x,y,C_n)=0 \qquad (d)$$

wird eben so der (a) genügen, da aus ihr jede der Gleichungen (c) folgen kann, indem man den einen oder andern Faktor Null setzt, und andere Gleichungen als (c) hieraus nicht folgen können. Die Grössen $C_1, C_2, \ldots C_n$ kann man ganz wohl durch dasselbe Zeichen C bezeichnen, da die Gleichung (d) doch nur sagt, dass einer oder der andere ihrer Faktoren Null ist, während es die übrigen nicht sind. Ist also z. B. $\varphi_1(x,y,C_1)=0$, so ist eben C_1 eine willkürliche Konstante, ob dieselbe nun mit C oder C_1 bezeichnet worden. Man kann also als allgemeine Integralgleichung von (a) ansetzen:

$$\varphi_1(x,y,C)\,\varphi_2(x,y,C)\ldots\varphi_n(x,y,C)=0. \qquad (d')$$

1.) $$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2=a^2,\ \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2-a^2=0,\ \left(\frac{\partial y}{\partial x}+a\right)\left(\frac{\partial y}{\partial x}-a\right)=0;$$

aber $\frac{\partial y}{\partial x}+a=0$ gibt $y+ax+C=0$; $\frac{\partial y}{\partial x}-a=0$ gibt $y-ax+C=0$, also ist

$$(y+ax+C)(y-ax+C)=0,\ (y+C)^2-a^2x^2=0.$$

2.) $$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2=ax,\ \left(\frac{\partial y}{\partial x}-\sqrt{ax}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial x}+\sqrt{ax}\right)=0;$$

$\frac{\partial y}{\partial y}-\sqrt{ax}=0$ gibt $y-\frac{2}{3}x\sqrt{ax}+C=0$, $\frac{\partial y}{\partial x}+\sqrt{ax}=0$ ebenso $y+\frac{2}{3}x\sqrt{ax}+C=0$, also

$$\left(y-\frac{2}{3}x\sqrt{ax}+C\right)\left(y+\frac{2}{3}x\sqrt{ax}+C\right)=0,\ (y+C)^2-\frac{4}{9}ax^3=0.$$

3.) $$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^3 - (xy + x^2 + y^2)\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + (x^3 y + y^3 x + x^2 y^2)\frac{\partial y}{\partial x} - x^3 y^3 = 0,$$
$$\left(\frac{\partial y}{\partial x} - xy\right)\left(\frac{\partial y}{\partial x} - x^2\right)\left(\frac{\partial y}{\partial x} - y^2\right) = 0.$$

$\frac{\partial y}{\partial x} - xy = 0,\ \frac{1}{y}\frac{\partial y}{\partial x} - x = 0$ (§. 65), $l(y) - \frac{1}{2}x^2 + C = 0,\ y = Ce^{\frac{1}{2}x^2},\ y - Ce^{\frac{1}{2}x^2} = 0;$

$\frac{\partial y}{\partial x} - x^2 = 0,\ y - \frac{x^3}{3} + C = 0;$

$\frac{\partial y}{\partial x} - y^2 = 0,\ \frac{1}{y^2}\frac{\partial y}{\partial x} - 1 = 0,\ -\frac{1}{y} - x + C = 0,\ y = \frac{-1}{x+C},\ y + \frac{1}{x+C} = 0;$

$$\left(y - Ce^{\frac{1}{2}x^2}\right)\left(y - \frac{x^3}{3} + C\right)\left(y + \frac{1}{x+C}\right) = 0.$$

4.) Die Gleichung
$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^3 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \frac{x}{y}\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{x}{2y} = 0$$
führt eben so zu
$$\left(x - \frac{1}{2}x + C\right)\left[y^{\frac{3}{2}} - (-x)^{\frac{3}{2}} + C\right]\left[y^{\frac{3}{2}} + (-x)^{\frac{3}{2}} + C\right] = 0.$$

Wie man sieht, verlangt diese Methode die Auflösung höherer Gleichungen und ist schon desshalb nicht immer anwendbar, abgesehen davon, dass man in manchen Fällen leichter zum Ziele gelangen kann. Wir wollen nachfolgend einige der besondern Methoden angeben, nach denen in gewissen Fällen sich die Integralgleichung finden lässt.

I. Sey
$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^n + Y_1\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^{n-1} + Y_2\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^{n-2} + \ldots + Y_{n-1}\frac{\partial y}{\partial x} + Y_n = 0. \qquad (e)$$
die vorgelegte Gleichung, in der $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ kein x enthalten und im Allgemeinen
$$Y_r = A + By + Cy^2 + \ldots + My^{n-1},$$
also eine **ganze rationale Funktion** von y höchstens vom Grade $n-1$ (wobei $A, B, \ldots, M$ konstant sind). Man setze nun $\frac{\partial y}{\partial x} = u$, so wird die (e) zu
$$u^n + Y_1 u^{n-1} + Y_2 u^{n-2} + \ldots + Y_{n-1} u + Y_n = 0, \qquad (e')$$
und ist in Bezug auf y von niedererem Grade als dem n^{ten}. Kann man also nach y auflösen, so erhalte man etwa daraus Werthe der Form $y = \varphi(u)$, und hat nun
$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial \varphi(u)}{\partial x} = \frac{\partial \varphi(u)}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x},\ \text{d. h. } u = \frac{\partial \varphi(u)}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x},\ 1 = \frac{\varphi'(u)}{u}\frac{\partial u}{\partial x},$$
woraus (§. 65)
$$x = \int \frac{\varphi'(u)}{u}\partial u + C, \qquad (e'')$$
welche Gleichung nun mittelst (e′) einen Zusammenhang zwischen x und y liefert.

5.) Sey z. B.

$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^4 + y\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^3 - 1 = 0,\quad u^4 + yu^3 - 1 = 0,\ y = \frac{1-u^4}{u^3} = \varphi(u),\ \varphi'(u) = -1 - \frac{3}{u^4},$

$$\int\frac{\varphi'(u)}{u}\partial u = -l(u) + \frac{3}{4u^4},\ x = -l(u) + \frac{3}{4u^4} + C.$$

Eliminirt man also u zwischen den Gleichungen

$$x = -l(u) + \frac{3}{4u^4} + C,\ u^4 + yu^3 - 1 = 0,$$

so erhält man eine Gleichung zwischen x und y, die der vorgelegten genügt. (Allerdings wird diese nicht immer die allgemeine seyn, da ganz wohl noch andere, ebenfalls genügende Gleichungen vorkommen können.)

II. Hat man eben so

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^n + X_1\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^{n-1} + X_2\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^{n-2} + \ldots + X_{n-1}\frac{\partial y}{\partial x} + X_n = 0,$$

wo $X_1, \ldots, X_n$ ganze rationale Funktionen von x sind, von niedererem Grade als dem n^{ten}, so setze man wieder $\frac{\partial y}{\partial x} = u$, und hat dann

$$u^n + X_1 u^{n-1} + \ldots + X_{n-1}u + X_n = 0,$$

und wenn hieraus folgt $x = \varphi(u)$, so ist da

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial u}\frac{1}{\varphi'(u)} : u = \frac{\partial y}{\partial u}\frac{1}{\varphi'(u)},\ \frac{\partial y}{\partial u} = u\varphi'(u),\ y = \int u\varphi'(u)\partial u + C,$$

woraus dann in Verbindung mit $x = \varphi(u)$ eine Gleichung zwischen x und y folgt.

6.) Sey etwa

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^3 + x\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 - x^2\frac{\partial y}{\partial x} = 0,$$

$$u^3 + xu^2 - x^2 u = 0,\ x^2 - ux = u^2,\ x = \frac{u}{2}(1 \pm \sqrt{5}),$$

also $$\varphi'(u) = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5}),\ y = \int\frac{u}{2}(1 \pm \sqrt{5})\partial u = u^2\frac{(1 \pm \sqrt{5})}{4} + C,$$

so dass $$x = \frac{u}{2}(1 \pm \sqrt{5}),\ y = \frac{u^2(1 \pm \sqrt{5})}{4} + C,\ \text{d. h. } y = \frac{x^2}{1 \pm \sqrt{5}} + C.$$

Die direkte Auflösung gäbe

$$\frac{\partial y}{\partial x}\left[\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{x}{2} - \frac{x}{2}\sqrt{5}\right]\left[\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{x}{2} + \frac{x}{2}\sqrt{5}\right] = 0,$$

$$y + C = 0,\ y + \frac{x^2(1-\sqrt{5})}{4} + C = 0,\ y + \frac{x^2(1+\sqrt{5})}{4} + C = 0,$$

und da $\frac{x^2}{1 \pm \sqrt{5}} = \frac{(1 \mp \sqrt{5})x^2}{1-5} = -\frac{x^2(1 \mp \sqrt{5})}{4}$, so sieht man, dass unsere obige Auflösung nur zwei dieser möglichen Auflösungen gegeben hat, was freilich von der Auswerfung des Faktors $u = 0$ herrührt.

III. Kann man die vorangehenden Methoden nicht anwenden, so muss man sich durch Einführung neuer Veränderlichen zu helfen suchen, die bald in einer, bald in anderer Weise gewählt werden müssen.

7.) $$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^3 + y^3\frac{\partial y}{\partial x} + y^4 = 0.$$

Man setze $\frac{\partial y}{\partial x} = uy$, so ist $u^3y^3 + y^3uy + y^4 = 0$, $y^3(u^3 + uy + y) = 0$, und da $y = 0$ wohl auch der vorgelegten Gleichung genügt, aber keine Konstante enthält, so hat man $u^3 + uy + y = 0$, $y = -\frac{u^3}{1+u}$, also

$$\frac{\partial y}{\partial x} = uy = -\frac{u^4}{1+u}, \quad \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{3u^2(1+u)-u^3}{(1+u)^2}\frac{\partial u}{\partial x}$$

d. h.

$$\frac{-u^4}{1+u} = -\frac{3u^2+2u^3}{(1+u)^2}\frac{\partial u}{\partial x}, \quad 1 = \frac{3+2u}{u^2(1+u)}\frac{\partial u}{\partial x}, \quad x = \int\frac{(3+2u)\partial u}{u^2(1+u)} = -\frac{3}{u} + \mathrm{l}\left(\frac{1+u}{u}\right) + C,$$

also erhält man **eine** Lösung der Aufgabe durch Elimination von u aus

$$u^3 + uy + y = 0, \quad x = -\frac{3}{u} + \mathrm{l}\left(\frac{1+u}{u}\right) + C.$$

8.)
$$y^5\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^5 + y^3\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^3 + 1 = 0,$$

gibt für $\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{uy}$:

$$\frac{1}{u^5} + \frac{1}{u^3 y} + 1 = 0, \quad y = -\frac{u^2}{1+u^5}, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = -\frac{2u-3u^6}{(1+u^5)^2},$$

$$\frac{1}{uy} = -\frac{1+u^5}{u^3}, \quad \frac{1+u^5}{u^3} = \frac{2u-3u^6}{(1+u^5)^2}\frac{\partial y}{\partial x}, \quad 1 = \frac{2u^4-3u^9}{(1+u^5)^3}\frac{\partial u}{\partial x},$$

$$x = \int\frac{2u^4-3u^9}{(1+u^5)^3}\partial u + C = 2\int\frac{u^4\partial u}{(1+u^5)^3} - 3\int\frac{u^9\partial u}{(1+u^5)^3} + C.$$

Die beiden Integrale bestimmt man, wenn man $1+u^5 = z$ setzt (§. 36), wodurch dann erhalten wird

$$x = -\frac{1}{5(1+u^5)^2} + \frac{3}{5}\frac{1}{u^5+1} - \frac{3}{10}\frac{1}{(1+u^5)^2} + C,$$

d. h. man hat
$$y = -\frac{u^2}{1+u^5}, \quad x = \frac{3}{5}\frac{1}{1+u^5} - \frac{1}{2}\frac{1}{(1+u^5)^2} + C,$$

zwischen welchen Gleichungen u zu eliminiren ist.

9.) $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^3 - ax\frac{\partial y}{\partial x} + x^3 = 0; \quad \frac{\partial y}{\partial x} = ux, \quad u^3x^3 - aux^2 + x^3 = 0, \quad u^3x - au + x = 0,$

$$x = \frac{au}{1+u^3}, \quad \frac{\partial x}{\partial u} = \frac{a(1-2u^3)}{(1+u^3)^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{(1+u^3)^2}{a(1-2u^3)}, \quad \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}:$$

$$ux = \frac{\partial y}{\partial u}\frac{(1+u^3)^2}{a(1-2u^3)}, \quad \frac{au^2}{1+u^3} = \frac{\partial y}{\partial u}\frac{(1+u^3)^2}{a(1-2u^3)}, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{a^2u^2(1-2u^3)}{(1+u^3)^3};$$

$$y = a^2\int\frac{u^2(1-2u^3)\partial u}{(1+u^3)^3} + C, \quad x = \frac{au}{1+u^3}.$$

10.) $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^5 + y^9\frac{\partial y}{\partial x} + y^7\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + y^{11} = 0, \quad y = \frac{1}{z}, \quad \frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{1}{z^2}\frac{\partial z}{\partial x};$

$$-\frac{1}{z^{10}}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^5 - \frac{1}{z^{11}}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{z^{11}}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{z^{11}} = 0, \quad -z\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^5 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + 1 = 0.$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = u \text{ (I)}: \quad -zu^5 + u^2 - u + 1 = 0, \quad z = \frac{u^2-u+1}{u^5}, \quad \frac{\partial z}{\partial u} = -\frac{3u^2-4u+5}{u^6};$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}, \quad u = -\frac{3u^2-4u+5}{u^6}\frac{\partial u}{\partial x}, \quad 1 = -\frac{3u^2-4u+5}{u^7}\frac{\partial u}{\partial x},$$

$$x = -\int\frac{3u^2-4u+5}{4^7}\partial u + C = \frac{3}{4u^4} - \frac{4}{5u^5} + \frac{5}{6u^6} + C;$$

$$y = \frac{u^5}{u^2-u+1}, \quad x = \frac{3}{4u^4} - \frac{4}{5u^5} + \frac{5}{6u^6} + C.$$

IV. Hat man die Gleichung

$$F_0\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^n + F_1\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^{n-1} + F_2\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^{n-2} + \ldots + F_{n-1}\frac{\partial y}{\partial x} + F_n = 0$$

und es sind $F_0, F_1, \ldots, F_n$ homogene Funktionen von x und y desselben

r^{ten} Grades (§. 68), so setze man $y = xz$ und es werden $F_0 = Z_0\, x^r$, $F_1 = Z_1\, x^r, \ldots, F_n = Z_n x^r$, so wird die vorgelegte Gleichung zu

$$Z_0 \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^n + Z_1 \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^{n-1} + \ldots + Z_{n-1} \frac{\partial y}{\partial x} + Z_n = 0.$$

Gesetzt man erhalte hieraus $\frac{\partial y}{\partial x}$ als Funktion von z, so ist also

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \varphi(z),\ z + x\frac{\partial z}{\partial x} = \varphi(z),\ \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\varphi(z) - z}{x},\ l(x) = \int \frac{\partial z}{\varphi(z) - z} + C,$$

wo noch $z = \frac{y}{x}$ zu setzen ist. Setzt man $\frac{\partial y}{\partial x} = u$ und kann z als Funktion von u finden, so ist

$$z = \varphi(u),\ \frac{\partial y}{\partial x} = z + x\frac{\partial z}{\partial x},\ \text{d. h. } u = \varphi(u) + x\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x},$$

$$u = \varphi(u) + x\varphi'(u)\frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{1}{x} = \frac{\varphi'(u)}{u - \varphi(u)}\frac{\partial u}{\partial x},$$

$$l(x) = \int \frac{\varphi'(u)\,\partial u}{u - \varphi(u)},\ \text{oder auch } l(x) = -\int \frac{1 - \varphi'(u)}{u - \varphi(u)}\partial u + \int \frac{\partial u}{u - \varphi(u)} = -l\left\{u - \varphi(u)\right\}$$
$$-\int \frac{\partial u}{\varphi(u) - u}.$$

Also $$y = x\varphi(u),\ l(x) = \int \frac{\varphi'(u)}{u - \varphi(u)}\partial u + C = -l(u - \varphi(u)) - \int \frac{\partial u}{\varphi(u) - u} + C.$$

Oft ist es besser, die Gleichung

$$Z_0\left(z + x\frac{\partial z}{\partial x}\right)^n + Z_1\left(z + x\frac{\partial z}{\partial x}\right)^{n-1} + \ldots + Z_{n-1}\left(z + x\frac{\partial z}{\partial x}\right) + Z_n = 0$$

nach $x\frac{\partial z}{\partial x}$ aufzulösen. Folgt daraus $x\frac{\partial z}{\partial x} = \varphi(z)$, so ist

$$\frac{1}{\varphi(z)}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{x},\ l(x) = \int \frac{\partial z}{\varphi(z)} + C,\ z = \frac{y}{x}.$$

11.) $$x^2 + x^2\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 - y^2 = 0 \text{ gibt } 1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 - z^2 = 0,$$

woraus $$\frac{\partial y}{\partial x} = \pm\sqrt{z^2 - 1} = \varphi(z),\ l(x) = \int \frac{\partial z}{\pm\sqrt{z^2 - 1} - z} + C = -\int (z \pm \sqrt{z^2 - 1})\,\partial z$$
$$= -\left[\frac{z^2}{2} \pm \frac{z}{2}\sqrt{z^2 - 1} \mp \frac{1}{2} l(z + \sqrt{z^2 - 1})\right] + C,$$

d. h. wenn man $z = \frac{y}{x}$ setzt:

$$2l(x) = C \pm l\left(\frac{y}{x} + \sqrt{\frac{y^2}{x^2} - 1}\right) \mp \frac{y}{x}\sqrt{\frac{y^2}{x^2} - 1} - \frac{y^2}{x^2}.$$

Man hätte dieselbe Gleichung übrigens auch nach der zweiten Weise auflösen können.

12.) Man soll eine Kurve suchen so beschaffen, dass alle Lichtstrahlen, die von einem gegebenen Punkte aus an sie gelangen, zurückgeworfen mit einander parallel laufen.

Sey der gegebene Punkt der Anfangspunkt der Koordinaten; die Richtung, mit der alle zurückgeworfenen Strahlen parallel gehen sollen, sey parallel der Axe der x; ferner seyen x, y die Koordinaten eines beliebigen Punktes der Kurve. Die Gleichung des in diesen Punkt gerichteten Lichtstrahls ist also $x v = y \xi$, wenn wieder ξ, v die laufenden Koordinaten sind; die Richtung des zurückgeworfenen Strahls

ist parallel der Axe der x, also ist die Gleichung dieses Strahls $v = y$. Die trigonometrische Tangente des Winkels der berührenden Geraden und des einfallenden Strahls ist somit $\frac{\frac{y}{x} - \frac{\partial y}{\partial x}}{1 + \frac{y}{x}\frac{\partial y}{\partial x}}$, während die des Winkels derselben Geraden und des zurückgeworfenen Strahls $= \frac{\partial y}{\partial x}$ ist, so dass, da beide Winkel gleich seyn müssen:

$$\frac{\frac{y}{x} - \frac{\partial y}{\partial x}}{1 + \frac{y}{x}\frac{\partial y}{\partial x}} = \frac{\partial y}{\partial x},\ \frac{y}{x} - \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{y}{x}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2,\ y\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + 2x\frac{\partial y}{\partial x} - y = 0,$$

woraus nun die Gleichung der Kurve zu suchen ist. Für $y = xz$:

$$z\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial y}{\partial x} - z = 0,\ \frac{\partial y}{\partial x} = u,\ z = \frac{2u}{1-u^2} = \varphi(u),$$

$$l(x) = -l\left(u - \frac{2u}{1-u^2}\right) - \int \frac{\partial u}{\frac{2u}{1-u^2} - u} = -l\left(\frac{-u(1+u^2)}{1-u^2}\right) - \int \frac{\partial u(1-u^2)}{(1+u^2)u}$$

$$= -l\left(\frac{-u(1+u^2)}{1-u^2}\right) - l(u) + l(1+u^2) + C = l(-1) - 2l(u) + l(1-u^2) + C,$$

oder wenn man $l(-1) + C = C$ setzt, was man darf, da ja sicher $l(-1)$ konstant ist, so folgt

$$l(x) = l\left(\frac{1-u^2}{u^2}\right) + C,\ x = C\frac{1-u^2}{u^2},$$

also $$y = \frac{2xu}{1-u^2},\ x = C\left(\frac{1-u^2}{u^2}\right);\ 1-u^2 = \frac{xu^2}{C},\ y = \frac{2C}{u}$$

$$u = \frac{2C}{y},\ u^2 = \frac{4C^2}{y^2},\ 1-u^2 = \frac{y^2-4C^2}{y^2},$$

so dass $$x = \frac{C(y^2-4C^2)}{y^2}\cdot\frac{y^2}{4C^2},\ 4Cx = y^2 - 4C^2,\ y^2 = 4C(x+C)$$

Diese Gleichung stellt Parabeln vor, in denen der Brennpunkt Anfangspunkt der Koordinaten ist.

Dieselbe Gleichnng hätte übrigens auch gemäss dem zu Eingang dieses §. Gesagten integrirt werden können.

V. Lässt sich die gegebene Differentialgleichung nach y auflösen, d. h. hat man

$$y = f\left(x, \frac{\partial y}{\partial x}\right) = f(x, u),\ u = \frac{\partial y}{\partial x},$$

so folgt daraus, wenn man nach x differenzirt:

$$u = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x},$$

welche Gleichung nur u und x enthält. Kann man dieselbe integriren, und ist

$$\varphi(u, x, C) = 0$$

ihre Integralgleichung, so eliminire man u zwischen $\varphi(u, x, C) = 0$ und $y = f(x, u)$, und erhält eine Integralgleichung, die der vorgelegten genügt.

Wäre, wieder für $\frac{\partial y}{\partial x} = u$, die vorgelegte Gleichung:

$$y = \varphi(u)x + \psi(u),\ \text{also}\ u = \varphi(u) + [x\varphi'(u) + \psi'(u)]\frac{\partial u}{\partial x},$$

so hätte man, wenn man beachtet (§. 14), dass $\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}=1$:

$$[u-\varphi(u)]\frac{\partial x}{\partial u}-x\varphi'(u)-\psi'(u)=0,\quad \frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\varphi'(u)}{\varphi(u)-u}x+\frac{\psi'(u)}{\varphi(u)-u}=0,$$

also nach §. 66, I:

$$x=e^{-\int\frac{\varphi'(u)\partial u}{\varphi(u)-u}}\left[C-\int\frac{\psi'(u)\partial u}{\varphi(u)-u}e^{\int\frac{\varphi'(u)\partial u}{\varphi(u)-u}}\partial u\right].$$

In dem speziellen Falle, da $\varphi(u)=u$, kann man dieses Verfahren nicht anwenden. Alsdann aber hat man

$$y=ux+\psi(u),\quad u=u+[x+\psi'(u)]\frac{\partial u}{\partial x},\quad 0=[x+\psi'(u)]\frac{\partial u}{\partial x},$$

d. h. entweder $x+\psi'(u)=0$, oder $u=C$. Also ist eine Integralgleichung:

$$y=Cx+\psi(C),$$

während eine andere durch Elimination von u zwischen $y=ux+\psi(u)$, $x+\psi'(u)=0$ folgt; diese letztere enthält aber keine willkürliche Konstante. (Vergl. §. 87.)

13.) $y=x\frac{\partial y}{\partial x}+ax^2\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$; $y=xu+ax^2u^2$, $u=u+x\frac{\partial u}{\partial x}+2axu^2+2ax^2u\frac{\partial u}{\partial x}$,

$$0=2axu^2+x\frac{\partial u}{\partial x}(1+2axu),\quad 0=2au^2+\frac{\partial u}{\partial x}(1+2axu),$$

$$x=\frac{1}{u}\left[C-\frac{1}{2a}\int\frac{u}{u^2}\partial u\right]=\frac{C}{u}-\frac{1}{2a}\frac{l(u)}{u},$$

also $\quad ux=C-\frac{l(u)}{2a},\quad y=ux+au^2x^2.$

14.) Man soll diejenige Kurve finden, bei der die von dem Anfangspunkte der Koordinaten auf die berührende Gerade gefällte Senkrechte eine beliebige Funktion der Abszisse des Punktes ist, in den die berührende Gerade gezogen ist.

Seyen x, y die Koordinaten eines Punktes der gesuchten Kurve, so ist die Gleichung der Tangente in demselben:

$$v-y=\frac{\partial y}{\partial x}(\xi-x),$$

also die Länge des vom Anfangspunkt gefällten Perpendikels:

$$\pm\frac{y-x\frac{\partial y}{\partial x}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}}$$

und da dies $=f(x)$ seyn soll, so hat man

$$y=x\frac{\partial y}{\partial x}+f(x)\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2},$$

aus welcher Gleichung die Kurve zu bestimmen ist. Man zieht hieraus für $\frac{\partial y}{\partial x}=u$:

$$u=u+x\frac{\partial u}{\partial x}+f'(x)\sqrt{1+u^2}+\frac{f(x)}{\sqrt{1+u^2}}u\frac{\partial u}{\partial x},$$

$$0=\left(x+\frac{uf(x)}{\sqrt{1+u^2}}\right)\frac{\partial u}{\partial x}+f'(x)\sqrt{1+u^2}.$$

In dem speziellen Falle, da $f(x) = ax$, hat man

$$0 = x\left(1 + \frac{au}{\sqrt{1+u^2}}\right)\frac{\partial u}{\partial x} + a\sqrt{1+u^2},\ \left(\frac{1}{\sqrt{1+u^2}} + \frac{au}{1+u^2}\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{a}{x} = 0;$$

$$\text{arc}(\sin = u) + \frac{1}{2} a\,l(1+u^2) + a\,l(x) = C,\ y = ux + ax\sqrt{1+u^2}.$$

Für $f(x) = a$, d. h. da alle Senkrechten einander gleich seyn sollen:

$$0 = \left(x + \frac{au}{\sqrt{1+u^2}}\right)\frac{\partial u}{\partial x};\ u = C \text{ oder } x + \frac{au}{\sqrt{1+u^2}} = 0.$$

Die erste Gleichung gibt

$$y = Cx + a\sqrt{1+C^2},$$

d. h. eine Gerade, bei welcher der Satz freilich richtig ist, da sie sich selbst Tangente ist. Die zweite Gleichung gibt

$$y = xu + a\sqrt{1+u^2},\ x = -\frac{au}{\sqrt{1+u^2}},\ x^2 = \frac{a^2u^2}{1+u^2},\ u^2 = \frac{x^2}{a^2-x^2},\ u = \pm\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}},$$

$$\sqrt{1+u^2} = -\frac{au}{x} = \mp\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}};\ y = \pm\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}} \mp \frac{a^2}{\sqrt{a^2-x^2}} = \mp\frac{(a^2-x^2)}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$= \mp\sqrt{a^2-x^2};$$

$$y^2 = a^2 - x^2,\ y^2 + x^2 = a^2,$$

d. h. einen Kreis, dessen Mittelpunkt der Anfangspunkt, und dessen Halbmesser a ist.

VI. Hat die gegebene Differentialgleichung die Form

$$x = f\left(y, \frac{\partial y}{\partial x}\right) = f(y, u),\ u = \frac{\partial y}{\partial x},$$

so zieht man aus ihr

$$1 = \frac{\partial f}{\partial y}u + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x},$$

oder da $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}u$:

$$1 = \frac{\partial f}{\partial y}u + \frac{\partial f}{\partial u}u\frac{\partial u}{\partial y},$$

in welcher Gleichung bloss u und y vorkommen. Kann man sie integriren, so eliminirt man u zwischen dieser Integralgleichung und $x = f(y, u)$.

15.) $$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} = 2x + 2y\frac{\partial y}{\partial x},\ x = -yu + \frac{1}{2}\sqrt{1+u^2};$$

$$1 = -u^2 - y\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{u\frac{\partial u}{\partial x}}{\sqrt{1+u^2}},\ \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y}u;$$

$$1 = -u^2 - uy\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{2}\frac{u^2}{\sqrt{1+u^2}}\frac{\partial u}{\partial y},\ 1 + u^2 = \left(\frac{1}{2}\frac{u^2}{\sqrt{1+u^2}} - uy\right)\frac{\partial u}{\partial y},$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{1}{2}\frac{u^2}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{u}{1+u^2}y,\ \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{u}{1+u^2}y - \frac{1}{2}\frac{u^2}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}} = 0,$$

also nach §. 66, I da $\int\frac{u\partial u}{1+u^2} = \frac{1}{2}l(1+u^2) = l\sqrt{1+u^2}$:

$$y = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\left[C + \frac{1}{2}\int\frac{u^2\sqrt{1+u^2}}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}\partial u\right] = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\left[C + \frac{1}{2}u - \frac{1}{2}\text{arc}(\text{tg} = u)\right],$$

so dass also

$$y = \frac{C}{\sqrt{1+u^2}} + \frac{1}{2}\frac{u}{\sqrt{1+u^2}} - \frac{1}{2\sqrt{1+u^2}}\text{arc}(\text{tg} = u),\ x = -uy + \sqrt{1+u^2}.$$

VII. In gewissen besonderen Fällen kann man sich durch eine eigenthümliche Methode helfen, die wir an einigen Beispielen auseinandersetzen wollen.

16.) Sey die Gleichung

$$y-2x\frac{\partial y}{\partial x}=2\frac{\partial y}{\partial x}f\left(y\frac{\partial y}{\partial x}\right),\quad \frac{y-2x\frac{\partial y}{\partial x}}{2\frac{\partial y}{\partial x}}=f\left(y\frac{\partial y}{\partial x}\right)$$

gegeben, worin f eine beliebige Funktion bedeutet. Man setze nun

$$y\frac{\partial y}{\partial x}=a,$$

wo a eine Konstante bedeute, so müsste die erste Seite $=f(a)$ seyn. Aus der angenommenen Gleichung folgt

$$y^2-2ax=C,$$

worin C eine willkürliche Konstante ist. Aus dieser Gleichung nun ergibt sich

$$y=\pm\sqrt{C+2ax},\quad \frac{\partial y}{\partial x}=\pm\frac{a}{\sqrt{C+2ax}},$$

also
$$\frac{y-2x\frac{\partial y}{\partial x}}{2\frac{\partial y}{\partial x}}=\pm\frac{\sqrt{C+2ax}-\frac{2ax}{\sqrt{C+2ax}}}{\pm\frac{2a}{\sqrt{C+2ax}}}=\frac{\pm(C+2ax)\mp 2ax}{\pm 2a}=\frac{C}{2a},$$

so dass, da diese Grösse auch $=f(a)$ seyn soll, nothwendig

$$C=2af(a)$$

seyn muss, mithin der vorgelegten Gleichung genügt wird durch

$$y^2-2ax=2af(a),$$

worin a eine willkürliche Konstante ist. Der ganze Erfolg beruhte hier darin, dass die erste Seite der vorgelegten Gleichung, nachdem y aus der zweiten gefunden worden, zu einer konstanten Grösse wurde. Hätte man übrigens $\frac{\partial y}{\partial x}$ mittelst der Gleichung $y\frac{\partial y}{\partial x}=a$ eliminirt, so würde die erste Seite $=\frac{y^2-2ax}{2a}$, d. h. $=\frac{C}{2a}$ geworden.

17.) Sey

$$y\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}=f\left(x+y\frac{\partial y}{\partial x}\right)$$

und man setze wieder

$$x+y\frac{\partial y}{\partial x}=a,\quad x^2+y^2-2ax=C,$$

so ist zunächst

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{a-x}{y},\quad 1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2=\frac{y^2+a^2-2ax+x^2}{y^2},$$

$$y\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}=\sqrt{y^2+x^2-2ax+a^2}=\sqrt{C+a^2},$$

also da $y\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}=f(a)$, so ist

$$\sqrt{C+a^2}=f(a),\quad C=f(a)^2-a^2;$$

also ist die allgemeine Integralgleichung der vorgelegten Gleichung, wenn a die willkürliche Konstante:

$$x^2+y^2-2ax=f(a)^2-a^2,\quad y^2+(a-x)^2=f(a)^2.$$

18.) Sey

$$\frac{y^2-x^2-2xy\frac{\partial y}{\partial x}}{2\left(y-x\frac{\partial y}{\partial x}\right)}=f\left(\frac{(y^2-x^2)\frac{\partial y}{\partial x}+2xy}{2\left(y-x\frac{\partial y}{\partial x}\right)}\right),$$

und man setze wieder

$$\frac{(y^2-x^2)\frac{\partial y}{\partial x}+2xy}{2\left(y-x\frac{\partial y}{\partial x}\right)}=a,\quad (y^2-x^2+2ax)\frac{\partial y}{\partial x}+2xy-2ay=0,$$

so ist (§. 69) $\frac{\partial P}{\partial y}=2x-2a$, $\frac{\partial Q}{\partial x}=-2x+2a$, also $\frac{1}{P}\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=\frac{2}{y}$,

$v=e^{-\int\frac{2}{y}\partial y}=\frac{1}{y^2}$, also ist

$$\frac{y^2-x^2+2ax}{y^2}\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{2xy-2ay}{y^2}=0$$

geradezu integrabel und man erhält

$$\frac{x^2-2ax}{y}+y=C,\quad x^2+y^2-2ax-Cy=0.$$

Nun ist

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{2ay-2xy}{y^2-x^2+2ax},\quad \frac{y^2-x^2-2xy\frac{\partial y}{\partial x}}{2\left(y-x\frac{\partial y}{\partial x}\right)}=\frac{(y^2+x^2)^2-2axy^2-2ax^3}{2y(x^2+y^2)}$$

$$=\frac{(y^2+x^2)(y^2+x^2-2ax)}{2y(y^2+x^2)}=\frac{Cy}{2y}=\frac{C}{2}=f(a),\quad C=2f(a),$$

d. h. die Integralgleichung der vorgelegten Differentialgleichung ist:

$$x^2+y^2-2ax-2f(a)y=0.$$

Man sieht leicht, dass der Erfolg dieser Methode davon abhängt, dass, nachdem die eine Integralgleichung gefunden, die daraus folgenden Werthe von y und $\frac{\partial y}{\partial x}$ die erste Seite zu einer Grösse machen, die bloss a und C enthält, wodurch dann C als Funktion von a bestimmt wird.

VIII. 19.) Die Gleichung

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^{\frac{mn}{m-n}}=ax^m+by^n,\quad \frac{\partial y}{\partial x}=(ax^m+by^n)^{\frac{m-n}{mn}}$$

gibt, wenn $y=x^{\frac{m}{n}}z$, $\frac{\partial y}{\partial x}=x^{\frac{m}{n}}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{m}{n}x^{\frac{m-n}{n}}z$:

$$\frac{m}{n}x^{\frac{m-n}{n}}z+x^{\frac{m}{n}}\frac{\partial z}{\partial x}=x^{\frac{m-n}{n}}(a+bz^n)^{\frac{m-n}{mn}},$$

$$\frac{m}{n}z+x\frac{\partial z}{\partial x}=(a+bz^n)^{\frac{m-n}{mn}},\quad \frac{1}{\frac{m}{n}z-(a+bz^n)^{\frac{m-n}{mn}}}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{1}{x}=0,$$

$$l(x)+\int\frac{\partial z}{\frac{m}{n}z-(a+bz^n)^{\frac{m-n}{mn}}}=C,\quad z=yx^{-\frac{m}{n}}.$$

Hieher gehört etwa die Gleichung

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2=ax^2+by;\quad l(x)+\int\frac{\partial z}{2z-(a+bz)^{\frac{1}{2}}}=C,\quad z=\frac{y}{x^2}.$$

20.) Man soll eine ebene Kurve bestimmen so, dass der im Anfangspunkte der Koordinaten anfangende Bogen $=\sqrt{y^2+nx^2}$ ist $(n>1)$, wenn x und y die Koordinaten seines Endpunktes sind.

Vorausgesetzt der Bogen wachse beständig mit wachsendem x, so ist also (§. 55)

$$\int_0^x\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}\partial x=\sqrt{y^2+nx^2},\ \text{also (§. 61)},\ \sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}=\frac{y\frac{\partial y}{\partial x}+nx}{\sqrt{y^2+nx^2}},$$

woraus leicht folgt:

$$x\frac{\partial y}{\partial x}-y=\pm\sqrt{\frac{n-1}{n}}\sqrt{y^2+nx^2}.$$

Setzt man $\sqrt{\frac{n-1}{n}}=\alpha$ und (§. 68) $y=xz$, so ergibt sich

$$\pm\alpha l(x)=\int\frac{\partial z}{z^2+n}+C=l(z+\sqrt{z^2+n})+C,\ x^{\pm\alpha}=C(z+\sqrt{z^2+n}),$$

d. h. da $z=\frac{y}{x}$:

$$cx^{1\pm\alpha}=y+\sqrt{y^2+nx^2},\quad y=\frac{c}{2}x^{1\pm\alpha}-\frac{n}{2c}x^{1\mp a}.$$

Da $\alpha<1$ aber positiv, so genügen $x=0$, $y=0$ dieser Gleichung der Kurve, so dass letztere durch den Anfangspunkt geht. Die Konstante c bleibt ganz willkürlich.

21.) Man lege über eine Kurve (z. B. BC' in Fig. 29, §. 54), einen Faden, den man in einem Punkte fest mache (z. B. in C'), während das freie Ende so bewegt werde, dass der Faden sich abwickelt von der Kurve und das frei gemachte Stück Tangente ist an die krumme Linie, so beschreibt der bewegte Endpunkt des Fadens eine Evolvente der gegebenen Kurve.

Seyen nun x, y die Koordinaten eines bestimmten Punktes der gegebenen Kurve; α, β die Koordinaten des entsprechenden Punktes der Evolvente, so dass, wenn die Abwickelung des Fadens bis zum ersten Punkte fortgeschritten ist, das freie Ende sich im zweiten befindet. Es ist nun leicht einzusehen, dass der Faden zugleich im ersten Punkte Tangente an die eine, und im zweiten Normale an die andere Kurve ist. Da β als Funktion von α gesucht wird, indem man sicher die Gleichung der Kurve sucht; ferner die Gleichung der Tangente im Punkte (x, y) an die erste Kurve ist $v-y=\frac{\partial y}{\partial x}(\xi-x)$, die der Normale in (α,β) an die zweite Kurve: $v-\beta=-\frac{1}{\left(\frac{\partial\beta}{\partial\alpha}\right)}(\xi-\alpha)$, wenn ξ, v jeweils die laufenden Koordinaten sind, und diese zwei Gleichungen dieselbe Gerade ausdrücken sollen, so muss

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{1}{\left(\frac{\partial \beta}{\partial \alpha}\right)}, \quad y - x\frac{\partial y}{\partial x} = \beta + \frac{\alpha}{\left(\frac{\partial \beta}{\partial \alpha}\right)} \text{ seyn,}$$

d. h.

$$\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial \beta}{\partial \alpha} + 1 = 0, \quad y - \beta + (\alpha - x)\frac{\partial y}{\partial x} = 0.$$

Zieht man nun aus der Gleichung der gegebenen Kurve $\frac{\partial y}{\partial x}$, setzt dessen Werth in diese Gleichungen ein und eliminirt dann x und y aus dieser und der Kurvengleichung, so erhält man die Differentialgleichung der Evolvente.

Sey die gegebene Kurve ein Kreis, dessen Gleichung $x^2 + y^2 = r^2$, so ist $\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{x}{y}$, also hat man x und y zu eliminiren aus

$$x^2 + y^2 = r^2, \quad -\frac{x}{y}\frac{\partial \beta}{\partial \alpha} + 1 = 0, \quad y - \beta - \frac{x}{y}(\alpha - x) = 0,$$

wodurch man erhält

$$\left(\beta\frac{\partial \beta}{\partial \alpha} + \alpha\right)^2 = r^2\left[1 + \left(\frac{\partial \beta}{\partial \alpha}\right)^2\right], \quad \beta\frac{\partial \beta}{\partial \alpha} + \alpha = r\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \beta}{\partial \alpha}\right)^2}.$$

Wird diese Gleichung in derselben Weise integrirt, wie Nr. 15, so erhält man:

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}[C + ru - r\,\mathrm{arc}(tg = u)], \quad \alpha = \frac{r}{\sqrt{1+u^2}} - \frac{Cu}{\sqrt{1+u^2}} + \frac{ru}{\sqrt{1+u^2}}\mathrm{arc}(tg = u),$$

oder wenn $u = tg\,\omega$:

$$\beta = C\cos\omega + r\sin\omega - r\omega\cos\omega, \quad \alpha = r\cos\omega - C\sin\omega + r\omega\sin\omega,$$

zwischen welchen Gleichungen ω zu eliminiren ist, um die Gleichung der Kreisevolventen zu erhalten.

Soll für $\omega = 0$: $\alpha = r$, $\beta = 0$ seyn, so muss $C = 0$ seyn, und man erhält dann

$$\beta = r[\sin\omega - \omega\cos\omega], \quad \alpha = r[\cos\omega + \omega\sin\omega],$$

für die gewöhnliche Kreisevolvente.

§. 71.

Als letztes Mittel, wenn kein anderes gefunden werden kann, bleibt noch der Versuch, eine vorgelegte Reihe mittelst einer (endlichen oder unendlichen) Reihe zu integriren. Wir wollen einige der hier möglichen Fälle als Beispiele näher untersuchen und etwa nöthige allgemeine Bemerkungen an den speziellen Fall anknüpfen.

I. Aus §. 15 folgt, wenn man in der dortigen Formel (27) $x = a$, $h = x - a$ setzt:

$$F(x) = F(a) + \frac{x-a}{1}F'(a) + \frac{(x-a)^2}{1.2}F''(a) + \frac{(x-a)^3}{1.2.3}F'''(a) + \dots \quad \text{(a)}$$

Bricht diese Reihe von selbst ab, so ist nothwendig F(x) der alsdann endlichen Reihe gleich; bricht sie nicht von selbst ab, ist aber konvergent, so gilt dasselbe (§. 16). Die Reihe wird immer abbrechen, wenn etwa $F^n(x)$, $F^{n+1}(x)$, ... sämmtlich Null sind für $x = a$ oder gar für ein beliebiges x. Für unsere Zwecke ist $F(x) = y$, und wenn also etwa aus der vorgelegten Gleichung folgt, dass $\frac{\partial^n y}{\partial x^n}$, $\frac{\partial^{n+1} y}{\partial x^{n+1}}$, ... sämmtlich Null sind für $x = a$ oder für ein beliebiges x, so ist

$$y = y_a + \frac{x-a}{1}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_a + \frac{(x-a)^2}{1.2}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)_a + \ldots + \frac{(x-a)^{n-1}}{1\ldots.n-1}\left(\frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}}\right)_a,$$

worin y_a ganz willkürlich (unbestimmbar) bleibt, so dass dann $y_a = C$, d. h. gleich der willkürlichen Konstanten zu setzen ist.

1) $$x\frac{\partial y}{\partial x} - 3y + bx^2 = 0 \text{ (§. 66).}$$

Hieraus $$\frac{\partial y}{\partial x} + x\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - 3\frac{\partial y}{\partial x} + 2bx = 0,\ x\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - 2\frac{\partial y}{\partial x} + 2bx = 0;$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + x\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} - 2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + 2b = 0,\ x\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + 2b = 0;$$

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + x\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = 0,\ x\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0;$$

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + x\frac{\partial^5 y}{\partial x^5} = 0,\ x\frac{\partial^6 y}{\partial x^6} + 2\frac{\partial^5 y}{\partial x^5} = 0, \ldots.$$

so dass also $\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}$, $\frac{\partial^5 y}{\partial x^5}$, ... sämmtlich Null sind für jedes x. Setzt man $x = a = 1$, $y_a = y_1 = c$, so ist für diesen Werth:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 3c - b,\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 6c - 4b,\ \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = 6(c-b),$$

also $$y = c + (3c-b)(x-1) + \frac{6c-4b}{2}(x-1)^2 + \frac{6(c-b)}{6}(x-1)^3 = (c-b)x^3 + bx^2,$$

welcher Werth der vorgelegten Gleichung genügt.

2) $$\left(y\frac{\partial y}{\partial x} + gx\right)\left(x\frac{\partial y}{\partial x} - y\right) + b\frac{\partial y}{\partial x} = 0,$$

oder wenn man mit 4y multiplizirt, was gestattet ist, da nicht $y = 0$ das allgemeine Integral seyn wird:

$$\left(2y\frac{\partial y}{\partial x} + 2gx\right)\left(2xy\frac{\partial y}{\partial x} - 2y^2\right) + 4by\frac{\partial y}{\partial x} = 0,$$

und wenn $y^2 = z$:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x} + 2gx\right)\left(x\frac{\partial z}{\partial x} - 2z\right) + 2b\frac{\partial z}{\partial x} = 0.$$

Aus dieser Gleichung folgt durch nmalige Differentiation nach x:

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n}\left[\left(\frac{\partial z}{\partial x} + 2gx\right)\left(x\frac{\partial z}{\partial x} - 2z\right)\right] + 2b\frac{\partial^{n+1} z}{\partial x^{n+1}} = 0,$$

wo nun (§. 10):

$$\frac{\partial^n}{\partial x^n}\left[\left(\frac{\partial z}{\partial x} + 2gx\right)\left(x\frac{\partial z}{\partial x} - 2z\right)\right] = \left(\frac{\partial z}{\partial x} + 2gx\right)\frac{\partial^n}{\partial x^n}\left(x\frac{\partial z}{\partial x} - 2z\right) +$$

$$\frac{n}{1}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x} + 2gx\right)\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}\left(x\frac{\partial z}{\partial x} - 2z\right) + \ldots + \left(x\frac{\partial z}{\partial x} - 2z\right)\frac{\partial^n}{\partial x^n}\left(\frac{\partial z}{\partial x} + 2gx\right)$$

$$= \left(\frac{\partial z}{\partial x} + 2gx\right)\left[x\frac{\partial^{n+1} z}{\partial x^{n+1}} + (n-2)\frac{\partial^n z}{\partial x^n}\right] + \frac{n}{1}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2g\right)\left[x\frac{\partial^n z}{\partial x^n} + (n-3)\frac{\partial^{n-1} z}{\partial x^{n-1}}\right]$$

$$+ \frac{n(n-1)}{1.2}\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}\left[x\frac{\partial^{n-1} z}{\partial x^{n-1}} + (n-4)\frac{\partial^{n-2} z}{\partial x^{n-2}}\right] + \ldots + \frac{\partial^{n+1} z}{\partial x^{n+1}}\left(x\frac{\partial z}{\partial x} - 2z\right),$$

so dass also für $x = 0$ (d. h. $a = 0$) und $n = 1, 2, 3, \ldots$:

$$-2z\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial x} = 0;\ \frac{\partial z}{\partial x} = 0;$$

$$-2z\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2g\right)+2b\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0,\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{2gz}{b-z};$$

$$-2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2g\right)\frac{\partial z}{\partial x}-2z\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}+2b\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}=0,\ \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}=0,$$

u. s. w. alle folgenden Differentialquotienten Null. Ist also z für $x=0$ gleich c, so hat man

$$z=c+\frac{2gc}{b-c}\frac{x^2}{2},\ \text{d. h. } y^2=c+\frac{gc}{b-c}x^2.$$

Anm. Man kommt auf obige Differentialgleichung bei Auflösung folgender Aufgabe: Diejenige Kurve zu suchen, welche alle Ellipsen, die dieselben Brennpunkte haben, unter rechten Winkeln schneidet. Sey nämlich $2e$ die gegebene Entfernung der zwei Brennpunkte, $2a$ die grosse Axe irgend einer der Ellipsen, so ist $(a^2-e^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-e^2)$ die Gleichung derselben, wenn die Koordinatenaxen wie in §. 53, II gewählt werden. Die Gleichnng der berührenden Geraden in einem Punkte dieser Ellipse, dessen Koordinaten ξ, v sind, ist also (§. 3): $y-v=-\frac{a^2-e^2}{a^2}\cdot\frac{\xi}{v}(x-\xi)$. Geht nun die gesuchte Kurve (Trajectorie) durch diesen Punkt, und sind also ξ, v auch die Koordinaten desselben, so ist die Gleichung der berührenden Geraden an letztere: $y-v=\frac{\partial v}{\partial \xi}(x-\xi)$, wo $\frac{\partial v}{\partial \xi}$ aus der noch unbekannten Gleichung der Trajectorie zu suchen ist. Da beide Tangenten auf einander senkrecht stehen sollen, so muss $-\frac{a^2-e^2}{a^2}\frac{\xi}{v}\frac{\partial v}{\partial \xi}=-1$ seyn, d. h. wenn man nun mit x und y die Koordinaten der Trajectorie bezeichnet, so muss:

$$\frac{a^2-e^2}{a^2}\frac{x}{y}\frac{\partial y}{\partial x}=1,\ (a^2-e^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-e^2)$$

seyn, da dieser Punkt auch in der Ellipse liegt. Eliminirt man a^2 zwischen diesen Gleichungen, so bekommt man eine Gleichung, die für alle Ellipsen, also für alle Trajectorienpunkte gilt, d. h. man erhält die Gleichung der Trajectorie:

$$\left(x+y\frac{\partial y}{\partial x}\right)\left(x\frac{\partial y}{\partial x}-y\right)-e^2\frac{\partial y}{\partial x}=0,$$

mithin
$$y^2=c-\frac{c}{e^2+c}x^2,\ (e^2+c)y^2+cx^2=c(c+e^2).$$

Ist c positiv, so hat man die vorgelegten Ellipsen wieder, so dass ein positives c nicht passt; für negative c hat man Hyperbeln, welche dieselben Brennpunkte haben, und von denen jede wirklich alle Ellipsen rechtwinklich trifft. Hätte man Hyperbeln von denselben Brennpunkten gewählt, so wäre man auf Ellipsen gekommen.

3) $$3x\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2-6y\frac{\partial y}{\partial x}+x+2y=0,\ 3\frac{\partial y}{\partial x}\left(x\frac{\partial y}{\partial x}-2y\right)+2y+x=0.$$

Durch $n$malige Differentiation folgt hieraus, wenn $n>1$:

$$3\frac{\partial y}{\partial x}\left[x\frac{\partial^{n+1} y}{\partial x^{n+1}}+(n-2)\frac{\partial^n y}{\partial x^n}\right]+3n\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\left[x\frac{\partial^n y}{\partial x^n}+(n\quad 3)\frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}}\right]+\ldots\ldots$$

$$+3\frac{\partial^{n+1} y}{\partial x^{n+1}}\left(x\frac{\partial y}{\partial x}-2y\right)+2\frac{\partial^n y}{\partial x^n}=0,$$

während für $n=1$:

$$3\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\left(x\frac{\partial y}{\partial x}-2y\right)+3\frac{\partial y}{\partial x}\left(x\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}-\frac{\partial y}{\partial x}\right)+2\frac{\partial y}{\partial x}+1=0.$$

Hieraus für $x=0$ (d. h. $a=0$):

$$-6y\frac{\partial y}{\partial x}+2y=0,\ \frac{\partial y}{\partial x}=\frac{1}{3};$$

$$-6y\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}-3\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+2\frac{\partial y}{\partial x}+1=0,\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{2}{9y};$$

$$-6\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}-3y\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}+2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=0,\ \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}=0;\ \text{u. s. w.}$$

demnach
$$y=c+\frac{1}{3}x+\frac{x^2}{9c}.$$

4.) $$(y^2-g)\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2-2xy\frac{\partial y}{\partial x}-x^2=0,\ \frac{\partial y}{\partial x}\left[(x^2-g)\frac{\partial y}{\partial x}-2xy\right]=x^2.$$

Da $$\frac{\partial^r}{\partial x^r}\left[(x^2-g)\frac{\partial y}{\partial x}-2xy\right]=(x^2-g)\frac{\partial^{r+1} y}{\partial x^{r+1}}+2(r-1)x\frac{\partial^r y}{\partial x^r}+(r^2-3r)\frac{\partial^{r-1} y}{\partial x^{r-1}},$$
so ist für $n>2$:
$$\frac{\partial y}{\partial x}\left[(x^2-g)\frac{\partial^{n+1} y}{\partial x^{n+1}}+2(n-1)x\frac{\partial^n y}{\partial x^n}+(n^2-3n)\frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}}\right]+n\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\left[(x^2-g)\frac{\partial^n y}{\partial x^n}+\right.$$
$$\left.2(n-2)x\frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}}+(n^2-5n+4)\frac{\partial^{n-2} y}{\partial x^{n-2}}\right]+\ldots+\frac{\partial^{n+1} y}{\partial x^{n+1}}\left[(x^2-g)\frac{\partial y}{\partial x}-2xy\right]=0,$$
während (für $n=1, 2$):
$$\frac{\partial y}{\partial x}\left[(x^2-g)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}-2y\right]+\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\left[(x^2-g)\frac{\partial y}{\partial x}-2xy\right]-2x=0,$$
$$\frac{\partial y}{\partial x}\left[(x^2-g)\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}+2x\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}-2\frac{\partial y}{\partial x}\right]+2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\left[(x^2-g)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}-2y\right]+\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\left[(x^2-g)\frac{\partial y}{\partial x}-\right.$$
$$\left.2xy\right]-2=0.$$

Hieraus folgt für $x=0$:
$$\frac{\partial y}{\partial x}=0,\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=-\frac{y}{g}\pm\frac{\sqrt{y^2-g}}{g},\ \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}=0,\ \text{u. s. w.},$$
so dass
$$y=c+\frac{x^2}{2}\left(-\frac{c}{g}\pm\frac{\sqrt{c^2-g}}{g}\right).$$

Setzt man
$$-\frac{c}{g}\pm\frac{\sqrt{c^2-g}}{g}=\frac{1}{\alpha},\ \text{so ist}\ \alpha=-c\pm\sqrt{c^2-g},\ \alpha^2+2c\alpha+c^2=c^2-g,\ c=-\frac{\alpha}{2}-\frac{g}{2\alpha},$$
also
$$y=-\frac{\alpha}{2}-\frac{g}{2\alpha}+\frac{x^2}{2\alpha},\ x^2-2cy-g-c^2=0,$$
wo c (α) die willkürliche Konstante.

II. Oft führt die eben angegebene Methode auch auf eine unendliche Reihe, die dann nothwendig konvergiren muss, wenn ihre Anwendung möglich seyn soll. Lässt sich die Summe der unendlichen Reihe angeben, so hat man eben dadurch das Integral der Gleichung in geschlossener Form. In der Regel wird man dabei bequemer so verfahren, dass man für y eine Reihe von der Form
$$y=Ax^\alpha+Bx^{\alpha+1}+Cx^{\alpha+2}+\ldots.$$
wählt und dann α, A, B, ... so zu bestimmen sucht, dass diese Reihe der Gleichung genügt, ohne zwischen x und y irgend eine Beziehung festzustellen. Oft ist es bequemer, für y eine Form $\varphi(x)\psi(x)$ zu wählen, wo $\psi(x)$ eine Reihe obiger Art, dagegen etwa $\varphi(x)=e^x$, $\sin \alpha x$, ..., ist; oder auch $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ u. s. w.

5) Sey z. B. die Gleichung
$$\frac{\partial y}{\partial x}+y^2=ax$$

vorgelegt, und man setze $y = \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}$, wo $\varphi'(x)$ den Differentialquotienten von $\varphi(x)$ bedeutet, so ist

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\varphi(x)\varphi''(x) - \varphi'(x)^2}{\varphi(x)^2},$$

also $$\frac{\partial y}{\partial x} + y^2 = \frac{\varphi(x)\varphi''(x)}{\varphi(x)^2} = \frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)}; \quad \frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} = a x, \quad \varphi''(x) = a x \varphi(x).$$

Sey also $$\varphi(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots,$$
$$\varphi''(x) = 2A_2 + 3.2A_3 x + 4.3A_4 x^2 + \ldots,$$

so muss $$2A_2 + 3.2A_3 x + 4.3A_4 x^2 + \ldots = aA_0 x + aA_1 x^2 + aA_2 x^3 + \ldots$$

seyn, woraus

$$A_2 = 0, \; 3.2A_3 = aA_0, \; 4.3A_4 = aA_1, \; 5.4A_5 = aA_2, \ldots, n(n-1)A_n = \alpha A_{n-3}, \ldots,$$

so dass A_0 und A_1 ganz willkürlich bleiben und

$$A_3 = \frac{aA_0}{2.3}, \; A_4 = \frac{aA_1}{3.4}, \; A_5 = 0, \; A_6 = \frac{aA_3}{5.6}, \ldots, A_n = \frac{aA_{n-3}}{(n-1)n},$$

ist; folglich

$$\varphi(x) = A_0\left[1 + \frac{ax^3}{2.3} + \frac{a^2x^6}{2.3.5.6} + \frac{a^3x^9}{2.3.5.6.8.9} + ..\right] + A_1 x\left[1 + \frac{ax^3}{3.4} + \frac{a^2x^6}{3.4.6.7} + ..\right],$$

und wenn man die beiden unendlichen konvergenten Reihen mit X, X_1 bezeichnet:

$$\varphi(x) = A_0 X + A_1 X_1, \; \varphi'(x) = A_0 \frac{\partial X}{\partial x} + A_1 \frac{\partial X_1}{\partial x},$$

$$y = \frac{A_0 \frac{\partial X}{\partial x} + A_1 \frac{\partial X_1}{\partial x}}{A_0 X + A_1 X_1} = \frac{\frac{\partial X}{\partial x} + C \frac{\partial X_1}{\partial x}}{X + CX_1},$$

wo $C \left(= \frac{A_1}{A_0}\right)$ die willkürliche Konstante ist.

Man sieht schon aus den obigen Beispielen, worin das Wesen dieser Methode besteht, ohne dass wir weitere Beispiele zuzufügen hätten. (Vergl. auch §. 83.)

III. Zuweilen führt die Annahme einer Gleichung zwischen x und y, in der noch zu bestimmende Konstanten vorkommen, zu einem Integral.

So wenn etwa die Gleichung

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \pm \sqrt{\frac{ay^4 + by^2 + 1}{ax^4 + bx^2 + 1}}$$

vorgelegt wäre, wähle man einmal die Gleichung

$$A_1 x^2 y^2 + A_2 (x^2 + y^2) + 2A_3 xy - 1 = 0,$$

aus der folgt: $$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{A_1 xy^2 + A_2 x + A_3 y}{A_1 x^2 y + A_2 y + A_3 x} = -\frac{(A_1 y^2 + A_2)x + A_3 y}{(A_1 x^2 + A_2)y + A_3 x}.$$

Aber die angenommene Gleichung heisst auch

$$(A_1 y^2 + A_2)x^2 + 2A_3 yx + A_2 y^2 - 1 = 0,$$

woraus $$(A_1 y^2 + A_2)^2 x^2 + 2A_3 y(A_1 y^2 + A_2)x + (A_2 y^2 - 1)(A_1 y^2 + A_2) = 0,$$
$$(A_1 y^2 + A_2)^2 x^2 + 2A_3 y(A_1 y^2 + A_2)x + (A_3 y)^2 = (A_3 y)^2 - (A_2 y^2 - 1)(A_1 y^2 + A_2),$$
$$(A_1 y^2 + A_2)x + A_3 y = \pm\sqrt{(A_3 y)^2 - (A_2 y^2 - 1)(A_1 y^2 + A_2)},$$

eben so $$(A_1 x^2 + A_2)y + A_3 x = \pm\sqrt{(A_3 x)^2 - (A_2 x^2 - 1)(A_1 x^2 + A_2)},$$

so dass $$\frac{\partial y}{\partial x} = \pm\sqrt{\frac{-A_2 A_1 y^4 + (A_3^2 + A_1 - A_2^2)y^2 + A_2}{-A_2 A_1 x^4 + (A_3^2 + A_1 - A_2^2)x^2 + A_2}},$$

und wenn diese Gleichung identisch seyn soll mit der vorgelegten, so muss man haben

$$-A_2 A_1 = aA_2, \; A_3^2 - A_2^2 + A_1 = bA_2$$

d. h. $$A_1 = -a, \; A_3 = \sqrt{A_2(b + A_2) + a},$$

wo nun A_2 ganz willkürlich bleibt. Demnach ist die Integralgleichung der vorgelegten Gleichung:

$$-ax^2y^2+C(x^2+y^2)+2xy\sqrt{C(b+C)+a}=1.$$

Setzt man hier etwa $C=\frac{1}{k^2}$, also positiv, $a=m^2$, also ebenfalls positiv, $b=-1-m^2$, so ist diese Gleichung:

$$x^2+y^2+2xy\sqrt{(1-k^2)(1-m^2k^2)}-m^2k^2x^2y^2=k^2, \qquad \text{(a)}$$

und ist die Integralgleichung von

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\pm\sqrt{\frac{(1-y^2)(1-m^2y^2)}{(1-x^2)(1-m^2x^2)}}. * \qquad \text{(b)}$$

(Man vergl. „Grunerts Archiv“, XI, S. 395.) Weitere Hilfsmittel zur Integration der Differentialgleichungen erster Ordnung gibt oft die Integration der höheren Differentialgleichungen, zu der wir jetzt übergehen, an die Hand.

---

* Aus der Gleichung (a) folgt:

$$x=\frac{-\sqrt{(1-k^2)(1-m^2k^2)}\,y\pm k\sqrt{(1-y^2)(1-m^2y^2)}}{1-m^2k^2y^2}.$$

Setzt man nun voraus, es sey für $y=0$ nothwendig $x=k$, so gilt das obere Zeichen; das untere, wenn für $y=0$, $x=-k$. Eben so

$$y=\frac{-x\sqrt{(1-k^2)(1-m^2k^2)}\pm k\sqrt{(1-x^2)(1-m^2x^2)}}{1-m^2k^2x^2},$$

wo das $\left\{\begin{matrix}\text{obere}\\ \text{untere}\end{matrix}\right\}$ Zeichen gilt, wenn für $x=0: y=\left\{\begin{matrix}+k\\ -k\end{matrix}\right.$.

Aus (a) folgt durch Differentiation:

$$\frac{\partial y}{\partial x}=-\frac{x+\sqrt{(1-k^2)(1-m^2k^2)}\,y-m^2k^2xy^2}{y+\sqrt{(1-k^2)(1-m^2k^2)}\,x-m^2k^2x^2y},$$

während

$$x-m^2k^2xy^2+\sqrt{(1-k^2)(1-m^2k^2)}\,y=\pm k\sqrt{(1-y^2)(1-m^2y^2)},$$
$$y-m^2k^2x^2y+\sqrt{(1-k^2)(1-m^2k^2)}\,x=\pm k\sqrt{(1-x^2)(1-m^2y^2)}.$$

Hier gelten beiderseits die obern Zeichen, wenn für $y=0$: $x=+k$ und für $x=0$: $y=+k$; die unteren im entgegengesetzten Falle. Also ist

$$\frac{\partial y}{\partial x}=-\frac{\pm\sqrt{(1-y^2)(1-m^2y^2)}}{\pm\sqrt{(1-x^2)(1-m^2x^2)}},$$

d. h. 1) wenn für $x=0$ auch $y=+k$, $y=0$ „ $x=+k$: $\frac{\partial y}{\partial x}=-\sqrt{\frac{(1-y^2)(1-m^2y^2)}{(1-x^2)(1-m^2x^2)}}$,

2) $x=0$ „ $y=-k$, $y=0$ „ $y=-k$: $\frac{\partial y}{\partial x}=-$ „ ,

3) $x=0$ „ $y=+k$, $y=0$ „ $x=-k$: $\frac{\partial y}{\partial x}=+$ „ ,

4) $x=0$ „ $y=-k$, $y=0$ „ $y=+k$: $\frac{\partial y}{\partial x}=+$ „ .

Man ersieht hieraus, wie das Doppelzeichen in (b) zu wählen ist.

Dreizehnter Abschnitt.

Die Differentialgleichungen höherer Ordnung.

§. 72.

Eine Gleichung

$$f\left(x, y, \frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \ldots, \frac{\partial^n y}{\partial x^n}\right) = 0 \qquad \text{(a)}$$

heisst eine Differentialgleichung der n^{ten} Ordnung zwischen x und y. Eine jede solche Gleichung hat nothwendig eine Integralgleichung, in der n Konstanten vorkommen, die in der Gleichung (a) nicht enthalten sind. Der Nachweis dieser Behauptung lässt sich in ähnlicher Weise wie in §. 65 führen. Wählt man nämlich für einen beliebigen Werth $x = a$ die Werthe von $y, \frac{\partial y}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}}$ willkürlich, so gibt (a) den zugehörigen Werth von $\frac{\partial^n y}{\partial x^n}$, mithin erhält man, wenn man beachtet, dass für unendlich kleine Δx die Grössen (§. 11) $\Delta^n y, \Delta^{n-1} y, \ldots, \Delta y$ mit $\frac{\partial^n y}{\partial x^n}(\Delta x)^n, \frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}}(\Delta x)^{n-1}, \ldots, \frac{\partial y}{\partial x}\Delta x$ zusammenfallend angesehen werden dürfen, hieraus für $x = a + \Delta x$, die neuen Werthe von $\Delta^{n-1} y, \ldots, \Delta y$, also auch von $\frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}}, \ldots, \frac{\partial y}{\partial x}, y$, woraus die Gleichung (a) den zugehörigen Werth von $\frac{\partial^n y}{\partial x^n}$ liefert; hieraus folgen die zu $x = a + 2\Delta x$ gehörigen Werthe von $y, \ldots, \frac{\partial^n y}{\partial x^n}$ u. s. w., Alles nach dem Schema:

$$x = a:\ y_0,\ \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_0,\ \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)_0, \ldots\ldots, \left(\frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}}\right)_0;\ \left(\frac{\partial^n y}{\partial x^n}\right)_0 \text{ aus (a)};$$

$$x = a + \Delta x:\ y_1 = y_0 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_0 \Delta x,\ \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_1 = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_0 + \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)_0 \Delta x, \ldots,$$

$$\left(\frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}}\right)_1 = \left(\frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}}\right)_0 + \left(\frac{\partial^n y}{\partial x^n}\right)_0 \Delta x;\ \left(\frac{\partial^n y}{\partial x^n}\right)_1 \text{ aus (a)};$$

$$x = a + 2\Delta x:\ y_2 = y_1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_1 \Delta x,\ \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_2 = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_1 + \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)_1 \Delta x, \ldots,$$

$$\left(\frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}}\right)_2 = \left(\frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}}\right)_1 + \left(\frac{\partial^n y}{\partial x^n}\right)_1 \Delta x;\ \left(\frac{\partial^n y}{\partial x^n}\right)_2 \text{ aus (a)}.$$

$$\vdots$$

Man sieht hieraus, dass man die nach einander folgenden Werthe von y hiedurch alle ermitteln kann, so dass also y gegeben ist, mithin unsere Behauptung als gerechtfertigt erscheint. Die willkürlichen Grössen $y_0, \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_0$, ..., $\left(\frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}}\right)_0$ vertreten die n willkürlichen Konstanten. Es ist wohl von vorn herein klar, dass man hier noch weniger als im vorhergehenden Abschnitt eine allgemeine Auflösung der Gleichung (a) wird geben können, so dass wir uns zunächst an gewisse besondere Formen werden halten müssen.

I.) Sey

$$\frac{\partial^n y}{\partial x^n}=f(x)$$

die vorgelegte Gleichung, so folgt aus derselben durch unmittelbare Integration:

$$\frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}}=\int f(x)\,\partial x+C_1,\ \frac{\partial^{n-2} y}{\partial x^{n-2}}=\int\int f(x)\,\partial x^2+C_1 x+C_2,\ \ldots,\ y=\int\int\ldots\int f(x)\,\partial x^n+$$

$$\frac{C_1 x^{n-1}}{1.2..n-1}+\frac{C_2 x^{n-2}}{1.2..n-2}+\ldots+C_{n-1}x+C_n,$$

wo C_1, ..., C_n willkürliche Konstanten sind. Offenbar kann man auch schreiben:

$$y=\int\int\ldots\int f(x)\,\partial x^n+C_1 x^{n-1}+C_2 x^{n-2}+\ldots C_{n-1}x+C_n \quad (\S.\ 47).$$

II. Sey

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=f(y),$$

so setzt man, wenn $\frac{\partial y}{\partial x}=u$:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}\ (\S.\ 5)=\frac{\partial u}{\partial y}u,$$

also ist $\frac{\partial u}{\partial y}u=f(y)$, $\frac{u^2}{2}=\int f(y)\,\partial y+\frac{C}{2}$ (§. 65), $u^2=2\int f(y)\,\partial y+C$,

d. h.

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2=2\int f(y)\partial y+C,\ \frac{\partial y}{\partial x}=\pm\sqrt{2\int f(y)\partial y+C},\ \int\frac{\partial y}{\pm\sqrt{2\int f(y)\partial y+C}}=x+C',$$

so dass also die Integralgleichung ist:

$$x+C'=\pm\int\frac{\partial y}{\sqrt{2\int f(y)\partial y+C}},$$

wo beide Zeichen gelten.

III. $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=f\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)$ gibt $u\frac{\partial u}{\partial y}=f(u)$, $y=\int\frac{u\,\partial u}{f(u)}+C$,

und da auch

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{\partial u}{\partial x},\ \frac{\partial u}{\partial x}=f(u),\ \int\frac{\partial u}{f(u)}=x+C',$$

so wird man also u eliminiren zwischen $y=\int\frac{u\,\partial u}{f(u)}+C$ und $x=\int\frac{\partial u}{f(u)}+C'$.

IV.
$$\frac{\partial^{n+1} y}{\partial x^{n+1}} = f\left(\frac{\partial^n y}{\partial x^n}\right)$$

gibt, wenn man $\frac{\partial^n y}{\partial x^n} = u$ setzt:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f(u), \int \frac{\partial u}{f(u)} = x + C.$$

Ferner ist

$$\frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}} = \int \frac{\partial^n y}{\partial x^n} \partial x = \int u \, \partial x = \int u \frac{\partial x}{\partial u} \partial u \text{ (§. 36)} = \int \frac{u}{f(u)} \partial u + C_1 \text{ (§. 14)},$$

$$\frac{\partial^{n-2} y}{\partial x^{n-2}} = \int \frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}} \partial x = \int \left[\int \frac{u}{f(u)} \partial u + C_1\right] \frac{\partial x}{\partial u} \partial u = \int \left[\int \frac{u}{f(u)} \partial u + C_1\right] \frac{\partial u}{f(u)} + C_2,$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \int \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \partial x = \int \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \frac{\partial x}{\partial u} \partial u = \int \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \frac{\partial u}{f(u)} + C_{n-1},$$

$$y = \int \frac{\partial y}{\partial x} \partial x = \int \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial u}{f(u)} + C_n,$$

und wenn man dann u zwischen den Werthen von x und y eliminirt, so erhält man die Integralgleichung.

V.
$$\frac{\partial^{n+2} y}{\partial x^{n+2}} = f\left(\frac{\partial^n y}{\partial x^n}\right)$$

gibt für $\frac{\partial^n y}{\partial x^n} = u$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(u), \; x = \pm \int \frac{\partial u}{\sqrt{2\int f(u) \partial u + C}} + C_1 \text{ (Nr. II)}, \; \frac{\partial x}{\partial u} = \pm \frac{1}{\sqrt{2\int f(u) \partial u + C}}.$$

Dann
$$\frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}} = \int \frac{\partial^n y}{\partial x^n} \partial x = \int \frac{\partial^n y}{\partial x^n} \frac{\partial x}{\partial u} \partial u = \pm \int \frac{u \partial u}{\sqrt{2\int f(u) \partial u + C}} + C_2,$$

$$\frac{\partial^{n-2} y}{\partial x^{n-2}} = \pm \int \frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}} \frac{\partial u}{\sqrt{2\int f(u) \partial u + C}} + C_3, \ldots, y = \pm \int \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial u}{\sqrt{2\int f(u) \partial u + C}} + C_{n+1}.$$

VI. Hat man

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = f\left(x, \frac{\partial y}{\partial x}\right),$$

so setze man $\frac{\partial y}{\partial x} = u$, und die Gleichung ist

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f(x, u).$$

Kann man diese nach den Lehren des vorigen Abschnitts integriren, so erhält man eine Gleichung zwischen x, u und der Konstante C. Folgt daraus $u = \varphi(x, C)$, so ist

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \varphi(x, C), \; y = \int \varphi(x, C) \partial x + C'.$$

Folgt dagegen $x = \psi(u, C)$, so ist

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{1}{\frac{\partial x}{\partial u}}=\frac{\partial y}{\partial u}\frac{1}{\frac{\partial \psi(u,C)}{\partial u}},$$

d. h.
$$u=\frac{\partial y}{\partial u}\frac{1}{\frac{\partial \psi(u,C)}{\partial u}},\quad y=\int u\frac{\partial \psi(u,C)}{\partial u}\partial u+C'$$

und man wird u eliminiren zwischen den Werthen von x und y.

VII.
$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=f\left(y, \frac{\partial y}{\partial x}\right)$$

gibt für $\frac{\partial y}{\partial x}=u$, also $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}u$:

$$u\frac{\partial u}{\partial y}=f(y,u);$$

kann man diese Gleichung integriren, so erhält man eine Gleichung zwischen y, u und C, aus der folge $u=\varphi(y, C)$, dann ist also

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\varphi(y,C), \int\frac{\partial y}{\varphi(y,C)}=x+C'.$$

Folgt aber $y=\psi(u, C)$, so ist zugleich

$$\frac{\partial y}{\partial x}=u=\frac{\frac{\partial y}{\partial u}}{\frac{\partial x}{\partial u}}=\frac{\frac{\partial \psi(u,C)}{\partial u}}{\frac{\partial x}{\partial u}},$$

$$u\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{\partial \psi(u,C)}{\partial u},\quad x=\int\frac{\partial \psi(u,C)}{\partial u}\frac{\partial u}{u}+C'.$$

VIII.
$$\frac{\partial^{n+1} y}{\partial x^{n+1}}=f\left(x, \frac{\partial^n y}{\partial x^n}\right),$$

gibt für $\frac{\partial^n y}{\partial x^n}=u$:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=f(x,u);\quad F(x,u,C)=0;$$

folgt hieraus $u=\varphi(x, C)$, so ist

$$\frac{\partial^n y}{\partial x^n}=\varphi(x,C),$$

woraus y nach I. Zieht man dagegen daraus $x=\psi(u, C)$, $\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{\partial \psi(u,C)}{\partial u}$, so erhält man y wie in IV. Aehnlich ist, wenn

$$\frac{\partial^{n+2} y}{\partial x^{n+2}}=f\left(\frac{\partial^n y}{\partial x^n}, \frac{\partial^{n+1} y}{\partial x^{n+1}}\right)$$

für $\frac{\partial^n y}{\partial x^n}=u$:
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}\right),$$

welche Gleichung wie VII zu behandeln ist. Hat man dann $\frac{\partial u}{\partial x}=\varphi(u, C)$, so ist $x=\int\frac{\partial u}{\varphi(u,C)}+C'$ und y folgt wie in IV.

Ehe wir zu weiteren Spezialitäten übergehen, wollen wir doch vor Allem einige Beispiele zur Erläuterung des Vorstehenden lösen.

1.) $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = a^2 y$ gibt nach II:

$$x + C' = \pm \int \frac{\partial y}{\sqrt{2a^2 \int y \partial y + C}} = \pm \int \frac{\partial y}{\sqrt{a^2 y^2 + C}} = \pm \frac{1}{a} l(ay + \sqrt{a^2y^2 + C}).$$

Hieraus folgt

$$l(ay + \sqrt{a^2y^2+C}) = \pm(ax + aC'),\ ay + \sqrt{a^2y^2+C} = C_1 e^{\pm ax},\ \sqrt{a^2y^2+C} = C_1 e^{\pm ax} - ay,$$

$$a^2y^2 + C = C_1^2 e^{\pm 2ax} - 2ayC_1 e^{\pm ax} + a^2y^2,\ 2ayC_1 e^{\pm ax} = C_1^2 e^{\pm 2ax} - C,$$

$$y = \frac{C_1}{2a} e^{\pm ax} - \frac{C}{2aC_1} e^{\mp ax},\ \text{d. h. } y = Ae^{ax} + Be^{-ax},$$

wenn A und B die willkürlichen Konstanten.

Fig. 50.

2.) An einem elastischen Stab oder Seile AB (Fig. 50) werde ein Gewicht p angehängt, und es sey B die Ruhelage desselben; man bringe nun das Gewicht gewaltsam in die Lage B′, wodurch der Stab ausgedehnt wird und überlasse es dann, ohne ihm eine weitere Bewegung mitzutheilen, sich selbst. Es soll seine Bewegung untersucht werden.

Sey am Ende der Zeit t das Gewicht in M, in einer Entfernung x von der Ruhelage B, wo wir x positiv von B gegen B′ hin, negativ von B gegen B″ rechnen; in diesem Punkte wird der bewegte Körper nur von der elastischen Kraft des Stabes getrieben werden, da das eigene Gewicht aufgehoben wird durch den tragenden (bereits schon ausgedehnten) Stab; diese elastische Kraft ist proportional dem Abstande x und wirkt nach der Richtung B′B. Demnach (§. 13, IX) hat man

$$\frac{p}{g} \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -a^2 x,$$

wenn a^2 die elastische Kraft des Stabes in dem Abstande 1 bezeichnet. Hieraus folgt nach II:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -\alpha^2 x,\ \alpha^2 = \frac{a^2 g}{p};\ t + C' = \pm \int \frac{\partial x}{\sqrt{-2\alpha^2 \int x \partial x + C}} = \pm \int \frac{\partial x}{\sqrt{C - \alpha^2 x^2}} =$$

$$\pm \frac{1}{\alpha} \operatorname{arc}\left(\sin = \frac{\alpha x}{\sqrt{C}}\right).$$

$$\operatorname{arc}\left(\sin = \frac{\alpha c}{\sqrt{C}}\right) = \pm(\alpha t + \alpha C'),\ \frac{\alpha x}{\sqrt{C}} = \pm \sin(\alpha t + \alpha C') = \pm \cos\alpha C' \sin\alpha t \pm \sin\alpha C' \cos\alpha t.$$

Setzt man also $\pm\frac{\sqrt{C}}{\alpha}\cos\alpha C' = A$, $\pm\frac{\sqrt{C}}{\alpha}\sin\alpha C' = B$, so ist

$$x = A\sin\alpha t + B\cos\alpha t = A\sin\left(at\sqrt{\frac{g}{p}}\right) + B\cos\left(at\sqrt{\frac{g}{p}}\right).$$

Um nun A und B zu bestimmen, sey $BB' = c$, so ist $x = c$ für $t = 0$; da ferner die Geschwindigkeit im Anfange der Zeit ebenfalls Null ist, so ist auch (§. 13, IX) $\frac{\partial x}{\partial t} = 0$ für $t = 0$. Demnach

$$c = B,\ 0 = Aa\sqrt{\frac{g}{p}};\ B = c,\ A = 0,$$

$$x = c\cos\left(at\sqrt{\frac{g}{p}}\right).$$

Diese Gleichung charakterisirt die eintretende Bewegung vollständig. Da $\cos\left(at\sqrt{\frac{g}{p}}\right)$ zwischen $+1$ und -1 liegt, so folgt hieraus: Die Entfernung x wird nie grösser als c, d. h. der Körper geht nie weiter als nach B′; er kommt dort

an zu den Zeiten $t=0, \frac{2\pi}{a}\sqrt{\frac{p}{g}}, \frac{4\pi}{a}\sqrt{\frac{p}{g}}, \ldots$; x wird nie kleiner als $-c$, d. h. der Körper steigt nicht über B'', wenn BB''=BB'; er kommt in B'' an zu den Zeiten $\frac{\pi}{a}\sqrt{\frac{p}{g}}, \frac{3\pi}{a}\sqrt{\frac{p}{g}}, \ldots$ Die Geschwindigkeit $\frac{\partial x}{\partial t}$ ist am grössten, wenn $\cos\left(at\sqrt{\frac{g}{p}}\right)=0$, d. h. wenn $x=0$, oder wenn der Körper durch B geht, sie ist Null, wenn der Körper in B' oder B'' ist. Man sieht daraus, dass die Bewegung eine regelmässig schwingende ist, und dass die Dauer einer ganzen Schwingung $= \frac{2\pi}{a}\sqrt{\frac{p}{g}}$ ist.

Gesetzt, jedes Mal wenn der Körper in B' wieder angelangt, gebe man ihm einen kleinen Stoss, der ihm eine Geschwindigkeit m ertheile gerichtet gegen B, so wollen wir nun annehmen, in einem bestimmten Zeitmomente befinde sich der Körper eben in B' und wollen von da an die Zeit t rechnen. Alsdann ist wie oben

$$x = A\sin\alpha t + B\cos\alpha t,$$

und für $t=0$: $x=c, \frac{\partial x}{\partial t}=-m$, also

$$c=B,\quad -m=A\alpha;\quad B=c,\quad A=-\frac{m}{\alpha},$$

und
$$x=-\frac{m}{a}\sqrt{\frac{p}{g}}\sin\left(at\sqrt{\frac{g}{p}}\right)+c\cos\left(at\sqrt{\frac{g}{p}}\right).$$

x wird auch jetzt nach der Zeit $\frac{2\pi}{a}\sqrt{\frac{p}{g}}$ jeweils wieder denselben Werth erlangen, die Schwingungsdauer also dieselbe bleiben, aber $\frac{\partial x}{\partial t}$ wird 0 seyn, wenn

$$-m\cos\left(at\sqrt{\frac{g}{p}}\right)-ac\sqrt{\frac{g}{p}}\sin\left(at\sqrt{\frac{g}{p}}\right)=0,\quad tg\left(at\sqrt{\frac{g}{p}}\right)= \frac{-m}{ac}\sqrt{\frac{p}{g}};$$

woraus für $at\sqrt{\frac{g}{p}}$ zunächst ein Werth zwischen $\frac{\pi}{2}$ und π, etwa $=\gamma$ folgt; aber eben so auch $\gamma+\pi$, $\gamma+2\pi, \ldots$, so dass also die Werthe der Zeit t, für welche x ein Maximum oder Minimum ist, sind:

$$\frac{\gamma}{a}\sqrt{\frac{p}{g}}, \frac{(\gamma+\pi)}{a}\sqrt{\frac{p}{g}}, \frac{(\gamma+2\pi)}{a}\sqrt{\frac{p}{g}}, \ldots,$$

und zwar geben der erste, dritte, ... Minima, die andern Maxima, für die ersteren wird

$$x=-\frac{\frac{m}{a}\sqrt{\frac{p}{g}}\cdot\frac{m}{ac}\sqrt{\frac{p}{g}}+c}{\sqrt{1+\frac{m^2}{a^2c^2}\frac{p}{g}}}=-\frac{1}{a}\sqrt{a^2c^2+m^2\frac{p}{g}},$$

für die andern $x=+\frac{1}{a}\sqrt{a^2c^2+m^2\frac{p}{g}}$. Da dies $>c$, so wird also die Ausdehnung der Schwingung grösser seyn als früher. Wenn also jedes Mal, wenn der Körper in seinem tiefsten (höchsten) Punkte angelangt ist, demselben ein, wenn auch noch so kleiner Stoss ertheilt wird, so werden seine Schwingungen nothwendig

immer weiter werden, so dass am Ende der Stab, wenn er diese grossen Ausdehnungen nicht ertragen kann, zerreissen wird. *

3.) Man soll diejenige Kurve bestimmen, in der der Krümmungshalbmesser in allen Punkten derselbe ($=a$) ist. Man hat also (§. 13, XI)

$$\pm \frac{\left[1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}=a,\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\pm\frac{1}{a}\left[1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}$$

folglich nach III:

$$y=\pm\int\frac{a u\,\partial u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}+C,\ x=\pm a\int\frac{\partial u}{(1+u^2)^{\frac{3}{2}}}+C',$$

$$y=\mp\frac{a}{(1+u^2)^{\frac{1}{2}}}+C,\ x=\pm\frac{a u}{(1+u^2)^{\frac{1}{2}}}+C,$$

woraus

$$(y-C)^2+(x-C')^2=a^2,$$

d. h. die Kurve ist ein Kreis vom Halbmesser a. Sein Mittelpunkt ist beliebig wo.

4.) Man soll

$$\left(\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}\right)^2=a^2\frac{\partial^3 y}{\partial x^3},\ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4}=a\sqrt{\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}}$$

integriren. Nach IV, wo jetzt $n=3$, $f(u)=a\sqrt{u}$:

$$x+C=\int\frac{\partial u}{a\sqrt{u}}=\frac{2}{a}\sqrt{u};\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\int u\frac{\partial x}{\partial u}\partial u=\int\frac{\sqrt{u}}{a}\partial u=\frac{2}{3a}u^{\frac{3}{2}}+C_1;$$

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\int\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial u}\partial u=\frac{2}{3a}\int\frac{u^{\frac{3}{2}}}{a\sqrt{u}}\partial u+C_1\int\frac{\partial u}{a\sqrt{u}}=\frac{1}{3a^2}u^2+\frac{2C_1}{a}\sqrt{u}+C_2;$$

$$y=\frac{1}{3a^2}\int\frac{u^2}{a\sqrt{u}}\partial u+\frac{2C_1}{a}\int\frac{\sqrt{u}}{a\sqrt{u}}\partial u+C_2\int\frac{\partial u}{a\sqrt{u}}=\frac{2}{15a^3}u^{\frac{5}{2}}+\frac{2C_1}{a^2}u+\frac{2C_2}{a}u^{\frac{1}{2}}+C_3.$$

Aber $\sqrt{u}=\frac{ax}{2}+C$, $y=\frac{2}{15a^3}u^{\frac{5}{2}}+C_1 u+C_2 u^{\frac{1}{2}}+C_3$, d. h.

$$y=\frac{2}{15a^3}\left(\frac{ax}{2}+C\right)^5+C_1\left(\frac{ax}{2}+C\right)^2+C_2\left(\frac{ax}{2}+C\right)+C_3,$$

oder was dasselbe ist

$$y=\frac{a^2x^5}{240}+\frac{Cax^4}{24}+\frac{C^2x^3}{6}+C_1x^2+C_2x+C_3.$$

5.)
$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^3=-a;\ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4}=-\frac{a}{\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^3}$$

gibt nach V, wo $n=2$, $f(u)=-\frac{a}{u^3}$, $\left(u=\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)$:

$$x=\pm\int\frac{\partial u}{\sqrt{C-2a\int\frac{\partial u}{u^3}}}+C_1=\pm\int\frac{\partial u}{\sqrt{C+\frac{a}{u^2}}}+C_1=\pm\int\frac{u\,\partial u}{\sqrt{Cu^2+a}}+C_1=$$
$$\pm\frac{1}{C}\sqrt{Cu^2+a}+C_1.$$

Hieraus folgt

* Hierauf beruht die Erklärung der Beobachtung Savarts, dass wenn man den benetzten Finger in regelmässigen Zwischenzeiten an einem elastischen Stabe hin und herführt, derselbe in Schwingungen von messbarer Weite versetzt werden kann. Desgleichen erklärt sich hieraus das Zerreissen von Kettenbrücken unter dem regelmässigen Tritt der Soldaten u. s. w.

$$(Cx-C_1)^2 = Cu^2+a,\ u^2 = \frac{(Cx-C_1)^2-a}{C},$$

so dass also

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \pm\sqrt{\frac{(Cx-C_1)^2-a}{C}},\ y = \pm\int\int\sqrt{\frac{(Cx-C_1)^2-a}{C}}\,\partial x^2 + C_2 x + C_3.$$

6.) Man soll diejenige ebene Kurve finden, in welcher die von einem bestimmten Punkte anfangenden Bögen mit den Stücken der Ordinatenaxe, welche durch die Tangenten in den Endpunkten dieser Bögen abgeschnitten werden, in einem konstanten Verhältnisse stehen.

Die Gleichung der Tangente im Punkte (x, y) der gesuchten Kurve ist:

$$v - y = \frac{\partial y}{\partial x}(\xi - x);$$

sie trifft die Ordinatenaxe in einem Punkte, dessen Ordinate $= y - x\frac{\partial y}{\partial x}$ ist. Sey also x_1 die Abszisse des Anfangspunktes eines Bogens, x die des Endpunktes; y_1, y die zugehörigen Ordinaten, so ist die Bogenlänge $= \pm\int_{x_1}^{x}\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}\,\partial x$, während das Stück der Ordinatenaxe zwischen den beiden Tangenten $= y - x\frac{\partial y}{\partial x} - \left[y_1 - x_1\frac{\partial y_1}{\partial x_1}\right]$ ist, wo $\frac{\partial y_1}{\partial x_1}$ den Werth von $\frac{\partial y}{\partial x}$ für $x = x_1$ bezeichnet, so dass also

$$\pm\int_{x_1}^{x}\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}\,\partial x = a\left[y - x\frac{\partial y}{\partial x} - \left(y_1 - x_1\frac{\partial y_1}{\partial x_1}\right)\right]. \qquad (a)$$

Da nun x_1, y_1 konstant sind, so folgt hieraus, wenn man nach x differenzirt (§. 61):

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2} = \mp a x\frac{\partial^2 y}{\partial x^2},\quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\frac{n}{x}\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2},\ n = \pm\frac{1}{a},$$

aus welcher Gleichung die Kurve zu bestimmen ist. Nach IV ist (für $\frac{\partial y}{\partial x} = u$):

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{n}{x}\sqrt{1+u^2},\ \text{also} \int\frac{\partial u}{\sqrt{1+u^2}} = -n\int\frac{\partial x}{x} + C \text{ (§. 65)},$$

$$l(u+\sqrt{1+u^2}) = -n\,l(x) + C,\ u+\sqrt{1+u^2} = Cx^{-n},\ u+\sqrt{1+u^2} = Cx^{-n};$$

woraus

$$1+u^2 = C^2x^{-2n} - 2Cux^{-n} + u^2,\ u = \frac{C}{2}x^{-n} - \frac{1}{2C}x^{n},$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{C}{2}x^{-n} - \frac{1}{2C}x^{n},\ y = -\frac{C}{2(n-1)}x^{1-n} - \frac{1}{2C(n+1)}x^{n+1} + C'.$$

Dabei gilt in $n = \pm\frac{1}{a}$ das obere Zeichen, wenn der Bogen wächst mit wachsendem x (§. 55).

Anm. Dieselbe Aufgabe kann auch etwas anders eingekleidet werden. Denken wir uns nämlich, es bewege sich ein Gegenstand in der Ordinatenaxe gleichförmig, während ein anderer sich mit ebenfalls gleichförmiger Geschwindigkeit gegen ihn bewegt, so beschreibt letzterer die fragliche Kurve, und wenn man in einem Punkte dieser Kurve die Tangente zieht, so trifft sie die Ordinatenaxe in dem Punkte, in dem der erste Gegenstand (Herr) sich befindet, während der zweite (Hund) in dem fraglichen Kurvenpunkt ist. Die Grösse a ist = der Geschwindigkeit des Hundes dividirt durch die des Herrn. Ist im Anfange der Zeit der Herr im Anfangspunkt der Koordinaten, der Hund im Punkte x_1, y_1, so muss für $x = x_1$ auch $y = y_1$ seyn, was eine Gleichung zur Bestimmung der zwei Konstanten liefert; da $n < 1$ seyn wird,

so ist für $x=0$, $y=C'$, also ist C' der ganze Weg, den der Herr zurücklegt, bis der Hund ihn einholt, so dass (da der Bogen wächst mit abnehmendem x), also $n=-\frac{1}{a}$:

$$-\int_{x_1}^{0}\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}\,\partial x = aC' = -\frac{1}{n}C'$$

seyn muss. was auf

$$\frac{Cx_1^{1-n}}{2(1-n)}+\frac{1}{2(1+n)C}x_1^{1+n}+\frac{C'}{n}=0$$

führt, welches die zweite Gleichung ist zwischen den Konstanten C und C'. Uebrigens muss auch die Tangente an die Kurve im Punkte x_1, y_1 durch den Anfangspunkt gehen, d. h. es muss $y_1-x_1\frac{\partial y_1}{\partial x_1}=0$ seyn, und da $y_1=+\frac{C}{2(1-n)}x_1^{1-n}-\frac{1}{2(n+1)C}x_1^{1+n}+C'$, $\frac{\partial y_1}{\partial x_1}=\frac{C}{2}x_1^{-n}-\frac{1}{2C}x_1^{n}$, so erhält man dieselbe Gleichung wieder.

7.) Man soll die Kurve finden, bei der der Krümmungshalbmesser im Punkte (x, y) gleich ist $n$mal der Länge des Stücks der Normale zwischen diesem Punkte und der Abszissenaxe.

Man hat also

$$\frac{\left(1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}=ny\sqrt{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2},\quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{1}{ny}\left[1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right],$$

so dass nach VII:

$$u\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{ny}(1+u^2),\quad \int\frac{u\,\partial u}{1+u^2}=\int\frac{\partial y}{ny}+C,\quad \frac{1}{2}l(1+u^2)=\frac{1}{n}l(y)+C,$$

$$\sqrt{1+u^2}=Cy^{\frac{1}{n}},\quad 1+u^2=Cy^{\frac{2}{n}},\quad \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2=Cy^{\frac{2}{n}}-1,$$

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\pm\sqrt{Cy^{\frac{2}{n}}-1},\quad \pm\int\frac{\partial y}{\sqrt{Cy^{\frac{2}{n}}-1}}=x+C',$$

in welcher Gleichung nun n gegeben seyn muss, ehe man integriren kann. Dabei kann übrigens n positiv oder negativ seyn, da die erste Seite der gewählten Gleichung den positiven oder negativen Werth des Krümmungshalbmessers ausdrücken kann.

Sey z. B. $n=-2$, so ist

$$\int\frac{\partial y}{\sqrt{Cy^{-1}-1}}=\int\frac{\sqrt{y}\,\partial y}{\sqrt{C-y}}=\int\frac{y\,\partial y}{\sqrt{Cy-y^2}}=-\sqrt{Cy-y^2}+\frac{C}{2}\operatorname{arc}\left(\sin=\frac{2y-C}{C}\right),$$

also

$$\pm(x+C')=\frac{C}{2}\operatorname{arc}\left(\sin=\frac{2y-C}{C}\right)-\sqrt{Cy-y^2},$$

was eine Cycloide ausdrückt. Für $n=2$ ist

$$\int\frac{\partial y}{\sqrt{Cy-1}}=\frac{2}{C}\sqrt{Cy-1},\quad x+C'=\pm\frac{2}{C}\sqrt{Cy-1},$$

eine Parabel.

8.) Ein Körper bewegt sich geradlinig unter dem Einfluss der Schwerkraft (fällt vertikal herab) in einem Medium (Atmosphäre), das einen Widerstand leistet,

der proportional ist dem Quadrate der Geschwindigkeit. Man soll seine Bewegung bestimmen.

Am Ende der Zeit t sey er in dem Abstande x von seinem Ausgangspunkte, so ist seine bewegende Kraft (§. 13, X) $=\frac{p}{g}\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$; dieselbe ist aber auch $=p-pm^2\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2$, wenn m^2 ein gewisser Koeffizient ist, so dass pm^2 den Luftwiderstand für die Geschwindigkeit 1 ausdrückt (§. 13, IX), also ist

$$\frac{p}{g}\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}=p-pm^2\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2,\quad \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}=g-gm^2\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2;$$

$\frac{\partial x}{\partial t}=u$ gesetzt gibt

$$\frac{\partial u}{\partial t}=g(1-m^2u^2),\ g\frac{\partial t}{\partial u}=\frac{1}{1-m^2u^2}\ (\S.\ 14),\ gt=\int\frac{\partial u}{1-m^2u^2}+C=$$

$$\frac{1}{2m}l\left(\frac{1+mu}{1-mu}\right)+C,\ 2mgt+C=l\left(\frac{1+mu}{1-mu}\right),$$

$$\frac{1+mu}{1-mu}=Ce^{2mgt},\ mu=\frac{Ce^{2mgt}-1}{Ce^{2mgt}+1}.$$

Ist für $t=0$ auch die Geschwindigkeit 0, so ist dann $u=0$, also $C=1$ und

$$mu=\frac{e^{2mgt}-1}{e^{2mgt}+1},\ m\frac{\partial x}{\partial t}=\frac{e^{2mgt}-1}{e^{2mgt}+1},\ mx=\int\frac{e^{2mgt}-1}{e^{2mgt}+1}\partial t+C'$$

$$=\int\frac{e^{mgt}-e^{-mgt}}{e^{mgt}+e^{-mgt}}\partial t+C'=\frac{1}{mg}l(e^{mgt}+e^{-mgt})+C',$$

und da $x=0$ für $t=0$, so ist $0=\frac{1}{mg}l(2)+C'$, $C'=-\frac{1}{mg}l(2)$, also endlich

$$\frac{\partial x}{\partial t}=\frac{1}{m}\frac{e^{mgt}-e^{-mgt}}{e^{mgt}+e^{-mgt}},\ x=\frac{1}{m^2g}l\left(\frac{e^{mgt}+e^{-mgt}}{2}\right),$$

welche zwei Gleichungen für jede Zeit t die Geschwindigkeit und den zurückgelegten Weg angeben. Wir haben dabei jeweils die willkürlichen Konstanten sogleich bestimmt, wie dies der Aufgabe angemessen war, wobei wir also annahmen, dass der Körper ohne Anfangsgeschwindigkeit frei herabfalle.

9.) Eine ebene Wand besteht aus mehreren parallelen Schichten, von denen jede für sich gleichartig ist. Sie wird von Wärme durchströmt und es ist bereits der Beharrungszustand derart eingetreten, dass die Temperatur in jedem Punkte immer dieselbe bleibt und in allen Punkten, die gleich weit von der äusseren Seite entfernt sind, ebenfalls dieselbe ist. Ferner sey die Wand auf der Seite, auf der die Wärme einströmt, von einem Raume umgeben, der beständig die Temperatur t_0 hat; auf der anderen Seite von einem eben solchen von der Temperatur t_1. Man soll den Zustand der Temperatur im Innern untersuchen.

Es bestehe die Wand aus n Schichten, deren Dicken $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_n$ seyen; man nehme die Axe der x senkrecht auf die Wand und die Seite, auf der die Wärme einströmt, zur Ebene der yz; sey λ_0 der Koeffizient für das Einströmen der Wärme (in die erste Schichte), λ_n der für das Ausströmen (aus der n^{ten}); $k_1, k_2, \ldots k_n$ die Koeffizienten für die Leitungsfähigkeit im Innern; $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}$ die für den Uebergang der Wärme von der 1ten zur 2ten, ..., von der $n-1^{ten}$ zur n^{ten} Schichte,

so ist jetzt die in §. 34, III mit v bezeichnete Temperatur von t, und eben so von y und z unabhängig, so dass für jede Schichte ist

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0, \text{ mithin } v = ax + b.$$

Sind also $v_1, v_2, \ldots, v_n$ die Temperaturen in der $1^{ten}, \ldots, n^{ten}$ Schichte, so ist

$$v_1 = a_1 x + b_1, \quad v_2 = a_2 x + b_2, \ldots\ldots, v_n = a_n x + b_n,$$

wo $a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n$ noch zu bestimmende Konstanten sind. In der ersten Gleichung geht x von 0 bis δ_1, in der zweiten von δ_1 bis $\delta_1 + \delta_2, \ldots\ldots$, in der n^{ten} von $\delta_1 + \delta_2 + \ldots \delta_{n-1}$ bis $\delta_1 + \delta_2 + \ldots \delta_n$. Demnach hat man jeweils für den Anfang und das Ende einer jeden Schichte folgende Temperaturen: 1te Schichte: b_1 und $a_1 \delta_1 + b_1$; 2te Schichte: $a_2 \delta_1 + b_2$ und $a_2(\delta_1 + \delta_2) + b_2; \ldots\ldots$; n^{te} Schichte: $a_n(\delta_1 + \ldots\ldots + \delta_{n-1}) + b_n$ und $a_n(\delta_1 + \ldots\ldots + \delta_n) + b_n$; da ferner $\frac{\partial v}{\partial x} = a$, so hat man also nach §. 34, VII und VI:

$$a_1 k_1 = a_2 k_2 = \ldots, = a_n k_n; -a_1 k_1 = \lambda_1 [a_1 \delta_1 + b_1 - a_2 \delta_1 - b_2], -a_2 k_2 = \lambda_2 [a_2(\delta_1 + \delta_2) + b_2 - a_3(\delta_1 + \delta_2) - b_3], \ldots, -a_{n-1} k_{n-1} = \lambda_{n-1}[a_{n-1}(\delta_1 + \ldots + \delta_{n-1}) + b_{n-1} - a_n(\delta_1 + \ldots \delta_{n-1}) - b_n]; -k_1 a_1 = \lambda_0 (t_0 - b_1), -k_n a_n = \lambda_n [a_n(\delta_1 + \ldots + \delta_n) + b_n - t_1].$$

Daraus folgt:

$$a_1 k_1 = \frac{t_1 - t_0}{\frac{1}{\lambda_0} + \frac{1}{\lambda_1} + \ldots + \frac{1}{\lambda_n} + \frac{\delta_1}{k_1} + \frac{\delta_2}{k_2} + \ldots + \frac{\delta_n}{k_n}},$$

$$b_1 = \frac{\frac{t_1}{\lambda_0} + t_0\left(\frac{1}{\lambda_1} + \ldots + \frac{1}{\lambda_n} + \frac{\delta_1}{k_1} + \ldots + \frac{\delta_n}{k_n}\right)}{\frac{1}{\lambda_0} + \frac{1}{\lambda_1} + \ldots + \frac{1}{\lambda_n} + \frac{\delta_1}{k_1} + \ldots + \frac{\delta_n}{k_n}};$$

$$a_r = \frac{k_1 a_1}{k_r}; \quad b_r = b_1 + a_1 k_1 \left[\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} + \ldots + \frac{1}{\lambda_{r-1}} + \frac{\delta_1}{k_1} + \frac{\delta_2}{k_2} + \ldots + \frac{\delta_{r-1}}{k_{r-1}} - \frac{\delta_1 + \ldots + \delta_{r-1}}{k_r}\right].$$

Die Wärmemenge, welche (überall) durch die Einheit der Fläche in der Zeiteinheit strömt, ist gleich $-k_n a_n = -k_1 a_1$, d. h. gleich

$$\frac{t_0 - t_1}{\frac{1}{\lambda_0} + \frac{1}{\lambda_1} + \ldots + \frac{1}{\lambda_n} + \frac{\delta_1}{k_1} + \ldots + \frac{\delta_n}{k_n}},$$

und wenn man diese kennt, so lässt sich t_1 aus t_0 bestimmen.

10.) Wir wollen uns dieselbe Aufgabe wie in Nr. 9 vorlegen, nur seyen die Schichten konzentrische Kugelschichten. Die Grössen λ, k, t sollen dieselbe Bedeutung haben wie so eben; es seyen die inneren Halbmesser der ersten, zweiten, $\ldots\ldots, n^{ten}$ Schichte gleich $r_0, r_1, \ldots, r_{n-1}$ und r_n der äussere Halbmesser der n^{ten} Schichte.

Darf man die obigen Voraussetzungen nebst denen in §. 34, IV machen, so ist

$$\frac{\partial^2(rv)}{\partial r^2} = 0, \quad rv = ar + b, \quad v = a + \frac{b}{r},$$

d. h. wenn $v_1, \ldots, v_n$ dieselbe Bedeutung wie in Nr. 9 haben:

$$v_1 = a_1 + \frac{b_1}{r}, \quad v_2 = a_2 + \frac{b_2}{r}, \ldots\ldots, v_n = a_n + \frac{b_n}{r}.$$

Da hier $\frac{\partial v}{\partial r}$ (§. 34, Nr. VI, VII) $= -\frac{b}{r^2}$, so hat man zur Bestimmung der $2n$ Konstanten $a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n$, die folgenden Gleichungen:

a) wenn die Wärme von Innen nach Aussen geht, also t_0 die Temperatur auf der hohlen Seite der ersten Schichte, t_1 auf der erhabenen der letzten, λ_0 der Einstrahlungskoeffizient bei der ersten, λ_n der Ausstrahlungskoeffizient bei der letzten ist:

$$\frac{k_1 b_1}{r_0^2} = \lambda_0\left(t_0 - a_1 - \frac{b_1}{r_0}\right),\ \frac{k_n b_n}{r_n^2} = \lambda_n\left(a_n + \frac{b_n}{r_n} - t_1\right);\ \frac{k_1 b_1}{r_1^2} = \frac{k_2 b_2}{r_1^2},\ \frac{k_2 b_2}{r_2^2} = \frac{k_3 b_3}{r_2^2}, \ldots,$$

$$\frac{k_{n-1} b_{n-1}}{r^2_{n-1}} = \frac{k_n b_n}{r^2_{n-1}};\ \frac{k_1 b_1}{r_1^2} = \lambda_1\left[a_1 + \frac{b_1}{r_1} - a_2 - \frac{b_2}{r_1}\right],\ \frac{k_2 b_2}{r_2^2} = \lambda_2\left[a_2 + \frac{b_2}{r_2} - a_3 - \frac{b_3}{r_2}\right], \ldots$$

$$\frac{k_{n-1} b_{n-1}}{r^2_{n-1}} = \lambda_{n-1}\left[a_{n-1} + \frac{b_{n-1}}{r_{n-1}} - a_n - \frac{b_n}{r_{n-1}}\right].$$

Hieraus folgt:

$$k_1 b_1 = \frac{t_0 - t_1}{\left\{\begin{array}{c}\frac{1}{\lambda_0 r_0^2} + \frac{1}{\lambda_1 r_1^2} + \ldots + \frac{1}{\lambda_n r_n^2} + \left(\frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1}\right)\frac{1}{r_1} + \left(\frac{1}{k_3} - \frac{1}{k_2}\right)\frac{1}{r_2} + \ldots \\ + \left(\frac{1}{k_n} - \frac{1}{k_{n-1}}\right)\frac{1}{r_{n-1}} + \frac{1}{r_0 k_1} - \frac{1}{r_n k_n}\end{array}\right\}},$$

$$a_1 = \frac{\left\{\begin{array}{c}t_0\left[\frac{1}{\lambda_1 r_1^2} + \ldots + \frac{1}{\lambda_n r_n^2} + \left(\frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1}\right)\frac{1}{r_1} + \ldots + \left(\frac{1}{k_n} - \frac{1}{k_{n-1}}\right)\frac{1}{r_{n-1}}\right] + \frac{t_1}{\lambda_0 r_0^2} + \\ \frac{t_1}{k_1 r_0} - \frac{t_0}{k_n r_n}\end{array}\right\}}{\frac{1}{\lambda_0 r_0^2} + \frac{1}{\lambda_1 r_1^2} + \ldots\ldots\ldots + \frac{1}{r_0 k_1} - \frac{1}{r_n k_n}},$$

$$a_m = a_1 - k_1 b_1\left[\frac{1}{\lambda_1 r_1^2} + \ldots + \frac{1}{\lambda_{m-1} r^2_{m-1}}\right] - k_1 b_1\left[\left(\frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1}\right)\frac{1}{r_1} + \ldots \right.$$
$$\left. + \left(\frac{1}{k_m} - \frac{1}{k_{m-1}}\right)\frac{1}{r_{m-1}}\right],\ b_m = \frac{k_1 b_1}{k_m}.$$

Die durch die Einheit der Fläche in der Zeiteinheit in die erste Schichte einströmende Wärmemenge ist gleich $\frac{k_1 b_1}{r_0^2}$.

b) wenn die Wärme von Aussen nach Innen geht, so gilt dieselbe Auflösung, nur muss man dann die Schichten von Aussen nach Innen zählen; t_0 als die Temperatur auf der erhabenen Seite der ersten, t_1 als die auf der hohlen Seite der letzten Schichte ansehen.

Man sieht aus Nr. 9 und 10, dass in beiden Fällen die durch die Flächeneinheit in der Zeiteinheit strömende Wärmemenge der Temperaturdifferenz $t_0 - t_1$ proportional ist.

§. 73.

I. Betrachtet man $\frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \ldots$ als Grössen von den Graden $0, -1, -2, \ldots$, so wird eine Differentialgleichung homogen seyn, wenn alle ihre einzelnen Theile denselben Grad haben, d. h. wenn, indem man $y = xz$, $\frac{\partial y}{\partial z} = u$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{v}{x}, \ldots$ setzt, in allen Gliedern dieselbe Potenz von x als gemeinschaftlichen Faktor ausgeschieden

werden kann, und die bleibende Grösse kein x mehr enthält. Eine homogene Differentialgleichung des zweiten Grades kann immer auf eine Differentialgleichung des ersten Grades zurückgeführt werden, indem man die so eben angeführten Werthe einsetzt und dadurch eine Gleichung zwischen z, u, v erhält, die gestattet, eine dieser Grössen durch die zwei andern auszudrücken. Aus den Gleichungen:

$$u = x\frac{\partial z}{\partial x} + z,\ \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{v}{x}$$

wird man dann mittelst jener Beziehungen immer eine Differentialgleichung zwischen u und z, oder v und z oder u und v herstellen können. Dazu werden folgende Formeln dienen:

$$v = \varphi(u, z):\ x\frac{\partial z}{\partial x} = u - z,\ x\frac{\partial u}{\partial x} = v,\ \frac{\partial z}{\partial u} = \frac{u-z}{v}\ (\S. 14);$$

$$u = \psi(v, z):\ \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{v}{u-z},\ \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial \psi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial z}\ (\S. 7),\ \frac{\partial \psi}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{v}{u-z};$$

$$z = f(u, v):\ \frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial u},\ \frac{\partial z}{\partial u} = \frac{u-z}{v},\ \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial u} = -\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{u-z}{v}.$$

Kann man diese Gleichung integriren, so hat man eine weitere Beziehung zwischen u, v, z, und mittelst derselben lässt sich y durch x ausdrücken. So wenn etwa u und v in z ausgedrückt sind, gibt $x\frac{\partial z}{\partial x} = u - z$ die Gleichung zwischen x und z; $y = xz$ die zwischen y und x, u. s. w.

1.)
$$ax^3\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \left(y - x\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2,$$

gibt
$$av = (z-u)^2,\ v = \frac{(z-u)^2}{a},\ \frac{\partial z}{\partial u} = -\frac{a}{z-u},\ \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{u-z}{a},$$

welche Gleichung nach §. 66, I integrirt, gibt:

$$u = e^{\frac{1}{a}\int\partial z}\left[C - \frac{1}{a}\int z e^{-\frac{1}{a}\int\partial z}\partial z\right] = e^{\frac{z}{a}}\left[C - \frac{1}{a}\int z e^{-\frac{z}{a}}\partial z\right] = Ce^{\frac{z}{a}} + z + a,$$

$$u - z = Ce^{\frac{z}{a}} + a,\ x\frac{\partial z}{\partial x} = Ce^{\frac{z}{a}} + a,\ \int\frac{\partial z}{Ce^{\frac{z}{a}} + a} = \int\frac{\partial x}{x} + C';$$

setzt man hier $e^{\frac{z}{a}} = \varphi$, $z = a\,l(\varphi)$, $\frac{\partial z}{\partial \varphi} = \frac{a}{\varphi}$, so ist:

$$\int\frac{\partial z}{Ce^{\frac{z}{a}} + a} = \int\frac{a\,\partial\varphi}{\varphi(C\varphi + a)} = l\left(\frac{\varphi}{C\varphi + a}\right) = l\left(e^{\frac{z}{a}}\right) - l\left(Ce^{\frac{z}{a}} + a\right),$$

also
$$l\left(e^{\frac{z}{a}}\right) - l\left(Ce^{\frac{z}{a}} + a\right) = l(x) + C',\ \frac{e^{\frac{z}{a}}}{Ce^{\frac{z}{a}} + a} = C_1 x,\ z = \frac{y}{x},$$

so dass die Integralgleichung ist

$$e^{\frac{y}{ax}} = C_1 x\left(Ce^{\frac{y}{ax}} + a\right),\ e^{\frac{y}{ax}} = Cxe^{\frac{y}{ax}} + C_1 ax,\ e^{\frac{y}{ax}} = \frac{C_1 ax}{1 - Cx}.$$

2.)
$$y = x\frac{\partial y}{\partial x} + x^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

gibt
$$z = u + v,\ \frac{\partial z}{\partial u} = 1 + \frac{\partial v}{\partial u},\ u - z = -v,\ \frac{u-z}{v} = -1;$$

$$1+\frac{\partial v}{\partial u}=-1,\ v=-2u+C,\ z=u+v=-u+C;$$

$$x\frac{\partial u}{\partial x}=v,\ x\frac{\partial u}{\partial x}=-2u+C,\int\frac{\partial u}{2u-C}=-\int\frac{\partial x}{x}+C',\ l\sqrt{2u-C}=-l(x)+C',$$

$$\sqrt{2u-C}=\frac{C_1}{x},\ 2u-C=\frac{C_1}{x^2},\ u=\frac{C_1}{2x^2}+\frac{C}{2},\ -u+C=-\frac{C_1}{2x^2}+\frac{C}{2}=z=\frac{y}{x};$$

$$y=-\frac{C_1}{2x}+\frac{C}{2}x;\ y=Cx+\frac{C_1}{x}.$$

II. Wird die Differentialgleichung zweiter Ordnung erst homogen, wenn man y, $\frac{\partial y}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ als vom n^{ten}, $(n-1)^{ten}$, $(n-2)^{ten}$ Grade ansieht, so setze man

$$y=x^n z,\ \frac{\partial y}{\partial x}=x^{n-1}u,\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=x^{n-2}v$$

und erhält eine Gleichung zwischen z, u, v. Dann ist

$$nx^{n-1}z+x^n\frac{\partial z}{\partial x}=x^{n-1}u;\ (n-1)x^{n-2}u+x^{n-1}\frac{\partial u}{\partial x}=x^{n-2}v,\ \text{d. h.}$$

$$nz+x\frac{\partial z}{\partial x}=u;\ (n-1)u+x\frac{\partial u}{\partial x}=v;\ x\frac{\partial z}{\partial x}=u-nz,\ x\frac{\partial u}{\partial x}=v-(n-1)u,$$

woraus auch

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{u-nz}{v-(n-1)u}.$$

3.)

$$x^4\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}-x^3\frac{\partial y}{\partial x}-2xy\frac{\partial y}{\partial x}+4y^2=0;$$

$$y=x^2z,\ \frac{\partial y}{\partial x}=xu,\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=v:\ v-u-2zu+4z^2=0,\ v=u+2zu-4z^2,\ v-u=2z(u-2z);$$

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{u-2z}{v-u}=\frac{1}{2z},\int 2z\,\partial z=u+C,\ z^2=u+C.$$

$$\frac{\partial y}{\partial x}=2xz+x^2\frac{\partial z}{\partial x}=xu=x(z^2-C)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{2z}{x}-\frac{z^2}{x}+\frac{C}{x}=0,\int\frac{\partial z}{-z^2+2z+C}+\int\frac{\partial x}{x}=C'$$

$$l(x)=C_1+\int\frac{\partial z}{z^2-2z-C}=C_1+\frac{1}{2\sqrt{1+C}}\,l\left(\frac{z-1-\sqrt{1+C}}{z-1+\sqrt{1+C}}\right),$$

$$\frac{z-1-c}{z-1+c}=c_1x^{2c},\ \frac{y-x^2(1+c)}{y-x^2(1-c)}=c_1x^{2c}.$$

III. Ist die vorgelegte Gleichung so beschaffen, dass y ausfällt, wenn man

$$\frac{\partial y}{\partial x}=uy,\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=vy$$

setzt, so erhält man eine Gleichung zwischen x, u, v und da

$$u\frac{\partial y}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial x}=vy,\ \text{d. h.}\ u^2y+y\frac{\partial u}{\partial x}=vy,\ u^2+\frac{\partial u}{\partial x}=v,$$

so wird man eine Gleichung zwischen u und x finden können, aus der dann die zwischen y und x folgen wird.

4.)

$$ay\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+b\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2=y\frac{\partial y}{\partial x}$$

gibt

$$av+bu^2=u,\ v=\frac{u-bu^2}{a},\ u^2+\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{u-bu^2}{a},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{u-(a+b)u^2}{a},\int\frac{\partial u}{u-(a+b)u^2}=\frac{x}{a}+C$$

$$l(u)-l[1-(a+b)u]=\frac{x}{a}+C,\ \frac{u}{1-(a+b)u}=Ce^{\frac{x}{a}},\ u=\frac{Ce^{\frac{x}{a}}}{1+(a+b)Ce^{\frac{x}{a}}}.$$

$$\frac{\partial y}{\partial x}=uy,\ \frac{1}{y}\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{Ce^{\frac{x}{a}}}{1+(a+b)Ce^{\frac{x}{a}}},\ l(y)=C\int\frac{e^{\frac{x}{a}}\partial x}{1+(a+b)Ce^{\frac{x}{a}}}+C'$$

$$l(y)=\frac{a\,l[1+(a+b)Ce^{\frac{x}{a}}]}{a+b}+C',\ y=C_1[1+(a+b)Ce^{\frac{x}{a}}]^{\frac{a}{a+b}}.$$

IV. Die Einführung neuer Veränderlichen statt x und y, die in irgend welcher Weise mit diesen Grössen zusammenhängen, wird eben so in manchen Fällen entweder die Gleichung auf eine niedrigere Ordnung, oder aber auf eine andere zurückführen, die leichter zu integriren ist. Als Beispiele mögen die folgenden dienen.

5.) $$\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2-\frac{1}{y}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^3+a^2y^2=0.$$

Man setze $y=e^u$, $\frac{\partial y}{\partial x}=e^u\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=e^u\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+e^u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, so ist die vorgelegte Gleichung:

$$e^{2u}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right]\frac{\partial u}{\partial x}+e^{2u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2-e^{2u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^3+a^2e^{2u}=0,\ \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+a^2=0,$$

also wenn man $\frac{\partial u}{\partial x}=v$ setzt:

$$v\frac{\partial v}{\partial x}+v^2+a^2=0,\ 2v\frac{\partial v}{\partial x}+2v^2+2a^2=0\ (\S.\ 66,\text{II},\ Y=v^2):$$

$$v^2=e^{-2\int\partial x}\left[c-2a^2\int e^{2\int\partial x}\partial x\right]=ce^{-2x}-a^2,\ \frac{\partial u}{\partial x}=\sqrt{ce^{-2x}-a^2},$$

$$u=\int\sqrt{ce^{-2x}-a^2}\,\partial x=-\sqrt{ce^{-2x}-a^2}+a\,\text{arc}\left(tg=\frac{\sqrt{ce^{-2x}-a^2}}{a}\right)+C',$$

$$y=c_1e^{-\sqrt{ce^{-2x}-a^2}+a\,\text{arc}\left(tg=\frac{\sqrt{ce^{-2x}-a^2}}{a}\right)}.$$

6.) $$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=ax^my^n\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^r.$$

Man setze $y=x^\alpha s$, $\frac{\partial y}{\partial x}=x^{\alpha-1}t$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=x^{\alpha-2}u$, so ist

$$x^{\alpha-2}u=ax^m x^{n\alpha}s^n x^{r\alpha-r}t^r,\ u=ax^{m+n\alpha+r\alpha-r-\alpha+2}s^nt^r,$$

und also, wenn α so bestimmt wird, dass $m+n\alpha+r\alpha-r-\alpha+2=0$, $\alpha=-\frac{(m-r+2)}{n+r-1}$, so ist

$$u=as^nt^r.$$

Aber $$x^{\alpha-1}t=\alpha x^{\alpha-1}s+x^\alpha\frac{\partial s}{\partial x},\ t=\alpha s+x\frac{\partial s}{\partial x},\ x\frac{\partial s}{\partial x}=t-\alpha s;$$

$$x^{\alpha-2}u=(\alpha-1)x^{\alpha-2}t+x^{\alpha-1}\frac{\partial t}{\partial x},\ u=(\alpha-1)t+x\frac{\partial t}{\partial x},\ x\frac{\partial t}{\partial x}=u-(\alpha-1)t;$$

hieraus durch Division:

$$\frac{\partial t}{\partial s}=\frac{u-(\alpha-1)t}{t-\alpha s}=\frac{a s^n t^r-(\alpha-1)t}{t-\alpha s},\quad (t-\alpha s)\frac{\partial t}{\partial s}=a s^n t^r-(\alpha-1)t,$$

welche Gleichung erster Ordnung zwischen t und s zu integriren ist. Hat man dann t als Funktion von s, so ergibt $x\frac{\partial s}{\partial x}=t-\alpha s$ die Gleichung zwischen x und s, und dann $y=x^\alpha s$ die zwischen y und x. Die obige Auflösung ist unzulässig, wenn $n+r=1$ ist, da dann $\alpha=\infty$ würde. In diesem Falle setze man:

$$\frac{\partial y}{\partial x}=y v,\quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=y w,\text{ also } y w=a x^m y^n y^r v^r=a x^m y v^r,\quad w=a x^m v^r.$$

$$y w=y\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial y}{\partial x}=y\frac{\partial v}{\partial x}+v^2 y,\quad w=\frac{\partial v}{\partial x}+v^2,\quad \frac{\partial v}{\partial x}=w-v^2;$$

d. h.
$$\frac{\partial v}{\partial x}=a x^m v^r-v^2,$$

welche Gleichung den Zusammenhang zwischen v und x, und dann $\frac{\partial y}{\partial x}=y v$ zwischen y und x gibt.

Für $r=1$ und $m=-1$ hätte man etwa $\alpha=0$, wenn nicht $n=0$; alsdann wäre also

$$t\frac{\partial t}{\partial x}=a s^n t+t,\quad \frac{\partial t}{\partial s}=a s^n+1,\quad t=\frac{a s^{n+1}}{n+1}+s+C;\quad y=s,\quad x\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{a y^{n+1}}{n+1}+y+C.$$

7.)
$$x^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+x\frac{\partial y}{\partial x}-y=x^m.$$

Man setze $x=e^u$, so ist $\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{\frac{\partial y}{\partial u}}{\frac{\partial x}{\partial u}}=e^{-u}\frac{\partial y}{\partial u}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)e^{-u}=$
$-e^{-2u}\frac{\partial y}{\partial u}+e^{-2u}\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}$, so dass also

$$\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}-\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial y}{\partial u}-y=e^{mu},\quad \frac{\partial^2 y}{\partial u^2}-y=e^{mu},$$

welche Gleichung nach einer der im Folgenden angegebenen Methoden leicht integrirt werden kann.

§. 74.

Die Gleichung

$$P_0\frac{\partial^n y}{\partial x^n}+P_1\frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}}+P_2\frac{\partial^{n-2} y}{\partial x^{n-2}}+\ldots+P_{n-1}\frac{\partial y}{\partial x}+P_n y=X,\qquad \text{(a)}$$

in der $P_0, P_1, \ldots, P_n$, X weder y noch die Differentialquotienten von y enthalten, heisst eine lineare Differentialgleichung der n^{ten} Ordnung. Man sagt, sie habe einen zweiten Theil, wenn X nicht Null ist; im andern Falle hat die Gleichung keinen zweiten Theil. Den letzteren Fall nun, als den einfacheren, wollen wir zunächst annehmen, d. h. voraussetzen, man habe die Gleichung

$$P_0\frac{\partial^n y}{\partial x^n}+P_1\frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}}+\ldots+P_{n-1}\frac{\partial y}{\partial x}+P_n y=0.\qquad \text{(b)}$$

Gesetzt nun, $y_1, y_2, \ldots, y_r$ seyen bekannte Funktionen von x so be-

schaffen, dass sie für y gesetzt der Gleichung (b) genügen, so wird dieser Gleichung auch durch den Werth

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_r y_r \qquad \text{(c)}$$

Genüge geschehen, wenn $C_1, \ldots, C_r$ willkürliche Konstanten sind. Denn da $y_1, \ldots, y_r$ der Gleichung (b) genügen, so hat man

$$P_0 \frac{\partial^n y_1}{\partial x^n} + P_1 \frac{\partial^{n-1} y_1}{\partial x^{n-1}} + \ldots + P_{n-1} \frac{\partial y_1}{\partial x} + P_n y_1 = 0,$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial^n y_r}{\partial x^n} + P_1 \frac{\partial^{n-1} y_r}{\partial x^{n-1}} + \ldots + P_{n-1} \frac{\partial y_r}{\partial x} + P_n y_r + 0.$$

Multiplizirt man diese Gleichungen bezüglich mit $C_1, C_2, \ldots, C_r$, addirt sie und beachtet, dass aus (c) folgt

$$\frac{\partial y}{\partial x} = C_1 \frac{\partial y_1}{\partial x} + \ldots + C_r \frac{\partial y_r}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^n y}{\partial x^n} = C_1 \frac{\partial^n y_1}{\partial x^n} + \ldots + C_r \frac{\partial^n y_r}{\partial x^n},$$

so erhält man die Gleichung (b), der also auch durch den Werth (c) Genüge geleistet wird. Daraus folgt, dass wenn man n Funktionen $y_1, y_2, \ldots, y_n$, die sämmtlich von einander verschieden sind, kennt, welche für y gesetzt der (b) genügen, das allgemeine Integral von (b) seyn werde:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n. \qquad \text{(d)}$$

Kennt man nur einen Werth y_1, der (b) genügt, so lässt sich diese Gleichung auf eine der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung erniedrigen. Denn man setze

$$y = y_1 \int \varphi \partial x,$$

wo φ eine noch unbekannte Funktion von x ist, so ist (§. 10):

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y_1}{\partial x} \int \varphi \partial x + y_1 \varphi,$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} \int \varphi \partial x + 2 \frac{\partial y_1}{\partial x} \varphi + y_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x},$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial^n y}{\partial x^n} = \frac{\partial^n y_1}{\partial x^n} \int \varphi \partial x + n \frac{\partial^{n-1} y_1}{\partial x^{n-1}} \varphi + \ldots + y_1 \frac{\partial^{n-1} \varphi}{\partial x^{n-1}},$$

also, wenn man dies in (b) einsetzt:

$$\left(P_0 \frac{\partial^n y_1}{\partial x^n} + P_1 \frac{\partial^{n-1} y_1}{\partial x^{n-1}} + \ldots + P_n y_1\right) \int \varphi \partial x + Q_1 \frac{\partial^{n-1} \varphi}{\partial x^{n-1}} + Q_2 \frac{\partial^{n-2} \varphi}{\partial x^{n-2}} + \ldots Q_n \varphi = 0,$$

wo $Q_1, \ldots, Q_n$ bekannte Funktionen von x sind. Da der Koeffizient von $\int \varphi \partial x$ Null ist, indem y_1 der (b) genügt, so hat man also zur Bestimmung von φ eine Gleichung der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung.

Kennt man zwei Werthe y_1, y_2, die der (b) genügen, so kann man (b) um zwei Ordnungen erniedrigen. Denn setzt man zuerst wieder $y = y_1 \int \varphi \partial x$, so erhält man zur Bestimmung von φ wieder die so eben erhaltene Gleichung

der $(n-1)^{ten}$ Ordnung; da aber auch y_2 der Gleichung genügt, so gibt es also einen Werth φ so, dass $y_2 = y_1 \int \varphi \partial x$, $\varphi = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y_2}{y_1}\right)$ ist. Da man hiernach einen Werth von φ kennt, so kann man, indem man $\varphi = \varphi_1 \int \psi \partial x$ setzt, wo $\varphi_1 = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y_2}{y_1}\right)$, die so eben erhaltene Gleichung nochmals um eine Einheit erniedrigen. Man sieht leicht, dass wenn man r Werthe $y_1, \ldots, y_r$ kennt, man die Gleichung um r Einheiten erniedrigen kann, indem man setzt:

$$y = y_1 \int \varphi \partial x;\ \varphi_1 = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y_2}{y_1}\right),\ \varphi = \varphi_1 \int \psi \partial x;\ \psi_1 = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right),\ \psi = \psi_1 \int \psi' \partial x;\ \psi'_1 = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\psi_2}{\psi_1}\right),$$

$$\varphi_2 = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y_3}{y_1}\right), \qquad \psi_2 = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\varphi_3}{\varphi_1}\right)$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\varphi_{r-1} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y_r}{y_1}\right), \qquad \psi_{r-2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\varphi_{r-1}}{\varphi_1}\right) \qquad \psi'_{r-3} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\psi_{r-2}}{\psi_1}\right).$$

$\psi' = \psi'_1 \int \psi'' \partial x$ u. s. w.

Für den speziellen Fall einer Gleichung zweiter Ordnung ist

$$y = y_1 \int \varphi \partial x,\ \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y_1}{\partial x}\int \varphi \partial x + y_1 \varphi,\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2}\int \varphi \partial x + 2\frac{\partial y_1}{\partial x}\varphi + y_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x},$$

so dass die Gleichung $P_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + P_1 \frac{\partial y}{\partial x} + P_2 y = 0$ wird:

$$P_0 y_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \left(2P_0 \frac{\partial y_1}{\partial x} + P_1 y_1\right)\varphi = 0,\ \frac{1}{\varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{2}{y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x} + \frac{P_1}{P_0} = 0,$$

$$l(\varphi) + 2l(y_1) + \int \frac{P_1 \partial x}{P_0} = l(C),\quad \varphi = \frac{C}{y_1^2} e^{-\int \frac{P_1 \partial x}{P_0}},$$

$$y = \left[C \int \frac{e^{-\int \frac{P_1}{P_0} \partial x}}{y_1^2} \partial x + C_1\right] y_1 = C_1 y_1 + C y_1 \int \frac{e^{-\int \frac{P_1}{P_0}\partial x}}{y_1^2} \partial x. \qquad (e)$$

1.)
$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{x}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{1}{x^2} y = 0$$

wird befriedigt für $y = x$, so dass also $y_1 = x$, $P_0 = 1$, $P_1 = -\frac{1}{x}$, $\int \frac{P_1}{P_0}\partial x = -l(x)$, also

$$y = Cx + C'x \int \frac{x}{x^2} \partial x = Cx + C'x\,l(x).$$

2.)
$$x^3 \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} - 3x^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + 6x \frac{\partial y}{\partial x} - 6y = 0$$

wird befriedigt für $y = x$, also setze man $y = x\int \varphi \partial x$. $\frac{\partial y}{\partial x} = \int \varphi \partial x + x\varphi$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 2\varphi + x\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = 3\frac{\partial \varphi}{\partial x} + x\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$, und erhält

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0,\ \varphi = Cx + C',\ \int \varphi \partial x = Cx^2 + C'x + C'',$$

also
$$y = Cx^3 + C'x^2 + C''x.$$

3.)
$$x^2\left[l(x) - 1\right]\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - x\frac{\partial y}{\partial x} + y = 0$$

wird ebenfalls befriedigt für $y=x$, also da $P_0=x^2[l(x)-1]$, $P_1=-x$, $\int\frac{P_1}{P_0}\partial x$

$= -\int\frac{\partial x}{[l(x)-1]x}=-l[l(x)-1]$, so ist

$$y=Cx+C'x\int\frac{l(x)-1}{x^2}\partial x=Cx+C'l(x).$$

Wie wir nachher sehen werden, genügt es, die Gleichung (b) integriren zu können, um in allen Fällen das allgemeine Integral der Gleichung (a) zu finden, so dass wir uns nun die Aufgabe vorlegen wollen, die Gleichung (b) in einigen besonderen Fällen zu integriren, da eine allgemeine Integration derselben noch unbekannt ist. Diese besonderen Fälle betreffen natürlich den Bau der Koeffizienten $P_0, P_1, \ldots, P_n$, dessen Beschaffenheit die Aufgabe mehr oder minder schwierig machen wird.

§. 75.

Der erste Hauptfall, den wir betrachten wollen, ist der, da $P_0, \ldots, P_n$ konstant sind, man also die Gleichung

$$A_0\frac{\partial^n y}{\partial x^n}+A_1\frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}}+\ldots+A_{n-1}\frac{\partial y}{\partial x}+A_n y=0 \qquad (f)$$

hat, in der $A_0, A_1, \ldots, A_n$ (reelle) Konstanten sind. Setzt man hier $y=e^{mx}$, also $\frac{\partial y}{\partial x}=me^{mx}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=m^2e^{mx}$, ..., $\frac{\partial^n y}{\partial x^n}=m^ne^{mx}$, so wird die Gleichung (f) zu

$$e^{mx}[A_0m^n+A_1m^{n-1}+\ldots+A_{n-1}m+A_n]=0.$$

Bestimmt man also m so, dass die Gleichung

$$A_0m^n+A_1m^{n-1}+\ldots+A_{n-1}m+A_n=0 \qquad (g)$$

richtig ist, so genügt $y=e^{mx}$ der Gleichung (f). Die Gleichung (g) wird im Allgemeinen nun mehrere Werthe von m liefern, so dass also auch mehrere Werthe von y gefunden sind, die der Gleichung (f) genügen. In dieser Beziehung müssen wir nun folgende Fälle unterscheiden.

I. Die Gleichung (g) gebe für m lauter reelle von einander verschiedene Werthe, die alsdann der Anzahl nach n seyn werden. Sind $m_1, m_2, \ldots, m_n$ diese Werthe, so ist gemäss §. 74 das allgemeine Integral der Gleichung (f):

$$y=C_1e^{m_1x}+C_2e^{m_2x}+\ldots C_ne^{m_nx}. \qquad (h)$$

II. Die Gleichung (g) habe zwar lauter verschiedene Wurzeln, seyen jedoch darunter auch imaginäre. Ist also etwa $m_1=\alpha+\beta i$, so gibt es bekanntlich noch eine zweite Wurzel $m_2=\alpha-\beta i$; in diesem Falle nun ist

$$C_1e^{m_1x}+C_2e^{m_2x}=C_1e^{(\alpha+\beta i)x}+C_2e^{(\alpha-\beta i)x}=e^{\alpha x}[C_1e^{\beta ix}+C_2e^{-\beta ix}]=$$
$$e^{\alpha x}[C_1\cos(\beta x)+iC_1\sin(\beta x)+C_2\cos(\beta x)-iC_2\sin(\beta x)]\ (\S.\ 17)=$$
$$e^{\alpha x}[(C_1+C_2)\cos(\beta x)+i(C_1-C_2)\sin(\beta x)],$$

und da C_1+C_2, $i(C_1-C_2)$ eben auch Konstanten sind, die wir kurzweg

mit C_1, C_2 bezeichnen wollen, so folgt daraus, dass man in (h) die zwei Glieder, welche zu $m_1 = \alpha + \beta i$, $m_2 = \alpha - \beta i$ gehören, ersetzen muss durch $[C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x)] e^{\alpha x}$. Dass man in ganz ähnlicher Weise für zwei andere imaginäre Wurzeln zu verfahren habe, versteht sich von selbst.

III. Die Gleichung (g) hat zwar lauter reelle Wurzeln, sie sind aber nicht alle von einander verschieden. Wir wollen einmal voraussetzen, es sey $m_1 = m_2$, sonst keine Wurzel diesen gleich, in welchem Falle die zwei Glieder $C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x}$ in Wahrheit bloss das eine $(C_1 + C_2) e^{m_1 x}$ bilden würden, so dass in (h) bloss $n - 1$ willkürliche Konstanten vorkommen würden, man also das allgemeine Integral nicht gefunden hätte. Setzen wir aber zunächst $m_2 = m_1 + \varepsilon$ voraus, so sind die zwei betreffenden Glieder in (h): $C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{(m_1 + \varepsilon) x} = e^{m_1 x} [C_1 + C_2 e^{\varepsilon x}] = e^{m_1 x} [C_1 + C_2 + C_2 \varepsilon x + C_2 \frac{\varepsilon^2 x^2}{2} + \ldots\ldots]$ (§. 17), so dass, wenn man $C_1 + C_2 = A$, $C_2 \varepsilon = B$ setzt, der Gleichung (f) ganz gewiss durch

$$e^{m_1 x} [A + Bx + \frac{B \varepsilon x^2}{2} + \frac{B \varepsilon^2 x^3}{2.3} + \ldots,] \qquad \text{(i)}$$

für y genügt wird, wenn nur ε die Differenz der zwei Wurzeln m_1 und m_2 ist, wobei dann A und B die Konstanten sind. Wie gesagt, die Form (i) genügt sicher der Gleichung (f), vorausgesetzt, dass $m = m_1$ und $m = m_1 + \varepsilon$ der Gleichung (g) genügen. Lässt man hier ε abnehmen, so bleibt die Behauptung immer in Kraft, und wenn ε unbegränzt gegen Null geht, so folgt daraus, dass falls m_1 zweimal Wurzel der Gleichung (g) ist, der Gleichung (f) Genüge geschieht durch $e^{m_1 x}(A + Bx)$, welche Grösse in (h) an Stelle der Summe $C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x}$ $(m_2 = m_1)$ tritt.

Gesetzt nun, die drei Wurzeln m_1, m_2, m_3 seyen gleich, weiter aber keine diesen gleich, so würden in (h) die drei Glieder $C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x} + C_3 e^{m_3 x}$ sich in ein einziges zusammenziehen. Wie so eben wird nun aber gezeigt, dass an die Stelle der zwei ersten tritt $e^{m_1 x}(A + Bx)$, so dass also, wenn zuerst $m_3 = m_1 + \varepsilon$, die Gleichung (f) befriedigt ist durch

$$e^{m_1 x} [A + Bx + C_3 e^{\varepsilon x}] = e^{m_1 x} [A + Bx + C_3 + C_3 \varepsilon x + \frac{C_3 \varepsilon^2 x^2}{2} + \frac{C_3 \varepsilon^3 x^3}{2.3} + \ldots],$$

wenn $m_2 = m_1$, $m_3 = m_1 + \varepsilon$. Setzt man aber $A + C_3 = M$, $B + C_3 \varepsilon = N$, $\frac{C_3 \varepsilon^2}{2} = L$, so weiss man also, dass der Gleichung (f) genügt wird durch

$$e^{m_1 x} [M + Nx + Lx^2 + \frac{L \varepsilon x^3}{3} + \frac{L \varepsilon^2 x^4}{3.4} + \ldots].$$

Lässt man hier wieder ε unendlich abnehmen, so folgt daraus, dass wenn m_1 dreimal Wurzel von (g) ist, an die Stelle von $C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x} + C_3 e^{m_3 x}$ in (h) tritt $e^{m_1 x} [M + Nx + Lx^2]$, wo M, N, L Konstanten sind. Wie man hier weiter gehen kann, ist klar, so dass wenn m_1 r mal Wurzel von (g) ist, aber nicht mehrmal, dann an die Stelle der in eines zussammengehenden Glieder in (h) zu setzen ist

$$e^{m_1 x} [C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \ldots C_r x^{r-1}].$$

Anm. Dieser Satz lässt sich auch in folgender höchst einfacher Weise beweisen. Gesetzt man bezeichne allgemein die Grösse $a_n \frac{\partial^n y}{\partial x^n} + a_{n-1} \frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}} + \ldots + a_0 y$ durch $\varphi(y)$ und sey $y = f(x, m)$, so ist $\frac{\partial \varphi(y)}{\partial m} = a_n \frac{\partial^{n+1} y}{\partial x^n \partial m} + a_{n-1} \frac{\partial^n y}{\partial x^{n-1} \partial m} + \ldots + a_0 \frac{\partial y}{\partial m}$, welche Grösse offenbar durch $\varphi\left(\frac{\partial y}{\partial m}\right)$ zu bezeichnen ist, so dass $\frac{\partial \varphi(y)}{\partial m} = \varphi\left(\frac{\partial y}{\partial m}\right)$.

Sey also wieder die Gleichung (f) vorgelegt, die wir durch $\varphi(y) = 0$ bezeichnen wollen, so genügt ihr $y = e^{mx}$ und es ist $\varphi(e^{mx}) = e^{mx} f(m)$, wo $f(m) = A_0 m^n + A_1 m^{n-1} + \ldots\ldots + A_n$ ist. Nach dem, was wir so eben gesehen, folgt nun aus der identischen Gleichung $\varphi(e^{mx}) = e^{mx} f(m)$, wenn man sie mehrmal nach einander nach m differenzirt, und beachtet, dass $\frac{\partial e^{mx}}{\partial m} = x e^{mx}$:

$\varphi(e^{mx} x) = e^{mx}[x f(m) + f'(m)]$, $\varphi(e^{mx} x^2) = e^{mx}[x^2 f(m) + 2x f'(m) + f''(m)]$, ...

Gesetzt nun, es sey m_1 eine Wurzel der Gleichung $f(m) = 0$, so ist $e^{m_1 x} f(m_1) = 0$, also genügt der Gleichung (i) die Grösse $e^{m_1 x}$. Ist m_1 zweimal Wurzel der Gleichung $f(m) = 0$, so ist $f(m_1) = 0$ und $f'(m_1) = 0$, so dass nebst $\varphi(e^{m_1 x})$ auch $\varphi(e^{m_1 x} x)$ Null ist, und also $e^{m_1 x}$ und $x e^{m_1 x}$ der (f) genügen; ist m_1 dreimal Wurzel, so sind $f(m_1)$, $f'(m_1)$, $f''(m_1)$ Null; also $\varphi(e^{m_1 x})$, $\varphi(e^{m_1 x} x)$ und $\varphi(e^{m_1 x} x^2)$ auch Null und es genügen $e^{m_1 x}$, $x e^{m_1 x}$, $x^2 e^{m_1 x}$ u. s. w.

IV. Die Gleichung (g) hat auch imaginäre gleiche Wurzeln. In diesem Falle tritt offenbar das Verfahren von III. ganz wieder ein. Ist also $\alpha + \beta i$ r mal Wurzel von (g), mithin auch $\alpha - \beta i$ r mal Wurzel, so kommen in (g) die Glieder vor:

$$e^{(\alpha+\beta i)x}[C_1 + C_2 x + \ldots + C_r x^{r-1}] + e^{(\alpha-\beta i)x}[C'_1 + C'_2 x + \ldots + C'_r x^{r-1}]$$
$$= e^{\alpha x}[(C_1 + C'_1)\cos\beta x + i(C_1 - C'_1)\sin\beta x + x(C_2 + C'_2)\cos\beta x + ix(C_2 - C'_2)\sin\beta x + \ldots\ldots + x^{r-1}(C_r + C'_r)\cos\beta x + i x^{r-1}(C_r - C'_r)\sin\beta x],$$

d. h. jetzt hat man die 2r Glieder zu ersetzen durch:

$$e^{\alpha x}[C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + \ldots + C_r x^{r-1}]\cos(\beta x) + e^{\alpha x}[C'_1 + C'_2 x + \ldots + C'_r x^{r-1}]\sin(\beta x).$$

Wie man bei einer Verbindung mehrerer dieser Fälle verfahren muss, ist wohl klar.

1.) $$a\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + b\frac{\partial y}{\partial x} + cy = 0.$$

$$am^2 + bm + c = 0, \quad m = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Ist nun $b^2 - 4ac > 0$, so ist $y = C_1 e^{\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}x} + C_2 e^{\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}x}$;

$b^2 - 4ac = 0$, „ „ $y = e^{-\frac{b}{2a}x}[C_1 + C_2 x]$;

$b^2 - 4ac < 0$, „ „ $y = e^{-\frac{b}{2a}x}\left[C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}x\right) + C_2 \sin\left(\frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}x\right)\right]$.

2.) $$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} - 14\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + 64\frac{\partial y}{\partial x} - 96\, y = 0;$$
$$m^3 - 14m^2 + 64m - 96 = 0,\quad m = 6, 4, 4;$$
$$y = C_1 e^{6x} + e^{4x}[C_2 + C_3 x].$$

3.) $$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} - 3\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + 7\frac{\partial y}{\partial x} - 5\, y = 0;$$
$$m^3 - 3m^2 + 7m - 5 = 0;\quad m = 1,\ 1+2i,\ 1-2i.$$
$$y = C_1 e^x + e^x[C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x].$$

4.) $$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + a y = 0;\quad a > 0;$$
$$m^4 + a = 0;\quad m = \sqrt[4]{-a} = \sqrt[4]{a}\,\sqrt[4]{-1} = \sqrt[4]{a}\,.\,e^{\frac{(2r+1)\pi i}{4}},\quad r = 0,\ 1,\ 2,\ 3$$
(„Grundzüge" S. 38 *),

demnach sind die vier Wurzeln dieser Gleichung:
$$\sqrt[4]{a}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right);\ \sqrt[4]{a}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right);\ \sqrt[4]{a}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right);$$
$$\sqrt[4]{a}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right) \text{ d. h. } \sqrt[4]{a}\left[\cos\frac{\pi}{4} \pm i\sin\frac{\pi}{4}\right],\ \sqrt[4]{a}\left[\cos\frac{3\pi}{4} \pm i\sin\frac{3\pi}{4}\right], \text{ oder}$$
$$\sqrt[4]{\frac{1}{4}a}\,(1 \pm i),\quad \sqrt[4]{\frac{1}{4}a}\,(-1 \pm i),$$

und also
$$y = e^{x\sqrt[4]{\frac{1}{4}a}}\left[c_1 \cos\left(x\sqrt[4]{\frac{1}{4}a}\right) + c_2 \sin\left(x\sqrt[4]{\frac{1}{4}a}\right)\right] + e^{-x\sqrt[4]{\frac{1}{4}a}}\left[c_3 \cos\left(x\sqrt[4]{\frac{1}{4}a}\right)\right.$$
$$\left. + c_4 \sin\left(x\sqrt[4]{\frac{1}{4}a}\right)\right].$$

5.) $$\frac{\partial^5 y}{\partial x^5} - 5a\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + 10a^2\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} - 10a^3\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + 5a^4\frac{\partial y}{\partial x} - a^5 = 0,$$
$$m^5 - 5am^4 + 10a^2m^3 - 10a^3m^2 + 5a^4m - a^5 = 0,\ (m-a)^5 = 0;\ m = a, a, a, a, a.$$
$$y = e^{ax}[C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 x^3 + C_5 x^4].$$

6.) $$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - 4\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + 14\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - 20\frac{\partial y}{\partial x} + 25\, y = 0;$$
$$m^4 - 4m^3 + 14m^2 - 20m + 25 = 0;\quad (m^2 - 2m + 5)^2 = 0,$$
also sind die vier Wurzeln: $1 \pm 2i$, jede doppelt, so dass
$$y = e^x(c_1 + c_2 x)\cos 2x + e^x(c_3 + c_4 x)\sin 2x.$$

§. 76.

Als zweiten Hauptfall lege man die Gleichung
$$A_0(a+bx)^n\frac{\partial^n y}{\partial x^n} + A_1(a+bx)^{n-1}\frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}} + \ldots + A_{n-1}(a+bx)\frac{\partial y}{\partial x} + A_n y = 0 \tag{k}$$

---

* Es ist (§. 17) $e^{(2r+1)\pi i} = \cos(2r+1)\pi + i\sin(2r+1)\pi = -1$, also $\sqrt[4]{-1} = \sqrt[4]{e^{(2r+1)\pi i}} = e^{\frac{2r+1}{4}\pi i}$, und da man nur 4 Werthe haben darf, so genügt es $r = 0,\ 1, 2, 3$ zu setzen. Würde man andere Werthe setzen für r, so erhielte man übrigens nur bereits da gewesene Resultate.

vor, worin a, b, $A_0, A_1, \ldots A_n$ Konstanten sind. Man setze

$$y=(a+bx)^r, \frac{\partial y}{\partial x}=rb(a+bx)^{r-1}, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=r(r-1)b^2(a+bx)^{r-2}, \ldots\ldots,$$

$$\frac{\partial^n y}{\partial x^n}=r(r-1)\ldots(r-n+1)b^n(a+bx)^{r-n},$$

so wird die Gleichung (k) zu

$$(a+bx)^r[A_0 b^n r(r-1)\ldots(r-n+1)+A_1 b^{n-1} r(r-1)\ldots(r-n+2)+\ldots\ldots$$
$$+A_{n-1} br+A_n]=0,$$

so dass also, wenn r ein Werth ist so beschaffen, dass

$$A_0 b^n r(r-1)\ldots(r-n+1)+A_1 b^{n-1} r(r-1)\ldots(r-n+2)+\ldots+A_{n-1} br+A_n=0, \quad (l)$$

der Werth $(a+bx)^r$ für y der Gleichung (k) genügen wird. Da die Gleichung (l) in Bezug auf r vom n^{ten} Grade ist, so gibt sie im Allgemeinen n Werthe von r und man wird, wie in §. 75 folgende Fälle unterscheiden müssen.

I. Die n Werthe von r, die aus (l) folgen, sind alle reell und verschieden; sie seyen $r_1, \ldots, r_n$. Alsdann ist (§. 74)

$$y=C_1(a+bx)^{r_1}+C_2(a+bx)^{r_2}+\ldots+C_n(a+bx)^{r_n}. \quad (m)$$

II. Die Werthe seyen wohl verschieden, jedoch nicht alle reell. Sey also etwa $r_1=\alpha+\beta i$, $r_2=\alpha-\beta i$, so ist in (m):

$$C_1(a+bx)^{r_1}+C_2(a+bx)^{r_2}=C_1 e^{(\alpha+\beta i)l(a+bx)}+C_2 e^{(\alpha-\beta i)l(a+bx)}=e^{\alpha l(a+bx)}$$
$$[C_1 e^{\beta i l(a+bx)}+C_2 e^{-\beta i l(a+bx)}]=(a+bx)^\alpha[(C_1+C_2)\cos\{\beta l(a+bx)\}$$
$$+i(C_1-C_2)\sin\{\beta l(a+bx)\}],$$

so dass also in diesem Falle an die Stelle von $C_1(a+bx)^{r_1}+C_2(a+bx)^{r_2}$ tritt:

$$(a+bx)^\alpha\{C_1\cos[\beta l(a+bx)]+C_2\sin[\beta l(a+bx)]\},$$

u. s. w. bei mehreren imaginären Wurzeln.

III. Die Wurzeln der Gleichung (l) sind wohl reell, aber nicht ungleich. Sey zuerst wieder $r_2=r_1+\varepsilon$, so ist

$$C_1(a+bx)^{r_1}+C_2(a+bx)^{r_2}=(a+bx)^{r_1}[C_1+C_2(a+bx)^\varepsilon]=(a+bx)^{r_1}[C_1+C_2 e^{\varepsilon l(a+bx)}]$$
$$=(a+bx)^{r_1}[C_1+C_2+C_2\varepsilon l(a+bx)+\frac{C_2\varepsilon^2}{2}l(a+bx)^2+\ldots.],$$

woraus wie in §. 75 folgt, dass jetzt die Summe $C_1(a+bx)^{r_1}+C_2(a+bx)^{r_2}$ zu ersetzen ist durch

$$(a+bx)^{r_1}[C_1+C_2 l(a+bx)].$$

Ist allgemein $r_1=r_2=\ldots=r_m$, so ist $C_1(a+bx)^{r_1}+\ldots+C_m(a+bx)^{r_m}$ zu ersetzen durch

$$(a+bx)^{r_1}\Big[C_1+C_2 l(a+bx)+C_3\{l(a+bx)\}^2+\ldots+C_m\{l(a+bx)\}^{m-1}\Big].$$

IV. Sind endlich gleiche imaginäre Wurzeln in (l), kommt also etwa die Wurzel $\alpha+\beta i$ m mal, also auch $\alpha-\beta i$ m mal vor, so hat man die betreffenden Glieder in (m) zu ersetzen durch

$$(a+bx)^\alpha\left[C_1+C_2 l(a+bx)+\ldots+C_m\left\{l(a+bx)\right\}^{m-1}\right]\cos[\beta l(a+bx)]$$
$$+(a+bx)^\alpha\left[C'_1+C'_2 l(a+bx)+\ldots+C'_m\left\{l(a+bx)\right\}^{m-1}\right]\sin[\beta l(a+bx)].$$

1.) $$x^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+ax\frac{\partial y}{\partial x}+by=0.$$

$$r(r-1)+ar+b=0,\ r^2+(a-1)r+b=0,\ r=\frac{1-a\pm\sqrt{(1-a)^2-4b}}{2}.$$

Ist also $(1-a)^2-4b>0$, so ist $y=C_1 x^{\frac{1-a+\sqrt{(1-a)^2-4b}}{2}}+C_2 x^{\frac{1-a-\sqrt{(1-a)^2-4b}}{2}}$;

" " $(1-a)^2-4b=0$, " " $y+[C_1+C_2 l(x)]x^{\frac{1-a}{2}}$;

" " $(1-a)^2-4b<0$, " " $y=x^{\frac{1-a}{2}}\left[C_1\cos\left\{\frac{\sqrt{4b-(1-a)^2}}{2}l(x)\right\}\right.$
$$\left.+C_2\sin\left\{\frac{\sqrt{4b-(1-a)^2}}{2}l(x)\right\}\right].$$

Setzt man in der Gleichung $x^2y\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+x^2\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2-2xy\frac{\partial y}{\partial x}+y^2=0$, $y^2=z$, so wird sie zu

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2x\frac{\partial z}{\partial x}+2z=0$$

und gibt
$$z=C_1x^2+C_2x=y^2.$$

2.) $$(2+3x)^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+7(2+3x)\frac{\partial y}{\partial x}+4y=0.$$

$$9r(r-1)+21r+4=0,\ 9r^2+12r+4=0,\ r=-\frac{2}{3},\ -\frac{2}{3};$$

$$y=(2+3x)^{-\frac{2}{3}}[C_1+C_2 l(2+3x)].$$

3.) Wir wollen annehmen, eine zylindrische Wand bestehe aus n parallelen (zylindrischen) Schichten, in derselben Weise, wie in §. 72, Nr. 10 man sich eine kugelförmige Wand gedacht. Dieselben Bezeichnungen sollen auch hier gelten, nur werden $r_0, r_1, \ldots, r_n$ die Halbmesser der Schichten, von der (gemeinschaftlichen) Zylinderaxe aus gezählt seyn. Darf man dieselben Voraussetzungen machen (d. h. dass die Temperatur in den einzelnen Punkten der Wand bloss mit der Entfernung von der Axe sich ändere), so hat man nach §. 34, V:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}=0,\ r^2\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+r\frac{\partial v}{\partial r}=0;\ v=r^m,\ m(m-1)+m=0;\ m=0,0.$$
$$v=r^0[a+bl(r)]=a+bl(r);\ \frac{\partial v}{\partial r}=\frac{b}{r}.$$

Demnach
$$v_1=a_1+b_1l(r),\ v_2=a_2+b_2l(r);\ldots,\ v_n=a_n+b_nl(r).$$

$$k_1b_1=k_2b_2=\ldots=k_nb_n;\ -\frac{k_1b_1}{r_0}=\lambda_0[t_0-a_1-b_1l(r_0)],\ -\frac{k_nb_n}{r_n}=\lambda_n[a_n+b_nl(r_n)-t_1],$$

$$-\frac{k_1b_1}{r_1}=\lambda_1[a_1+b_1l(r_1)-a_2-b_2l(r_1)],\ldots,-\frac{k_{n-1}b_{n-1}}{r_{n-1}}=\lambda_{n-1}[a_{n-1}+b_{n-1}l(r_{n-1})$$
$$-a_n-b_nl(r_{n-1})].$$

Daraus

$$-k_1 b_1 = \frac{t_0 - t_1}{\left\{\begin{array}{c}\frac{1}{\lambda_0 r_0}+\frac{1}{\lambda_1 r_1}+\ldots+\frac{1}{\lambda_n r_n}+\left(\frac{1}{k_1}-\frac{1}{k_2}\right)l(r_1)+\left(\frac{1}{k_2}-\frac{1}{k_3}\right)l(r_2)+\ldots\ldots \\ +\left(\frac{1}{k_{n-1}}-\frac{1}{k_n}\right)l(r_{n-1})-\frac{l(r_0)}{k_1}+\frac{l(r_n)}{k_n}\end{array}\right\}}$$

$$a_1 = \frac{\left\{\begin{array}{c}t_0\left[\frac{1}{\lambda_1 r_1}+\frac{1}{\lambda_2 r_2}+\ldots+\frac{1}{\lambda_n r_n}+\left(\frac{1}{k_1}-\frac{1}{k_2}\right)l(r_1)+\ldots+\left(\frac{1}{k_{n-1}}-\frac{1}{k_n}\right)l(r_{n-1})\right] \\ +\frac{t_1}{\lambda_0 r_0}-\frac{t_1 l(r_0)}{k_1}+\frac{t_0 l(r_n)}{k_n}\end{array}\right\}}{\frac{1}{\lambda_0 r_0}+\ldots\ldots+\frac{1}{\lambda_n r_n}+\left(\frac{1}{k_1}-\frac{1}{k_2}\right)l(r_1)+\ldots\ldots\ldots\ldots+\frac{l(r_n)}{k_n}},$$

$$a_m = a_1 + k_1 b_1\left[\frac{1}{\lambda_1 r_1}+\ldots+\frac{1}{\lambda_{m-1} r_{m-1}}+\left(\frac{1}{k_1}-\frac{1}{k_2}\right)l(r_1)+\ldots\ldots + \left(\frac{1}{k_{m-1}}-\frac{1}{k_m}\right)l(r_{m-1})\right],\quad b_m = \frac{b_1 k_1}{k_m}.$$

Die durch die Flächeneinheit in der Zeiteinheit in die erste Schichte einströmende Wärmemenge ist $-\frac{k_1 b_1}{r_0}$, so dass, wenn h die Höhe des Zylinders ist, die denselben durchströmende Wärmemenge $= -2\pi k_1 b_1 h$ ist. (Man vergl. „Redtenbacher, die Gesetze des Locomotivbaus" S. 37 ff.)

§. 77.

Als dritter Hauptfall sey uns endlich die Gleichung

$$(a_n + b_n x)\frac{\partial^n y}{\partial x^n} + (a_{n-1} + b_{n-1} x)\frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}} + \ldots\ldots + (a_1 + b_1 x)\frac{\partial y}{\partial x} + (a_0 + b_0 x) y = 0 \qquad \text{(n)}$$

vorgelegt, in der $a_0, a_1, \ldots, a_n, b_0, b_1, \ldots, b_n$ beliebige Konstanten sind. Wir wollen nun untersuchen, ob dieser Gleichung etwa Genüge geleistet werden könne durch

$$y = \int_\alpha^\beta e^{ux} U \partial u,$$

worin U eine noch unbekannte Funktion von u, α und β aber noch zu bestimmende Konstanten (nach u und x) sind. Aus dieser Annahme folgt (§. 61):

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \int_\alpha^\beta u e^{ux} U \partial u,\quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \int_\alpha^\beta u^2 e^{ux} U \partial u, \ldots\ldots, \quad \frac{\partial^n y}{\partial x^n} = \int_\alpha^\beta u^n e^{ux} U \partial u.$$

Setzt man diese Werthe in (n) ein, und zur Abkürzung

$$a_n u^n + a_{n-1} u^{n-1} + \ldots + a_1 u + a_0 = \varphi,\quad b_n u^n + b_{n-1} u^{n-1} + \ldots + b_1 u + b_0 = \psi,$$

so wird jene Gleichung zu

$$\int_\alpha^\beta (\varphi + x\psi) e^{xu} U \partial u = 0,\quad \int_\alpha^\beta \varphi e^{xu} U \partial u + x\int_\alpha^\beta e^{xu} \psi U \partial u = 0.$$

Aber (§. 36)

$$\int e^{ux}\psi U \partial u = \frac{e^{ux}\psi U}{x} - \frac{1}{x}\int e^{ux}\frac{\partial(\psi U)}{\partial u}\partial u,$$

demnach $$x\int_\alpha^\beta e^{ux}\psi U\partial u = (e^{ux}\psi U)_\beta - (e^{ux}\psi U)_\alpha - \int_\alpha^\beta e^{ux}\frac{\partial(\psi U)}{\partial u}\partial u,$$

wo wir durch $(e^{ux}\psi U)_\beta$ den Werth von $e^{ux}\psi U$ für $u=\beta$ bezeichnen u. s. w. Also ist die Gleichung (n) auch

$$\int_\alpha^\beta\left[\varphi U - \frac{\partial(\psi U)}{\partial u}\right]e^{ux}\partial u + (e^{ux}\psi U)_\beta - (e^{ux}\psi U)_\alpha = 0.$$

Sey nun

$$\varphi U - \frac{\partial(\psi U)}{\partial u} = 0,\ \varphi U = \psi\frac{\partial U}{\partial u} - U\frac{\partial \psi}{\partial u} = 0,\ \frac{\varphi}{\psi} - \frac{1}{U}\frac{\partial U}{\partial u} - \frac{1}{\psi}\frac{\partial\psi}{\partial u} = 0,$$

$$\int\frac{\varphi}{\psi}\partial u - l(U) - l(\psi) = C,\ U = \frac{C}{\psi}e^{\int\frac{\varphi}{\psi}\partial u},$$

so hat man bloss noch α und β so zu bestimmen, dass

$$\left(e^{ux+\int\frac{\varphi}{\psi}\partial u}\right)_\beta - \left(e^{ux+\int\frac{\varphi}{\psi}\partial u}\right)_\alpha = 0. \qquad (p)$$

Sucht man also Werthe von u, für welche

$$e^{ux+\int\frac{\varphi}{\psi}\partial u} = k, \qquad (p')$$

wo k von u unabhängig ist, so wird man dieselben für α und β wählen können und dadurch Werthe finden, die für y gesetzt der Gleichung (n) genügen. Sind $u_0, u_1, u_2, \ldots$ solche Werthe von u, so wäre dann (§. 74):

$$y = C_1\int_{u_0}^{u_1}\frac{e^{ux+\int\frac{\varphi}{\psi}\partial u}}{\psi}\partial u + C_2\int_{u_0}^{u_2}\frac{e^{ux+\int\frac{\varphi}{\psi}\partial u}}{\psi}\partial u + \ldots\ldots \qquad (q)$$

Würde man etwa nachweisen wollen, dass (q) der (n) genügt, so hätte man nur obige Rechnung zu wiederholen, und fände, dass wenn (q) in (n) eingesetzt wird, seyn müsse:

$$C_1\left[\left(e^{ux+\int\frac{\varphi}{\psi}\partial u}\right)_{u_1} - \left(e^{ux+\int\frac{\varphi}{\psi}\partial u}\right)_{u_0}\right] + C_2\left[\left(e^{ux+\int\frac{\varphi}{\psi}\partial u}\right)_{u_2} - \left(e^{ux+\int\frac{\varphi}{\varphi}\partial u}\right)_{u_0}\right] + \ldots\ldots = 0.$$

Daraus folgt aber auch, dass wenn $u_0, u_1, u_2, \ldots$ so gewählt sind, dass

$$\left(e^{ux+\int\frac{\psi}{\psi}\partial u}\right)_{u_1} - \left(e^{ux+\int\frac{\varphi}{\psi}\partial u}\right)_{u_0} = A_1 f(x),\ \left(e^{ux+\int\frac{\varphi}{\psi}\partial u}\right)_{u_2} - \left(e^{ux+\int\frac{\varphi}{\psi}\partial u}\right)_{u_0} = A_2 f(x), \ldots\ldots,$$

die Gleichung (q) immer noch besteht, wenn nur

$$A_1C_1 + A_2C_2 + \ldots\ldots = 0 \qquad (r)$$

gesetzt wird. Immerhin aber müssen die Gränzen $u_0, u_1, \ldots\ldots$ von u und x unabhängig seyn, da wenn sie von x abhängig wären, die Grössen $\frac{\partial y}{\partial x}, \ldots\ldots$ nicht in der oben angegebenen Weise gebildet würden (§. 61). Hat die Gleichung (q) n Glieder, so hat man das allgemeine Integral gefunden; ist dies nicht der Fall, so hat man wenigstens einige besondere Werthe erhalten, die der Gleichung genügen, was nach §. 74 immerhin von bedeutendem Vortheil ist.

Es kann sich aber auch ereignen, dass $y=e^{ux}$, wo u eine noch zu bestimmende Konstante ist, der Gleichung (n) genügt. Man erhält nämlich, wenn man diesen Werth in (n) einsetzt:

$$(\varphi+x\psi)e^{ux}=0,$$

und dieser Gleichung kann unabhängig von x Genüge geschehen, wenn φ und ψ einen gemeinschaftlichen Faktor $u-\alpha$ haben; alsdann ist für $u=\alpha$ sowohl $\varphi=0$, als $\psi=0$ und mithin genügt der vorgelegten Gleichung $e^{\alpha x}$. Ist $(u-\alpha)^m$ gar ein Faktor von φ sowohl als ψ, so genügt der (n) der Werth $x^r e^{\alpha x}$ für y, wenn $r=0, 1, \ldots, m-1$, was wie in §. 75 bewiesen wird. * Alsdann tritt in (q) ein

$$e^{' x}\left[C_1+C_2 x+\ldots+C_m x^{m-1}\right].$$

Legen wir uns (zur Anwendung des Vorstehenden) allgemein die Gleichung zweiter Ordnung

$$(a_2+b_2 x)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+(a_1+b_1 x)\frac{\partial y}{\partial x}+(a_0+b_0 x)y=0 \qquad (s)$$

vor, so lässt sich diese Gleichung immer auf eine etwas einfachere zurückführen. Sey nämlich nicht $b_2=0$, so setze man $x=u-\frac{a_2}{b_2}$ und hat $\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial y}{\partial u}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}$, so dass die vorgelegte Gleichung auch ist:

$$b_2 u\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+\left(a_1-\frac{a_2 b_1}{b_2}+b_1 u\right)\frac{\partial y}{\partial u}+\left(a_0-\frac{a_2 b_0}{b_2}+b_0 u\right)y=0,$$

und wenn man noch mit b_2 dividirt, so erhält man, wie man leicht sieht, die Gleichung von der Form:

$$x\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+(a_1+b_1 x)\frac{\partial y}{\partial x}+(a_0+b_0 x)y=0.$$

Ist dagegen $b_2=0$, so wird, wenn man mit a_2 dividirt, die vorgelegte Gleichung die Form:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+(a_1+b_1 x)\frac{\partial y}{\partial x}+(a_0+b_0 x)y=0$$

haben. Ist hier nicht $b_1=0$, so erhält man, wenn man $x=u-\frac{a_1}{b_1}$ setzt, eine Gleichung von der Form:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+b_1 x\frac{\partial y}{\partial x}+(a_0+b_0 x)y=0.$$

Man hat somit bei der Gleichung des zweiten Grades (s) drei Fälle zu unterscheiden.

$$\text{I.)} \quad x\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+(A+Bx)\frac{\partial y}{\partial x}+(C+Dx)y=0,$$

---

* Man würde jetzt etwa so verfahren. Ist $u=\alpha$ gemeinschaftlicher Faktor in φ und ψ, so genügt $e^{\alpha x}$ der (n); ist $u=\alpha'$ ein anderer Faktor, so genügt $e^{\alpha' x}$, also auch (§. 74) $C_1 e^{\alpha x}+C_2 e^{\alpha' x}$. Wird aber $\alpha'=\alpha$, so ist $(u-\alpha)^2$ ein Faktor von φ und ψ, und wenn man zuerst $\alpha'=\alpha+\varepsilon$ setzt, genügt der (n) der Werth $e^{\alpha x}(A+Bx+\frac{B}{2}\varepsilon x^2+\ldots)$, woraus für $\alpha'=\alpha$, d. h. $\varepsilon=0$ folgt, dass $e^{\alpha x}(A+Bx)$ genügt, u. s. w.

wo nun $A=\frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{b_2^2}$, $B=\frac{b_1}{b_2}$, $C=\frac{a_0 b_2 - a_2 b_0}{b_2^2}$, $D=\frac{b_0}{b_2}$ und schliesslich für x zu setzen ist $x+\frac{a_2}{b_2}$, um zur Gleichung (s) zurückzukehren. Hier ist

$$\varphi = Au+C,\ \psi=u^2+Bu+D,\ \text{also}\ \frac{\varphi}{\psi}=\frac{Au+C}{u^2+Bu+D}=\frac{M}{u-\alpha}+\frac{N}{u-\beta},\ (\S.\ 37),$$

wenn wir voraussetzen, die beiden Wurzeln von $u^2+Bu+D=0$ seyen reell und ungleich ($B^2-4D>0$). Alsdann ist

$$\int\frac{\varphi\,\partial u}{\psi}=l(u-\alpha)^M+l(u-\beta)^N,\ e^{xu+\int\frac{\varphi}{\psi}\partial u}=e^{xu}(u-\alpha)^M(u-\beta)^N,$$

und die (p'): $$e^{xu}(u-\alpha)^M(u-\beta)^N=0,$$

wenn wir $k=0$ voraussetzen.

1) Seyen nun die Werthe von M und N positiv, so genügt dieser Gleichung $u=\alpha$, $u=\beta$ und bei positivem $x: u=-\infty$, bei negativem $x: u=+\infty$, (§. 22), so dass also jetzt:

$$y=C_1\int_\alpha^\beta e^{ux}(u-\alpha)^{M-1}(u-\beta)^{N-1}\partial u+C_2\int_\beta^{\pm\infty}e^{ux}(u-\alpha)^{M-1}(u-\beta)^{N-1}\partial u,$$

natürlich unter der Voraussetzung, dass die bestimmten Integrale überhaupt zulässig seyen (§. 49).

Hieher gehört etwa die Gleichung

$$x\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+a\frac{\partial y}{\partial x}-b^2xy=0,\ a>0,$$

wo nun $A=a$, $B=0$, $C=0$, $D=-b^2$, $\psi=u^2-b^2=(u+b)(u-b)$, $\varphi=au$, $\frac{\varphi}{\psi}=\frac{a}{2}\frac{1}{u+b}+\frac{a}{2}\frac{1}{u-b}$, $\int\frac{\varphi}{\psi}\partial u=l(u^2-b^2)^{\frac{1}{2}a}$, also $e^{ux}(u^2-b^2)^{\frac{1}{2}a}=0$, die Werthe von u: $-b$, $+b$, $\pm\infty$, so dass

$$\text{für } x>0:\quad x=C_1\int_{-b}^{+b}e^{xu}(u^2\ \ b^2)^{\frac{1}{2}a-1}\partial u+C_2\int_b^\infty e^{-ux}(u^2-b^2)^{\frac{1}{2}a-1}\partial u,$$

$$,,\ x<0:\quad y=C_1\int_{-b}^{+b}e^{xu}(u^2-b^2)^{\frac{1}{2}a-1}\partial u+C_2\int_b^\infty e^{ux}(u^2-b^2)^{\frac{1}{2}a-1}\partial u,$$

wenn man in der ersten Formel zuerst $-b$, $-\infty$ als Gränzen wählt und dann $u=-v$ setzt. Will man die zwei Fälle nicht trennen, so nehme man bloss das Integral $\int_{-b}^{+b}e^{xu}(u^2-b^2)^{\frac{1}{2}a-1}\partial u$ als Werth von y, der genügt, setze ihn y_1 und suche nach §. 74 den allgemeinen Werth. Dass aber dieser Werth genügt, lässt sich leicht nachträglich beweisen. Denn es ist hieraus

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\int_{-b}^{+b}ue^{xu}(u^2-b^2)^{\frac{1}{2}a-1}\partial u,\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\int_{-b}^{+b}u^2e^{xu}(u^2-b^2)^{\frac{1}{2}a-1}\partial u,$$

also die erste Seite der Gleichung:

$$\int_{-b}^{+b}\left\{xu^2+au-b^2x\right\}e^{xu}(u^2-b^2)^{\frac{1}{2}a-1}\partial u=x\int_{-b}^{+b}e^{xu}(u^2-b^2)^{\frac{1}{2}a}\partial u+a\int_{-b}^{+b}ue^{ux}(u^2-b^2)^{\frac{1}{2}a-1}\partial u.$$

Aber $$\int e^{ux}(u^2-b^2)^{\frac{1}{2}a}\partial u=\frac{e^{ux}(u^2-b^2)^{\frac{1}{2}a}}{x}-\frac{a}{x}\int e^{ux}u-(u^2b^2)^{\frac{1}{2}a-1}\partial u,$$

$$\int_{-b}^{+b} e^{xu}(u^2-b^2)^{\frac{1}{2}a}\,\partial u = -\frac{a}{x}\int_{-b}^{+b} u\,e^{ux}(u^2-b^2)^{\frac{1}{2}a-1}\,\partial u,$$

so dass die erste Seite Null ist.

2.) $M=0$, $N>0$; alsdann haben φ und ψ einen gemeinschaftlichen Faktor $u-\alpha$, und es ist

$$y=C_1 e^{\alpha x}+C_2\int_{\beta}^{\pm\infty}\frac{e^{ux}(u-\beta)^{N-1}}{u-\alpha}\,\partial u,$$

Hieher gehört etwa die Gleichung:

$$x\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+a\frac{\partial y}{\partial x}+(ab-b^2x)y=0,\quad b>0,\ a>0$$

$$\varphi=au+ab,\ \psi=u^2-b^2=(u+b)(u-b),\ \frac{\varphi}{\psi}=\frac{a}{u-b},\ \int\frac{\varphi\,\partial u}{\psi}=l(u-b)^a,$$

$$(u-b)^a e^{xu}=0;\ \text{also}$$

$$y=C_1 e^{-bx}+C_2\int_{b}^{\pm\infty}\frac{e^{ux}(u-b)^{a-1}}{u+b}\,\partial u,$$

wo das obere Zeichen gilt, wenn $x<0$, das untere, wenn $x>0$. Da für $x>0$ der Werth $u=-b$, für den der Nenner 0 wird, innerhalb der Integrationsgränzen liegt, so ist das Integral in diesem Falle nicht zulässig. Da man aber immer den Werth e^{-bx} kennt, so kann man nach §. 74 das allgemeine Integral leicht finden. Dasselbe ist

$$y=C_1 e^{-bx}+C_2 e^{-bx}\int\frac{e^{-\int\frac{a\,\partial x}{x}}}{e^{-2bx}}\,\partial x=C_1 e^{-bx}+C_2 e^{-bx}\int\frac{e^{2bx}}{x^a}\,\partial x.$$

3.) $M<0$, $N>0$, so dass etwa $M=-M'$ und mithin

$$\frac{e^{xu}(u-\beta)^N}{(u-\alpha)^{M'}}=0,$$

welcher Gleichung genügt wird für $u=\beta$ und $u=\pm\infty$. Bemerkt man aber, dass

$$(\gamma+\delta i)^r=\left\{\sqrt{\gamma^2+\delta^2}(\cos\varphi+i\sin\varphi)\right\}^r,\ \text{wenn}\ \cos\varphi=\frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2+\delta^2}},\ \sin\varphi=\frac{\delta}{\sqrt{\gamma^2+\delta^2}},$$

d. h. $$(\gamma+\delta i)^r=(\gamma^2+\delta^2)^{\frac{1}{2}r}e^{r\varphi i},$$

so wird, wenn oben $u=hi$:

$$\frac{(u-\beta)^N e^{xu}}{(u-\alpha)^{M'}}=\frac{(h^2+\beta^2)^{\frac{1}{2}N}e^{N\varphi i}e^{hxi}}{(h^2+\alpha^2)^{\frac{1}{2}M'}e^{M'\varphi' i}},\ \cos\varphi=\frac{-\beta}{\sqrt{h^2+\beta^2}},\ \sin\varphi=\frac{h}{\sqrt{h^2+\beta^2}},$$

$$\cos\varphi'=\frac{-\alpha}{\sqrt{h^2+\alpha^2}},\ \sin\varphi'=\frac{h}{\sqrt{h^2+\alpha^2}},$$

so dass, wenn $M'>N$, diese Grösse noch Null wird für $h=\pm\infty$, indem immer $\frac{e^{N\varphi i}e^{hxi}}{e^{M'\varphi' i}}$ endlich, $=\cos(N\varphi+hx-M'\varphi')+i\sin(N\varphi+hx-M'\varphi')$ ist. Demnach wird, wenn $M'>N$ auch noch der Gleichung genügt, wenn $u=\pm\infty\, i$.

Hieher gehört die Gleichung

$$x\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+x\frac{\partial y}{\partial x}+(3-2x)y=0,$$

$\varphi=3,\ \psi=u^2+u-2=(u-1)(u+2),\ \frac{\varphi}{\psi}=\frac{1}{u-1}-\frac{1}{u+2},\int\frac{\varphi}{\psi}\partial u=l\left(\frac{u-1}{u+2}\right),$

$e^{xu}\frac{u-1}{2+u}=0;\ u=1,\ \pm\infty$, also

$$\text{für } x>0:\ y=C_1\int_1^{-\infty}\frac{e^{xu}}{(u+2)^3}\partial u;\ \text{für } x<0:\ y=C_1\int_1^{\infty}\frac{e^{xu}}{(u+2)^3}\partial u,$$

von welchen Formeln die erste nicht (direkt) zu brauchen ist, da $u=-2$ innerhalb der Integrationsgränzen liegt. Eben so gehört hieher:

$$x\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+(x-1)\frac{\partial y}{\partial x}+(4-2x)y=0,$$

$\varphi=-u+4,\ \psi=u^2+u-2=(u-1)(u+2),\ \frac{\varphi}{\psi}=\frac{1}{u-1}-\frac{2}{u+2},\int\frac{\varphi}{\psi}\partial u=l\frac{u-1}{(u+2)^2},$

$\frac{e^{xu}(u-1)}{(u+2)^3}=0;\ u=1,\ \pm\infty,\ \pm\infty i.$ Also

$$\text{für } x>0:\ y=C_1\int_1^{-\infty}\frac{e^{xu}}{(u+2)^3}\partial u+C_2\int_{-\infty i}^{+\infty i}\frac{e^{xu}}{(u+2)^3}\partial u,$$

$$\text{für } x<0:\ y=C_1\int_1^{\infty}\frac{e^{xu}}{(u+2)^3}\partial u+C_2\int_{-\infty i}^{+\infty i}\frac{e^{xu}}{(u+2)^3}\partial u$$

Um das letzte Integral umzuformen, setzt man $u=v\,i$ und hat

$$\int_{-\infty i}^{+\infty i}\frac{e^{xu}}{(u+2)^3}\partial u=i\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{xvi}}{(vi+2)^3}\partial v=i\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{xvi}}{(v^2+4)^{\frac{3}{2}}e^{3\varphi i}}\partial v=i\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{(xv-3\varphi)i}}{(v^2+4)^{\frac{3}{2}}}\partial v,$$

worin $\cos\varphi=\frac{2}{\sqrt{v^2+4}},\ \sin\varphi=\frac{v}{\sqrt{v^2+4}}$, φ zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$. Dieses Integral ist aber =

$$i\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos(xv-3\varphi)+i\sin(xv-3\varphi)}{(v^2+4)^{\frac{3}{2}}}\partial v=i\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos(xv-3\varphi)}{(v^2+4)^{\frac{3}{2}}}\partial v-\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(xv-3\varphi)}{(v^2+4)^{\frac{3}{2}}}\partial v,$$

und da von $v=-\infty$ bis $v=0$, v und φ das entgegengesetzte Zeichen haben, wie von $v=0$ bis $v=\infty$, so ist das letztere Null (§. 49, VII) und das erstere kann mit den Gränzen 0 und ∞ genommen werden, so dass

$$y=\int_0^{\infty}\frac{\cos(vx-3\varphi)}{(v^2+4)^{\frac{3}{2}}}\partial v$$

der Gleichung genügt, wobei $\sin\varphi=\frac{v}{\sqrt{v^2+4}},\ \cos\varphi=\frac{2}{\sqrt{v^2+4}}$. Da aber auch („Grundzüge“ S. 12)

$$\sin 3\varphi=\frac{12v-v^3}{(v^2+4)^{\frac{3}{2}}},\ \cos 3\varphi=\frac{8-6v^2}{(v^2+4)^{\frac{3}{2}}},$$

so ist

$$y=\int_0^\infty \frac{\cos(vx)(8-6v^2)+\sin(vx)(12-v^2)v}{(v^2+4)^3}\partial v.$$

Aus §. 63 folgt aber:

$$\int_0^\infty \frac{\cos vx}{(v^2+4)^3}\partial v=\frac{\pi e^{-2x}}{128}\left(\frac{3}{4}+\frac{3}{2}x+x^2\right),\int_0^\infty \frac{v^2\cos vx}{(v^2+4)^3}\partial v=\frac{\pi e^{-2x}}{128}(1+2x-4x^2),$$

$$\int_0^\infty \frac{v\sin vx}{(v^2+4)^3}\partial v=\frac{\pi e^{-2x}}{128}(x+2x^2),\int_0^\infty \frac{v^3\sin vx}{(v^2+4)^3}\partial v=\frac{\pi e^{-2x}}{128}(12x-8x^2),$$

woraus dann
$$y=\frac{\pi x^2 e^{-2x}}{2},$$

d. h. wenn man $\frac{\pi}{2}$ mit der Konstanten zusammenzieht; es ist allgemein

$$\text{für } x>0:\ y=Cx^2e^{-2x},$$

$$\text{„ } x<0:\ y=C_1x^2e^{-2x}+C_2\int_1^\infty \frac{e^{xu}}{(u+2)^3}\partial u.$$

Uebrigens ist auch (§. 74)

$$y=C_1x^2e^{-2x}+C_2x^2e^{-2x}\int\frac{e^{-\int\frac{x-1}{x}}}{x^4e^{-4x}}\partial x=C_1x^2e^{-2x}+C_2x^2e^{-2x}\int\frac{e^{3x}}{x^3}\partial x.$$

4.) $M<0$, $N<0$, also wenn $M=-M'$, $N=-N'$, hat man $\frac{e^{xu}}{(u-\alpha)^{M'}(u-\beta)^{N'}}=0$, welcher Gleichung $u=\pm\infty$, und $u=\pm\infty i$ genügen.

Hieher gehört etwa $x\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}-a\frac{\partial y}{\partial x}-b^2xy=0$, $a>0$,

$$\varphi=-au,\ \psi=u^2-b^2=(u-b)(u+b),\ \frac{\varphi}{\psi}=-\frac{\frac{1}{2}a}{u+b}-\frac{\frac{1}{2}a}{u-b},\int\frac{\varphi}{\psi}\partial u=-\tfrac{1}{2}a\,l(u^2-b^2),$$

$$e^{\int\frac{\varphi}{\psi}\partial u}=\frac{1}{(u^2-b^2)^{\frac{1}{2}a}},$$

also
$$y=\int_{-\infty i}^{+\infty i}\frac{e^{xu}}{(u^2-b^2)^{\frac{1}{2}a+1}}\partial u.$$

Um das Integral umzuformen, setze man $u=vi$ und hat:

$$y=i\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{vxi}}{(-v^2-b^2)^{\frac{1}{2}a+1}}\partial v=\frac{i}{(-1)^{\frac{1}{2}a+1}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos(vx)+i\sin(vx)}{(v^2+b^2)^{\frac{1}{2}a+1}}\partial v,$$

oder wenn man beachtet, dass $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin vx}{(v^2+b^2)^{\frac{1}{2}a+1}}\partial v=0$, $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos vx}{(v^2+b^2)^{\frac{1}{2}a+1}}\partial v=$ $2\int_0^\infty\frac{\cos vx}{(v^2+b^2)^{\frac{1}{2}a+1}}\partial v$, und $\frac{2i}{(-1)^{\frac{1}{2}a+1}}$ als konstant mit der willkürlichen Konstanten

zusammenzieht, so genügt der vorgelegten Gleichung

$$y=C\int_0^\infty \frac{\cos(vx)}{(v^2+b^2)^{\frac{1}{2}a+1}}\partial v,$$

wo das Integral, wenn $\frac{1}{2}a$ eine ganze Zahl ist, nach §. 63 ausgerechnet werden kann.

So wäre etwa für $a=2$, d. h. $x\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}-2\frac{\partial y}{\partial x}-b^2 x y=0$:

$$y=C\int_0^\infty \frac{\cos(vx)}{(v^2+b^2)^2}\partial v=\frac{C\pi}{4b^3}e^{-bx}\left(x+\frac{1}{b}\right),$$

so dass also $e^{-bx}\left(x+\frac{1}{b}\right)$ der Gleichung genügt.

5.) $M=0$, $N<0$; jetzt genügt $e^{\alpha x}$ der Differentialgleichung und $u=\pm\infty i$ als Gränzwerthe.

$$x\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}-(1+x)\frac{\partial y}{\partial x}-(3+12x)y=0,$$

$\varphi=-u-3$, $\psi=u^2-u-12=(u+3)(u-4)$, $\frac{\varphi}{\psi}=-\frac{1}{u-4}$, $\int\frac{\varphi}{\psi}\partial u=-l(u-4)$, also

$$y=C_1 e^{-3x}+C_2\int_{-\infty i}^{+\infty i}\frac{e^{xu}}{(u-4)^2(u+3)}\partial u.$$

Das letzte Integral ist in der bereits mehrfach berührten Weise umzuformen. Ist

$$\cos\varphi=-\frac{4}{\sqrt{v^2+16}},\ \sin\varphi=\frac{v}{\sqrt{v^2+16}};\ \cos\varphi'=\frac{3}{\sqrt{v^2+9}},\ \sin\varphi'=\frac{v}{\sqrt{v^2+9}},$$

so ist es gleich

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{xvi}e^{-2\varphi i}e^{-\varphi' i}}{(v^2+16)(v^2+9)^{\frac{1}{2}}}\partial v=2\int_0^\infty\frac{\cos(xv-2\varphi-\varphi')}{(v^2+16)\sqrt{v^2+9}}\partial v.$$

Uebrigens ist das allgemeine Integral auch (§. 74):

$$y=e^{-3x}\left[C_1+C_2\int x e^{7x}\partial x\right]=C_1 e^{-3x}+C_2 e^{4x}\left(x-\frac{1}{7}\right).$$

Seyen aber zweitens nun die beiden Wurzeln von $u^2+Bu+D=0$ reell und gleich ($B^2=4D$), so ist $\frac{\varphi}{\psi}=\frac{Au+C}{(u-\alpha)^2}=\frac{M}{(u-\alpha)^2}+\frac{N}{u-\alpha}$, $\int\frac{\varphi}{\psi}\partial u=-\frac{M}{u-\alpha}+N\,l(u-\alpha)$, $e^{\int\frac{\varphi}{\psi}\partial u}=(u-\alpha)^N e^{-\frac{M}{u-\alpha}}$, also $e^{xu-\frac{M}{u-\alpha}}(u-\alpha)^N=0$. Dieser Gleichung genügt $u=\alpha$, wenn $N>0$ und $M\geqq 0$; ist $N=0$, so genügt ihr $u=\alpha$ nur wenn $M>0$; ist $N<0$, so genügt ihr $u=\pm\infty i$. Der Werth $u=\pm\infty$ genügt ihr immer. Ist $M<0$ und $N\geqq 0$, so wird nur $u=\pm\infty$, je ob $x\lessgtr 0$, genügen, so dass man also dann kein Resultat erhält. Als Beispiel mag hiezu dienen:

6.) $$x\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+(3+4x)\frac{\partial y}{\partial x}+(7+4x)y=0.$$

$\varphi=3u+7$, $\psi=u^2+4u+4=(u+2)^2$, $\frac{\varphi}{\psi}=\frac{1}{(u+2)^2}+\frac{3}{u+2}$, $\int\frac{\varphi}{\psi}\partial u=-\frac{1}{u+2}+3l(u+2)$, $e^{\int\frac{\varphi}{\psi}\partial u}=(u+2)^3 e^{-\frac{1}{u+2}}$; $e^{xu-\frac{1}{u+2}}(u+2)^3=0$ gibt $u=-2$ und $u=\pm\infty$, so dass

$$\text{für } x>0:\ y=\int_{-2}^{-\infty} e^{xu-\frac{1}{u+2}}(u+2)\partial u=\int_{2}^{\infty} e^{-xu+\frac{1}{u-2}}(u-2)\partial u,$$

$$\text{für } x<0:\ y=\int_{-2}^{+\infty} e^{xu-\frac{1}{u+2}}(u+2)\partial u.$$

Sind endlich die beiden Wurzeln der Gleichung $u^2+Bu+D=0$ imaginär ($B^2-4D<0$), so ist $u^2+Bu+D=(u+\alpha)^2+\beta^2$, und (§. 36)

$$\int\frac{Au+C}{u^2+Bu+D}\partial u=\frac{A}{2}l\left\{(u+\alpha)^2+\beta^2\right\}+\frac{C-\alpha A}{\beta}\operatorname{arc}\left(tg=\frac{u+\alpha}{\beta}\right),$$

also $e^{xu+\int\frac{\varphi}{\psi}\partial u}=e^{xu+P}[(u+\alpha)^2+\beta^2]^{\frac{1}{2}A}$, $P=\frac{C-\alpha A}{\beta}\operatorname{arc}\left(tg=\frac{u+\alpha}{\beta}\right)$. Soll diese Grösse Null seyn, so muss für $A>0$, $u=-\alpha\pm\beta i$, $u=\pm\infty$ je ob $x\lesseqgtr 0$; ist $A<0$, so genügt $u=\pm\infty$.

7.) $$x\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+a\frac{\partial y}{\partial x}+b^2xy=0,\ a>0,$$

$\varphi=au$, $\psi=u^2+b^2$, $\int\frac{\varphi}{\psi}\partial u=\frac{1}{2}l(u^2+b^2)^a$, $\alpha=0$, $\beta=b$:

$$y=C_1\int_{-bi}^{+bi}e^{xu}(u^2+b^2)^{\frac{1}{2}a-1}\partial u+C_2\int_{-bi}^{-\infty}e^{xu}(u^2+b^2)^{\frac{1}{2}a-1}\partial u,\ x>0,$$

$$y=C_1\int_{-bi}^{+bi}e^{xu}(u^2+b^2)^{\frac{1}{2}a-1}\partial u+C_2\int_{-bi}^{\infty}e^{xu}(u^2+b^2)^{\frac{1}{2}a-1}\partial u,\ x<0.$$

Behandeln wir den ersten Werth, so ist auch:

$$y=C_1\int_{-bi}^{0}(u^2+b^2)^{\frac{1}{2}a-1}e^{xu}\partial u+C_1\int_{0}^{bi}(u^2+b^2)^{\frac{1}{2}a-1}e^{xu}\partial u+C_2\int_{-bi}^{0}(u^2+b^2)^{\frac{1}{2}a-1}e^{xu}\partial u$$
$$+C_2\int_{0}^{-\infty}(u^2+b^2)^{\frac{1}{2}a-1}e^{xu}\partial u=(C_1+C_2)i\int_{-b}^{0}(b^2-v^2)^{\frac{1}{2}a-1}e^{vxi}\partial v+C_1 i\int_{0}^{b}(b^2-v^2)^{\frac{1}{2}a-1}e^{xvi}\partial v$$
$$-C_2\int_{0}^{\infty}(u^2+b^2)^{\frac{1}{2}a-1}e^{-xv}\partial v.$$

Die zwei ersten geben

$$(C_1+C_2)i\int_{0}^{b}(b^2-v^2)^{\frac{1}{2}a-1}e^{-vxi}\partial v+C_1 i\int_{0}^{b}(b^2-v^2)^{\frac{1}{2}a-1}e^{xvi}\partial v$$
$$=(C_1+C_2)i\int_{0}^{b}(b^2-v^2)^{\frac{1}{2}a-1}(\cos vx-i\sin vx)\partial v+C_1 i\int_{0}^{b}(b^2-v^2)^{\frac{1}{2}a-1}(\cos vx+i\sin vx)\partial v$$

$$=(2C_1+C_2)i\int_0^b(b^2-v^2)^{\frac{1}{2}a-1}\cos vx\,\partial v+C_2\int_0^b(b^2-v^2)^{\frac{1}{2}a-1}\sin vx\,\partial v,$$

so dass also, wenn $(2C_1+C_2)i=C$, der Gleichung genügt:

$$y=C\int_0^b(b^2-v^2)^{\frac{1}{2}a-1}\cos(vx)\,\partial v+C'\int_0^b(b^2-v^2)^{\frac{1}{2}a-1}\sin(vx)\,\partial v$$

$$-C'\int_0^\infty(v^2+b^2)^{\frac{1}{2}a-1}e^{-xv}\partial v,\quad x>0,$$

eben so

$$y=C\int_0^b(b^2-v^2)^{\frac{1}{2}a-1}\cos(vx)\,\partial v+C'\int_0^b(b^2-v^2)^{\frac{1}{2}a-1}\sin(vx)\,\partial v$$

$$+C'\int_0^\infty(v^2+b^2)^{\frac{1}{2}a-1}e^{xv}\partial v,\quad x<0.$$

Ist hier $\frac{1}{2}a-1$ eine positive ganze Zahl oder Null, so lassen sich diese Integrale leicht berechnen.

II. $$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+Ax\frac{\partial y}{\partial x}+(B+Cx)y=0.$$

$$\varphi=u^2+B,\ \psi=Au+C,\ \frac{\varphi}{\psi}=\frac{u^2+B}{Au+C}=\frac{u}{A}-\frac{C}{A^2}+\frac{C^2+A^2B}{A^2(Au+C)},\ \int\frac{\varphi}{\psi}\partial u=\frac{u^2}{2A}-\frac{Cu}{A^2}$$
$$+\frac{C^2+A^2B}{A^3}l(Au+C),$$

also wäre hier

$$e^{xu+\frac{u^2}{2A}-\frac{Cu}{A^2}}(Au+C)^\alpha=0,\quad \alpha=\frac{C^2+A^2B}{A^3}.$$

Dieser Gleichung wird genügt:

für $\alpha>0$, $A>0$ durch $u=-\frac{C}{A}$, $\pm\infty i$,
„ $\alpha>0$, $A<0$ „ $u=-\frac{C}{A}$, $\pm\infty$,
„ $\alpha\overset{=}{<}0$, $A>0$ „ $u=\pm\infty i$,
„ $\alpha\overset{=}{<}0$, $A<0$ „ $u=\pm\infty$

Für $\alpha=0$ haben übrigens φ und ψ einen gemeinschaftlichen Faktor $Au+C$, und es genügt also $e^{\beta x}$ der vorgelegten Gleichung, wenn $\beta=-\frac{C}{A}$.

Das Gesagte setzt voraus, dass nicht $A=0$. In diesem Falle wäre

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+(B+Cx)y=0,$$

welche Gleichung wir nachher behandeln wollen (Nr. III).

8.) $$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+mx\frac{\partial y}{\partial x}+ny=0,\quad m>0,\ n>0.$$

$$\varphi=u^2+n,\ \psi=mu,\ \int\frac{\varphi}{\psi}\partial u=\frac{u^2}{2m}+\frac{n}{m}l(u);\ e^{xu+\frac{u^2}{2m}}u^{\frac{n}{m}}=0;\quad u=0,\ \pm\infty i,$$

also

$$y=C_1\int_{-\infty i}^{+\infty i}e^{xu+\frac{u^2}{2m}}u^{\frac{n}{m}-1}\partial u+C_2\int_0^{\infty i}e^{xu+\frac{u^2}{2m}}u^{\frac{n}{m}-1}\partial u$$

$$=C_1 i\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{v^2}{2m}}(vi)^{\frac{n}{m}-1} e^{xvi}\partial v+C_2 i\int_0^\infty e^{-\frac{v^2}{2m}} e^{xvi}(vi)^{\frac{n}{m}-1}\partial v,$$

oder wenn man $i^{\frac{n}{m}}$ mit den Konstanten zusammenzieht:

$$y=C\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{v^2}{2m}} v^{\frac{n}{m}-1}(\cos xv+i\sin xv)\partial v+C'\int_0^\infty e^{-\frac{v^2}{2m}} v^{\frac{n}{m}-1}(\cos xv+i\sin xv)\partial v$$

$$=(C+C')\int_0^\infty e^{-\frac{v^2}{2m}} v^{\frac{n}{m}-1}(\cos xv+i\sin xv)\partial v+C\int_{-\infty}^0 e^{-\frac{v^2}{2m}} v^{\frac{n}{m}-1}(\cos xv+i\sin xv)\partial v.$$

Setzt man im letzten $-v$ für v, so erhält man, da $C+C'+C(-1)^{\frac{n}{m}-1}$, $(C+C'-C(-1)^{\frac{n}{m}-1})i$ Konstanten sind:

$$y=C_1\int_0^\infty e^{-\frac{v^2}{2m}} v^{\frac{n}{m}-1}\cos xv\,\partial v+C_2\int_0^\infty e^{-\frac{v^2}{2m}} v^{\frac{n}{m}-1}\sin xv\,\partial v.$$

Für den Fall, dass $\frac{n}{m}$ eine positive ganze Zahl, werden diese Integrale nach §. 62 bestimmt. So ist für $m=n$:

$$\int_0^\infty e^{-\frac{v^2}{2m}}\cos(xv)\,\partial v=\sqrt{\frac{m\pi}{2}}\,e^{-\frac{mx^2}{2}},$$

so dass also der Gleichung $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+mx\frac{\partial y}{\partial x}+my=0$ der Werth $e^{-\frac{mx^2}{2}}$ genügt. Der andere ist dann (§. 74)

$$e^{-\frac{mx^2}{2}}\int\frac{e^{-\frac{mx^2}{2}}}{e^{-mx^2}}\partial x=e^{-\frac{mx^2}{2}}\int e^{\frac{mx^2}{2}}\partial x.$$

III. $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+A\frac{\partial y}{\partial x}+(B+Cx)y=0,$

oder wenn man $x=u-\frac{B}{C}$ setzt, so erhält man die Form:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+m\frac{\partial y}{\partial x}+nxy=0.$$

Wäre $C=0$, so gehörte die Gleichung zu §. 75. Für $A=0$ erhält man die in II. zurückgestellte Gleichung, die also auch hieher gehört. Jetzt ist $\varphi=u^2+mu$, $\psi=n$, $\int\frac{\varphi}{\psi}\partial u=\frac{u^3}{3n}+\frac{mu^2}{2n}$, so dass $e^{xu+\frac{u^3}{3n}+\frac{mu^2}{2n}}=0$ seyn soll. Ist $n>0$, so ist diese Grösse Null für $u^3=-\infty$; dagegen bei $n<0$ für $u^3=+\infty$. Daraus folgt

$$u=\infty\sqrt[3]{-1}\text{ oder }u=\infty\sqrt[3]{+1},$$

d. h. da (vergl. „Grundzüge“ S. 38)

$$-1=e^{(2m+1)\pi i},\ \sqrt[3]{-1}=e^{\frac{2m+1}{3}\pi i},\ \text{also }\sqrt[3]{-1}=e^{\frac{\pi}{3}i}\text{ oder }e^{\pi i}\text{ oder }e^{\frac{5}{3}\pi i},$$

$$+1=e^{2m\pi i},\ \sqrt[3]{+1}=e^{\frac{2m}{3}\pi i},\ \text{also }\sqrt[3]{+1}=e^0\text{ oder }e^{\frac{2}{3}\pi i},\text{ oder }e^{\frac{4\pi i}{3}},$$

so hat man als Gränzwerthe von u:

$$\text{für } n>0:\ \infty\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right),\ -\infty,\ \infty\left(\cos\frac{5}{3}\pi+i\sin\frac{5}{3}\pi\right)$$

$$=\infty\left(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right),$$

$$\text{für } n<0:\ \infty,\ \infty\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right),\ \infty\left(\cos\frac{4}{3}\pi+i\sin\frac{4}{3}\pi\right)$$

$$=\infty\left(\cos\frac{2}{3}\pi-i\sin\frac{2}{3}\pi\right),$$

also da $\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$, $\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}\sqrt{3}$, $\cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}$, $\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{1}{2}\sqrt{3}$:

$$\text{für } n>0:\ y=C_1\int_{-\infty}^{\frac{1}{2}\infty(1+i\sqrt{3})} e^{xu+\frac{u^3}{3n}+\frac{mu^2}{2n}}\partial u+C_2\int_{\frac{1}{2}\infty(1+i\sqrt{3})}^{\frac{1}{2}\infty(1-i\sqrt{3})} e^{xu+\frac{u^3}{3n}+\frac{mu^2}{2n}}\partial u,$$

$$\text{für } n<0:\ y=C_1\int_{\frac{1}{2}\infty(-1+i\sqrt{3})}^{-\frac{1}{2}\infty(1+i\sqrt{3})} e^{xu+\frac{u^3}{3n}+\frac{mu^2}{2n}}\partial u+C_2\int_{\frac{1}{2}\infty(-1+i\sqrt{3})}^{\infty} e^{xu+\frac{u^3}{3n}+\frac{mu^2}{2n}}\partial u.$$

Um diese Integrale umzuformen, schiebe man überall die Gränze 0 ein (§. 49, III), so dass man jedes in eine Summe zweier anderer umstellt. Dadurch wird man Integrale folgender Form erhalten:

$$\int_0^{\infty}U\partial u,\quad \int_{-\infty}^{0}U\partial u,\quad \int_{\frac{1}{2}\infty(1+i\sqrt{3})}^{0}U\partial u,\quad \int_0^{\frac{1}{2}\infty(1+i\sqrt{3})}U\partial u,\qquad \text{u. s. w.}$$

deren Behandlung durch das Folgende klar werden wird.

Setzt man in $\int_0^{\frac{1}{2}\infty(1+i\sqrt{3})} e^{xu+\frac{u^3}{3n}+\frac{mu^2}{2n}}\partial u$ statt u die Grösse $\frac{1}{2}z(1+i\sqrt{3})$, so sind die Gränzen von z : 0 und ∞; ferner ist $u^3=z^3\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^3=-z^3$, $u^2=z^2\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^2=z^2\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)$, so dass

$$e^{xu+\frac{u^3}{3n}+\frac{mu^2}{2n}}=e^{\frac{1}{2}\left(xz-\frac{2z^3}{3n}-\frac{mz^2}{2n}\right)}e^{\frac{\sqrt{3}}{2}i\left(xz+\frac{mz^2}{2n}\right)}=e^{\frac{1}{2}\left(xz-\frac{2z^3}{3n}-\frac{mz^2}{2n}\right)}(\cos\varphi+i\sin\varphi),$$

$$\varphi=\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\left(xz+\frac{mz^2}{2n}\right),$$

und also

$$\int_0^{\frac{1}{2}\infty(1+i\sqrt{3})} e^{xu+\frac{u^3}{3n}+\frac{mu^2}{2n}}\partial u=\tfrac{1}{2}(1+i\sqrt{3})\int_0^{\infty} e^{\frac{1}{2}\left(xz-\frac{2z^3}{3n}-\frac{mz^2}{2n}\right)}(\cos\varphi+i\sin\varphi)\partial z.$$

Verfährt man in ähnlicher Weise mit allen übrigen Integralen, setzt zuweilen $-u$ für u, um die Gränze $-\infty$ in $+\infty$ umzuwandeln, u. s. f., so erhält man:

$$\text{für } n>0:\ y=C\int_0^{\infty} e^{-xu-\frac{u^3}{3n}+\frac{mu^2}{2n}}\partial u+C'\int_0^{\infty} e^{\frac{1}{2}\left(xu-\frac{2u^3}{3n}-\frac{mu^2}{2n}\right)}\cos\varphi\,\partial u$$

$$+C''\int_0^{\infty} e^{\frac{1}{2}\left(xu-\frac{2u^3}{3n}-\frac{mu^2}{2n}\right)}\sin\varphi\,\partial u,$$

$$\varphi = \frac{1}{2}\sqrt{3}\left(xu + \frac{mu^2}{2n}\right), \quad C' - C''\sqrt{3} = 2C;$$

$$\text{für } n < 0: \; y = C\int_0^\infty e^{xu + \frac{u^3}{3n} + \frac{mu^2}{2n}} \partial u + C'\int_0^\infty e^{\frac{u^3}{3n} - \frac{u}{2}\left(x + \frac{mu}{2n}\right)} \cos\psi \, \partial u$$

$$+ C''\int_0^\infty e^{\frac{u^3}{3n} - \frac{u}{2}\left(x + \frac{mu}{2n}\right)} \sin\psi \, \partial u,$$

$$\psi = \left(x - \frac{mu}{2n}\right)\frac{u\sqrt{3}}{2}, \quad C''\sqrt{3} + C' = 2C.$$

Für den oben berührten Fall ist $m = 0$, wodurch die Integrale sich etwas vereinfachen.

Wir haben damit die hauptsächlichsten Fälle für die Gleichung zweiten Grades betrachtet. Beispiele für Differentialgleichungen höherer Ordnung würden sich natürlich in ähnlicher Weise behandeln lassen.

§. 78.

Auf die in §. 77 behandelte Form lässt sich die Gleichung

$$x^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + (a_1 + b_1 x^m)\, x\frac{\partial y}{\partial x} + (a_0 + b_0 x^m + c_0 x^{2m})\, y = 0 \qquad \text{(a)}$$

zurückführen. Man setze nämlich $x^m = u$, $y = u^n z$, wo n eine noch unbestimmte Konstante ist. Alsdann hat man:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial (u^n z)}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} = \left(u^n\frac{\partial z}{\partial u} + nu^{n-1}z\right) m x^{m-1}, \quad x\frac{\partial y}{\partial x} = mu\left(u^n\frac{\partial z}{\partial u} + nu^{n-1}z\right),$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial\left\{m x^{m-1}\left(u^n\frac{\partial z}{\partial u} + nu^{n-1}z\right)\right\}}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} = m(m-1)x^{m-2}\left(u^n\frac{\partial z}{\partial u} + nu^{n-1}z\right)$$

$$+ m x^{m-1}\left[u^n\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2nu^{n-1}\frac{\partial z}{\partial u} + n(n-1)u^{n-2}z\right] m x^{m-1},$$

$$x^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = m(m-1)u\left(u^n\frac{\partial z}{\partial u} + nu^{n-1}z\right) + m^2u^2\left[u^n\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2nu^{n-1}\frac{\partial z}{\partial u} + n(n-1)u^{n-2}z\right],$$

so dass, wenn man diese Werthe in (a) einsetzt:

$$m^2u^{n+2}\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \left[2nm^2u^{n+1} + m(m-1)u^{n+1} + a_1 m u^{n+1} + b_1 m u^{n+2}\right]\frac{\partial z}{\partial u}$$

$$+ [nm(m-1)u^n + m^2n(n-1)u^n + a_1 mnu^n + b_1 mnu^{n+1} + a_0 u^n + b_0 u^{n+1}$$

$$+ c_0 u^{n+2}]\, z = 0,$$

und wenn man n so bestimmt, dass

$$nm(m-1) + m^2n(n-1) + a_1 mn + a_0 = 0, \qquad \text{(b)}$$

so wird diese Gleichung, die man alsdann durch u^{n+1} dividiren kann:

$$m^2u\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + [2nm^2 + m(m-1) + a_1 m + b_1 mu]\frac{\partial z}{\partial u} + (b_1 mn + b_0 + c_0 u)\, z = 0 \qquad \text{(c)}$$

und gehört unmittelbar zu den in §. 77 ausführlich behandelten Formen. Die Gleichung (b) liefert

$$n = \frac{1 - a_1}{2m} \pm \sqrt{-\frac{a_0}{m^2} + \left(\frac{a_1 - 1}{2m}\right)^2},$$

von welchen zwei Werthen jeder gewählt werden kann.

1.) $$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \pm a^2 x^r y = 0, \quad x^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \pm a^2 x^{r+2} y = 0.$$

Hier ist $a_1 = b_1 = 0$, $a_0 = 0$, $b_0 = \pm a^2$, $c_0 = 0$, $m = r + 2$, also $u = x^{r+2}$; die (b) ist $n(r+2)(r+1) + (r+2)^2 n(n-1) = 0$, der genügt wird durch $n = 0$, so dass $z = y$. Die (c) ist jetzt

$$(r+2)^2 u \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + (r+2)(r+1) \frac{\partial z}{\partial u} \pm a^2 z = 0, \quad u \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{r+1}{r+2} \frac{\partial z}{\partial u} \pm \frac{a^2}{(r+2)^2} z = 0$$

und gehört zu §. 77, I. Ist diese Gleichung zwischen z und u integrirt, so setzt man $u = x^{r+2}$, $z = y$.

Der Fall $r = -2$ ist aber hier ausgeschlossen; alsdann hat man $x^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \pm a^2 y = 0$, welche Gleichung zu §. 76 gehört, wo sie in Nr. 1 bereits integrirt ist.

2.) $$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{2}{x} \frac{\partial y}{\partial x} + \left[a^2 - \frac{r(r+1)}{x^2}\right] y = 0, \quad x^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + 2x \frac{\partial y}{\partial x} + [a^2 x^2 - r(r+1)] y = 0,$$

wo r eine positive ganze Zahl. $a_1 = 2$, $b_1 = 0$, $a_0 = -r(r+1)$, $b_0 = 0$, $c_0 = a^2$, $m = 1$, mithin die (b):

$$n(n-1) + 2n - r(r+1) = 0, \quad n = r; \quad x = u, \quad y = u^r z;$$

also die (c): $$x \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2(r+1) \frac{\partial z}{\partial x} + a^2 x z = 0,$$

welcher Gleichung nun (§. 77, Nr. 7) das Integral

$$\int_0^a (a^2 - v^2)^r \cos(vx) \partial v, \quad \text{also der ersten } x^r \int_0^a (a^2 - v^2)^r \cos(vx) \partial v$$

genügt. Setzt man $v = a \sin\varphi$, so genügt also der vorgelegten Gleichung

$$y = C x^r \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2r+1} \varphi \cos(a x \sin\varphi) \partial \varphi.$$

3.) $$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{a}{x} \frac{\partial y}{\partial x} + b x^r y = 0; \quad x^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + a x \frac{\partial y}{\partial x} + b x^{r+2} y = 0.$$

$a_1 = a$, $b_1 = 0$, $a_0 = 0$, $b_0 = 0$, $c_0 = b$, $m = \frac{r+2}{2}$; $u = x^{\frac{r+2}{2}}$, $n = 0$, $y = z$:

$$\left(\frac{r+2}{2}\right)^2 u \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} + \left[\frac{r(r+2)}{4} + a \frac{r+2}{2}\right] \frac{\partial y}{\partial u} + b u y = 0,$$

$$u \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} + \frac{r+2a}{r+2} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{4b}{(r+2)^2} u y = 0,$$

welche Gleichung zu §. 77, I gehört. Für $r = -2$ gehört sie zu §. 76.

§. 79.

Die seither mittelst bestimmter Integrale durchgeführte Integration von Differentialgleichungen hat den indirekten Weg eingehalten. Es ist aber leicht, auch den direkten einzuschlagen, d. h. eine Differentialgleichung zu bilden, der eine bestimmte Integralform zukommt, wie dies namentlich schon Euler gethan, dem im Wesentlichen also der Grundgedanke obiger Methode zukommt. Wir wollen dies an folgenden Beispielen erläutern.

I. Sey

$$y = \int_\alpha^\beta U (u + \xi)^n \partial u,$$

wo ξ eine beliebige Funktion von x ist, während α und β Konstanten nach x und u sind, so hat man:

$$\frac{\partial y}{\partial x}=n\int_\alpha^\beta U(u+\xi)^{n-1}\frac{\partial \xi}{\partial x}\partial u,\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=n\int_\alpha^\beta U(u+\xi)^{n-1}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}\partial u$$
$$+n(n-1)\int_\alpha^\beta U(u+\xi)^{n-2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2\partial u.$$

Sind nun L, M, N noch zu bestimmende Funktionen von x, so ist hieraus:

$$L\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+M\frac{\partial y}{\partial x}+Ny=\int_\alpha^\beta U(u+\xi)^{n-2}\left[nL(u+\xi)\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}+n(n-1)L\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2\right.$$
$$\left.+Mn(u+\xi)\frac{\partial \xi}{\partial x}+N(u+\xi)^2\right]\partial u.$$

Gesetzt nun, es werden L, M, N so bestimmt, dass das unbestimmt genommene Integral der zweiten Seite $=R(u+\xi)^{n-1}$, wo R eine noch zu bestimmende Funktion von u ist, so muss seyn

$$U(u+\xi)^{n-2}\left[nL(u+\xi)\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}+\ldots+N(u+\xi)^2\right]=\frac{\partial R}{\partial u}(u+\xi)^{n-1}+(n-1)R(u+\xi)^{n-2},$$
$$U\left[nL(u+\xi)\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}+n(n-1)L\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2+Mn(u+\xi)\frac{\partial \xi}{\partial x}+N(u+\xi)^2\right]=\frac{\partial R}{\partial u}(u+\xi)$$
$$+(n-1)R.$$

Sind nun A, B, C, a, b, c beliebige Konstanten, so wollen wir setzen:

$$\left.\begin{array}{l}N=A+a\xi,\ 2N\xi+nM\frac{\partial \xi}{\partial x}+nL\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}=B+b\xi,\\ N\xi^2+nM\xi\frac{\partial \xi}{\partial x}+n(n-1)L\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2+nL\xi\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}=C+c\xi,\end{array}\right\}\ (a)$$

wodurch obige Gleichung zu

$$U[(A+a\xi)u^2+(B+b\xi)u+C+c\xi]=u\frac{\partial R}{\partial u}+\xi\frac{\partial R}{\partial u}+(n-1)R$$

wird, wo nun U und R so bestimmt werden sollen, dass

$$U(c+bu+au^2)=\frac{\partial R}{\partial u},\ U(C+Bu+Au^2)=u\frac{\partial R}{\partial u}+(n-1)R.$$

Alsdann ist obige Gleichung identisch und man hat:

$$\frac{Au^2+Bu+C}{au^2+bu+c}=\frac{u\frac{\partial R}{\partial u}+(n-1)R}{\frac{\partial R}{\partial u}},\ (n-1)\frac{R}{\frac{\partial R}{\partial u}}=\frac{-au^3+(A-b)u^2+(B-c)u+C}{au^2+bu+c},$$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{R}\frac{\partial R}{\partial u}=\frac{(n-1)(au^2+bu+c)}{-au^3+(A-b)u^2+(B-c)u+C},\\ l(R)=(n-1)\int\frac{(au^2+bu+c)\partial u}{-au^3+(A-b)u^2+(B-c)u+C},\\ U=\frac{1}{au^2+bu+c}\frac{\partial R}{\partial u}=\frac{(n-1)R}{-au^3+(A-b)u^2+(B-c)u+C},\end{array}\right\}\ (b)$$

während $L\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+M\frac{\partial y}{\partial x}+Ny=\left[R(u+\xi)^{n-1}\right]_{u=\beta}-\left[R(u+\xi)^{n-1}\right]_{u=\alpha}.$

Aus den Gleichungen (a) folgt:

$$N=A+a\xi,\ L=\frac{C+(c-B)\xi+(A-b)\xi^2+a\xi^3}{n(n-1)\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2},\ M=\frac{B+b\xi-2N\xi-nL\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}}{n\frac{\partial \xi}{\partial x}},\qquad (c)$$

so dass, wenn man im Stande ist, α und β unabhängig von x zu bestimmen, so dass

$$\left[R(u+\xi)^{n-1}\right]_{u=\alpha}=\left[R(u+\xi)^{n-1}\right]_{u=\beta},$$

alsdann der Werth

$$y=\int_\alpha^\beta \frac{R(u+\xi)^n \partial u}{a u^3+(b-A)u^2+(c-B)u-C}$$

der Gleichung

$$L\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+M\frac{\partial y}{\partial x}+Ny=0 \qquad (d)$$

genügt, wenn L, M, N durch (c), R durch (b) gegeben ist und A, B, C, a, b, c, n beliebige Konstanten sind.

Man setze hier etwa $\xi=x$, so ist $N=A+ax$, $L=\frac{C+(c-B)x+(A-b)x^2+ax^3}{n(n-1)}$, $M=\frac{B+(b-2A)x-2ax^2}{n}$, so dass also der Gleichung

$$\frac{C+(c-B)x+(A-b)x^2+ax^3}{n(n-1)}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+\frac{B+(b-2A)x-2ax^2}{n}\frac{\partial y}{\partial x}+(A+ax)y=0 \qquad (e)$$

genügt wird durch

$$y=\int_\alpha^\beta \frac{R(u+x)^n \partial u}{a u^3+(b-A)u+(c-B)u-C},$$

$$\text{wo } l(R)=(n-1)\int\frac{(au^2+bu+c)\partial u}{-au^3+(A-b)u^2+(B-c)u+C},$$

$$\left[R(u+x)^{n-1}\right]_{u=\alpha}=\left[R(u+x)^{n-1}\right]_{u=\beta}.$$

Man setze nun spezieller noch in (e): $a=0$, $\frac{C}{n(n-1)}=a_2$, $\frac{c-B}{n(n-1)}=b_2$, $\frac{A-b}{n(n-1)}=c_2$, $\frac{B}{n}=a_1$, $\frac{b-2A}{n}=b_1$, $A=a_0$, so ist $C=n(n-1)a_2$, $A=a_0$, $b=nb_1+2a_0$, $B=na_1$, $c=n(n-1)b_2+na_1$, so dass wegen $A-b=n(n-1)c_2$ auch noch

$$n(n-1)c_2+nb_1+a_0=0$$

seyn muss. Bestimmt man hieraus n, so sind a_0, a_1, a_2, b_1, b_2, c_2 ganz beliebige Grössen, und man kann also sagen, dass der Gleichung

$$(a_2+b_2x+c_2x^2)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+(a_1+b_1x)\frac{\partial y}{\partial x}+a_0y=0 \qquad (f)$$

genügt wird durch

$$y=\int_\alpha^\beta \frac{R(u+x)^n \partial u}{c_2u^2-b_2u+a_2},$$

$$\text{wenn} \qquad l(R)=\frac{1}{n}\int\frac{(nb_1+2a_0)u+n(n-1)b_2+na_1}{c_2u^2-b_2u+a_2},\quad n(n-1)c_2+nb_1+a_0=0,$$

$$\left[R(u+x)^{n-1}\right]_{u=\alpha}=\left[R(u+x)^{n-1}\right]_{u=\beta},$$

wo wir die konstanten Faktoren von y gleich weggelassen haben.

Die Grösse n darf nicht Null seyn, wenn a_0 es nicht ist, da sonst R nicht bestimmbar wäre. So lange aber a_0 von Null verschieden, ist es auch n. Für $c_2=b_1=0$ ist n nicht bestimmbar; alsdann gehört aber auch (f) nicht hieher, sondern zu §. 77.

Auf die Gleichung (f) kommt die folgende Gleichung zurück:

$$(x-1)\,x^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+(ax+b)\,x\frac{\partial y}{\partial x}+(cx+d)\,y=0. \qquad (g)$$

Denn setzt man $y=x^n z$, also $\frac{\partial y}{\partial x}=n x^{n-1} z+x^n\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=n(n-1)x^{n-2}z$ $+2nx^{n-1}\frac{\partial z}{\partial x}+x^n\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, so erhält man nach Weglassung des gemeinschaftlichen Faktors x^n:

$$x^2(x-1)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+[2nx(x-1)+(ax+b)x]\frac{\partial z}{\partial x}+[n(n-1)(x-1)+(ax+b)n+cx+d]\,z=0,$$

so dass, wenn man n aus der Gleichung

$$n(n-1)-nb-d=0$$

bestimmt, man die ganze Gleichung durch x dividiren kann und erhält:

$$x(x-1)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+[(2n+a)x+b-2n]\frac{\partial z}{\partial x}+[n(n-1)+an+c]\,z=0,$$

welche Gleichung unmittelbar zu (f) gehört. Die Bestimmung von n ist immer möglich. Die Gleichung

$$(x-h)\,x^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+(ax+b)\,x\frac{\partial y}{\partial x}+(cx+d)\,y=0 \qquad (g')$$

kommt auf (g) zurück, wenn man $x=hu$ setzt.

Ferner reduzirt sich die Gleichung

$$(x-h)^2\,x\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+(ax+b)(x-h)\frac{\partial y}{\partial x}+(cx+d)\,y=0 \qquad (h)$$

auf (g), wenn man $x=h(1-u)$, also $\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{h}\frac{\partial y}{\partial u}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{1}{h^2}\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}$ setzt, wodurch erhalten wird:

$$hu^2(1-u)\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}-[ah(1-u)+b]\,u\frac{\partial y}{\partial u}+[ch(1-u)+d]\,y=0,$$

$$(u-1)\,u^2\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}+\left[-au+\left(a+\frac{b}{h}\right)\right]u\frac{\partial y}{\partial u}+\left[cu-\frac{d}{h}-c\right]y=0.$$

Endlich kann die Gleichung

$$(x-h)^2x^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+(ax+b)(x-h)\,x\frac{\partial y}{\partial x}+(cx^2+dx+f)\,y=0 \qquad (i)$$

auf die Form von (h) zurückgeführt werden. Man setze nämlich $y=x^n z$, so erhält man, nach Weglassung von x^n:

$$(x-h)^2x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+[2nx(x-h)^2+(ax+h)(x-h)x]\frac{\partial z}{\partial x}+[n(n-1)(x-h)^2$$
$$+(ax+b)(x-h)n+cx^2+dx+f]\,z=0,$$

so dass, wenn man n aus der Gleichung

$$n(n-1)h^2-bhn+f=0$$

bestimmt, man durch x dividiren kann und sofort die Form (h) erhält.

Für $h=0$ lässt sich n hieraus nicht bestimmen. Alsdann setze man $x=\frac{1}{u}$, $\frac{\partial y}{\partial x}=-u^2\frac{\partial y}{\partial u}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=2u^3\frac{\partial y}{\partial u}+u^4\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}$, und erhält:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}+\left[\frac{2}{u}-\left(\frac{a}{u}+b\right)\right]\frac{\partial y}{\partial u}+\left(\frac{c}{u^2}+\frac{d}{u}+f\right)y=0,$$

d. h. $$u^2\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}+[2-a-bu]\,u\frac{\partial y}{\partial u}+(c+du+fu^2)\,y=0,$$

welche Gleichung zu §. 78 gehört.

II. Sey

$$y=\int_\alpha^\beta U e^{nu\xi}\partial u,$$

wo ξ eine bekannte Funktion von x, U eine noch unbekannte Funktion von u ist, so ist

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\int_\alpha^\beta U e^{nu\xi} nu\frac{\partial \xi}{\partial x}\partial u,\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\int_\alpha^\beta U e^{nu\xi}\left[n^2u^2\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2+nu\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}\right]\partial u,$$

also $$L\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+M\frac{\partial y}{\partial x}+Ny=\int_\alpha^\beta U e^{nu\xi}\left[Ln^2u^2\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2+Lnu\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}+Mnu\frac{\partial \xi}{\partial x}+N\right]\partial u,$$

so dass, wenn man das unbestimmte Integral der zweiten Seite $=Re^{nu\xi}$ setzt:

$$U\left[Ln^2u^2\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2+Lnu\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}+Mnu\frac{\partial \xi}{\partial x}+N\right]=\frac{\partial R}{\partial u}+n\xi R$$

seyn muss. Ist also

$$Ln^2\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2=A+a\xi,\ Ln\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}+Mn\frac{\partial \xi}{\partial x}=B+b\xi,\ N=C+c\xi,$$

so ist $$U[(A+a\xi)u^2+(B+b\xi)u+C+c\xi]=\frac{\partial R}{\partial u}+n\xi R,$$

und also $$U(Au^2+Bu+C)=\frac{\partial R}{\partial u},\ U(au^2+bu+c)=nR,$$

woraus $$\frac{1}{R}\frac{\partial R}{\partial u}=\frac{n(Au^2+Bu+C)}{au^2+bu+c},\ l(R)=n\int\frac{Au^2+Bu+C}{au^2+bu+c}\partial u,$$

und dann $$U=\frac{nR}{au^2+bu+c}.$$

Bestimmt man dann α und β so, dass

$$(Re^{nu\xi})_\beta=(Re^{nu\xi})_\alpha,$$

so ist das bestimmte Integral Null, und man hat somit den Satz:

Der Gleichung

$$L\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+M\frac{\partial y}{\partial x}+Ny=0$$

genügt $$y=\int_\alpha^\beta\frac{Re^{nu\xi}}{au^2+bu+c}\partial u,$$

wenn $$L=\frac{A+a\xi}{n^2\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2},\ M=\frac{B+b\xi-nL\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}}{n\frac{\partial \xi}{\partial x}},\ N=C+c\xi,\ l(R)=n\int\frac{Au^2+Bu+C}{au^2+bu+c}\partial u.$$

Setzt man hier $\xi=x$, $n=1$, so gelangt man auf §. 77. Setzt man $\xi=x^2$, so ist

$$L=\frac{A+ax^2}{4n^2x^2},\ M=\frac{-A+(2nB-a)x^2+2nbx^4}{4n^2x^3},\ N=C+cx^2.$$

Ist hier $A=0$, $n=\frac{1}{2}$, $a=1$, also

$$L=1,\ M=\frac{(B-1)+bx^2}{x},\ N=C+cx^2,$$

und setzt man $B-1=a_1$, $b=b_1$, $C=a_2$, $c=b_2$, so folgt hieraus, dass der Gleichung

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+\frac{(a_1+b_1x^2)}{x}\frac{\partial y}{\partial x}+(a_2+b_2x^2)y=0$$

genügt wird durch

$$y=\int_\alpha^\beta \frac{Re^{\frac{1}{2}ux^2}\partial u}{u^2+b_1u+b_2},\ l(R)=\frac{1}{2}\int\frac{(a_1+1)u+a_2}{u^2+b_1u+b_2}\partial u,\ (Re^{\frac{1}{2}ux^2})_\beta=(Re^{\frac{1}{2}ux^2})_\alpha.$$

Setzt man eben so $\xi=\frac{1}{x}$, so ist $L=\frac{(Ax+a)x^2}{n^2}$, $M=-\frac{bx}{n}+\frac{2a-nB}{n^2}x^2+\frac{2Ax^3}{n^2}$, $N=\frac{Cx+c}{x}$, und wenn etwa $A=0$, $n=1$, $a=1$, $b=-a_1$, $2-B=b_1$, $C=b_2$, $c=a_2$, so hat man:

Der Gleichung

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+\frac{a_1+b_1x}{x^2}\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{a_2+b_2x}{x^4}y=0$$

genügt

$$y=\int_\alpha^\beta\frac{Re^{\frac{u}{x}}\partial u}{u^2-a_1u+a_2},\quad l(R)=\int\frac{(2-b_1)u+b_2}{u^2-a_1u+a_2}\partial u,\ (Re^{\frac{u}{x}})_\beta=(Re^{\frac{u}{x}})_\alpha.$$

(Vergl. auch I, (i) für $h=0$.)

III. Sey

$$y=\zeta\int_\alpha^\beta e^{u\xi}U\partial u,$$

wo ζ, ξ bekannte Funktionen von x, so ist

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\int_\alpha^\beta e^{u\xi}U\left[\frac{\partial\zeta}{\partial x}+u\zeta\frac{\partial\xi}{\partial x}\right]\partial u,\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\int_\alpha^\beta e^{u\xi}U\left[\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}+2u\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\zeta}{\partial x}+u^2\zeta\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2+u\zeta\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}\right]\partial u,$$

also $L\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+M\frac{\partial y}{\partial x}+Ny=$

$$\int_\alpha^\beta e^{u\xi}U\left[L\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}+2Lu\frac{\partial\zeta}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial x}+Lu^2\zeta\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2+Lu\zeta\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+M\frac{\partial\zeta}{\partial x}+Mu\zeta\frac{\partial\xi}{\partial x}+N\zeta\right]\partial u,$$

und wenn man das unbestimmte Integral $=e^{u\xi}R$ setzt:

$$U\left[L\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}+2Lu\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\zeta}{\partial x}+Lu^2\zeta\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2+Lu\zeta\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+M\frac{\partial\zeta}{\partial x}+Mu\zeta\frac{\partial\xi}{\partial x}+N\zeta\right]=\frac{\partial R}{\partial u}+\xi R,$$

so dass, wenn

$$\zeta\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2L=A+a\xi,\ 2L\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\zeta}{\partial x}+L\zeta\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}+M\zeta\frac{\partial\xi}{\partial x}=B+b\xi,\ L\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}+M\frac{\partial\zeta}{\partial x}+N\zeta=C+c\xi,$$

und

$$U[Au^2+Bu+C]=\frac{\partial R}{\partial u},\ U[au^2+bu+c]=R,$$

man hat

$$l(R)=\int\frac{Au^2+Bu+C}{au^2+bu+c}\partial u,\quad U=\frac{R}{au^2+bu+c},$$

und wenn dann α und β so bestimmt werden, dass die Grösse $e^{u\xi}R$ für $u=\alpha$ und $u=\beta$ denselben Werth gibt, so genügt $y=\zeta\int_\alpha^\beta e^{u\xi}U\partial u$ der Gleichung $L\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+M\frac{\partial y}{\partial x}+Ny=0$, wo

$$L=\frac{A+a\xi}{\zeta\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2},\ M=\frac{B+b\xi-L\left(2\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\zeta}{\partial x}+\zeta\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}\right)}{\zeta\frac{\partial\xi}{\partial x}},\ N=\frac{C+c\xi-\left(L\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}+M\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)}{\zeta},$$

Für $\xi = x$ ist

$$L = \frac{A+ax}{\zeta},\ M = \frac{(B+bx)\zeta - 2(A+ax)\frac{\partial \zeta}{\partial x}}{\zeta^2},$$

$$N = \frac{(C+cx)\zeta^2 - (B+bx)\zeta\frac{\partial \zeta}{\partial x} + 2(A+ax)\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)^2 - (A+ax)\zeta\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}}{\zeta^3},$$

so dass also der Gleichung

$$(A+ax)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{(B+bx)\zeta - 2(A+ax)\frac{\partial \zeta}{\partial x}}{\zeta}\frac{\partial y}{\partial x}$$
$$+ \frac{(C+cx)\zeta^2 - (B+bx)\zeta\frac{\partial \zeta}{\partial x} + 2(A+ax)\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)^2 - (A+ax)\zeta\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}}{\zeta^2}\, y = 0$$

genügt wird durch $y = \zeta\int_\alpha^\beta e^{ux}U\partial u$. Für $\zeta = e^x$ kommt man auf die Form des §. 77; für $\zeta = x$ hat man

$$(A+ax)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{-2A+(B-2a)x+bx^2}{x}\frac{\partial y}{\partial x} + \left[\frac{2A-(B-2a)x+(C-b)x^2+cx^3}{x^2}\right]y = 0.$$

Setzt man dagegen $\zeta = e^{mx^2}$, so ist

$$L = (A+ax)e^{-mx^2},\ M = \{B+(b-4mA)x-4max^2\}\ e^{-mx^2},\ N = \{C-2mA$$
$$+(c-2mB-2am)x+(4Am^2-2mb)x^2+4am^2x^3\}\ e^{-mx^2}$$

also wenn etwa $a = 0$, $A = 1$, $B = a_1$, $b - 4m = b_1$, $C - 2m = a_0$, $c - 2ma_1 = b_0$, $4m^2 - 2mb = c_0$, so dass also m derart bestimmt werden muss, dass

$$4m^2 + 2mb_1 + c_0 = 0$$

so wird die Gleichung

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + (a_1 + b_1 x)\frac{\partial y}{\partial x} + (a_0 + b_0 x + c_0 x^2)y = 0$$

integrirt werden durch

$$y = e^{mx^2}\int_\alpha^\beta \frac{e^{ux}R\partial u}{(b_1+4m)u+2ma_1+b_0},\quad l(R) = \int\frac{u^2+a_1u+2m+a_0}{(b_1+4m)u+2ma_1+b_0}\partial u,$$
$$(e^{ux}R)_\beta = (e^{ux}R)_\alpha.$$

§. 80.

Wir haben seither nur die linearen Differentialgleichungen ohne zweiten Theil (§. 74) betrachtet; die Integration dieser Gleichungen mit zweitem Theile lässt sich aber ganz leicht auf das im Seitherigen Angegebene zurückführen. Gesetzt nämlich, es sey die Gleichung

$$X_0\frac{\partial^n y}{\partial x^n} + X_1\frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}} + \ldots + X_{n-1}\frac{\partial y}{\partial x} + X_n y = X \qquad (a)$$

vorgelegt, in welcher $X_0, X_1, \ldots, X_n$, X bekannte Funktionen von x sind, und man habe als allgemeines Integral der Gleichung

$$X_0\frac{\partial^n y}{\partial x^n} + X_1\frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}} + \ldots + X_{n-1}\frac{\partial y}{\partial x} + X_n y = 0 \qquad (b)$$

gefunden (§. 74):

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n, \qquad (c)$$

wo $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ebenfalls bekannte Funktionen von x sind, so lässt sich hieraus immer das allgemeine Integral der Gleichung (a) finden. Denken wir uns nämlich, in der Gleichung (c) bedeuten einmal $C_1, C_2, \ldots, C_n$ nicht mehr Konstanten, sondern (noch unbekannte) Funktionen von x, während $y_1, \ldots, y_n$ immer noch Funktionen von x sind, die so beschaffen sind, dass

$$\left.\begin{array}{l} X_0 \frac{\partial^n y_1}{\partial x^n} + X_1 \frac{\partial^{n-1} y_1}{\partial x^{n-1}} + \ldots + X_{n-1} \frac{\partial y_1}{\partial x} + X_n y_1 = 0, \\ \quad \vdots \\ X_0 \frac{\partial^n y_n}{\partial x^n} + X_1 \frac{\partial^{n-1} y_n}{\partial x^{n-1}} + \ldots + X_{n-1} \frac{\partial y_n}{\partial x} + X_n y_n = 0; \end{array}\right\} (d)$$

ferner wollen wir nunmehr versuchen, $C_1, C_2, \ldots, C_n$ als Funktionen von x so zu bestimmen, dass (c) auch der Gleichung (a) genüge. Aus (c) folgt, unter den jetzigen Voraussetzungen:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = C_1 \frac{\partial y_1}{\partial x} + C_2 \frac{\partial y_2}{\partial x} + \ldots + C_n \frac{\partial y_n}{\partial x} + y_1 \frac{\partial C_1}{\partial x} + y_2 \frac{\partial C_2}{\partial x} + \ldots + y_n \frac{\partial C_n}{\partial x},$$

und wenn wir nun $C_1, \ldots, C_n$ so bestimmen, dass

$$y_1 \frac{\partial C_1}{\partial x} + y_2 \frac{\partial C_2}{\partial x} + \ldots + y_n \frac{\partial C_n}{\partial x} = 0, \qquad (e_1)$$

so ist

$$\frac{\partial y}{\partial x} = C_1 \frac{\partial y_1}{\partial x} + C_2 \frac{\partial y_2}{\partial x} + \ldots + C_n \frac{\partial y_n}{\partial x}. \qquad (f_1)$$

Hieraus folgt

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = C_1 \frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} + C_2 \frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2} + \ldots + C_n \frac{\partial^2 y_n}{\partial x^2}, \qquad (f_2)$$

wenn wir $C_1, \ldots, C_n$ so bestimmen, dass

$$\frac{\partial y_1}{\partial x}\frac{\partial C_1}{\partial x} + \frac{\partial y_2}{\partial x}\frac{\partial C_2}{\partial x} + \ldots + \frac{\partial y_n}{\partial x}\frac{\partial C_n}{\partial x} = 0. \qquad (e_2)$$

Aus (f_2) folgt wieder

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = C_1 \frac{\partial^3 y_1}{\partial x^3} + C_2 \frac{\partial^3 y_2}{\partial x^3} + \ldots + C_n \frac{\partial^3 y_n}{\partial x^3}, \qquad (f_3)$$

wenn $C_1, \ldots, C_n$ der Gleichung

$$\frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2}\frac{\partial C_1}{\partial x} + \frac{\partial^2 y_2}{\partial x^2}\frac{\partial C_2}{\partial x} + \ldots + \frac{\partial^2 y_n}{\partial x^2}\frac{\partial C_n}{\partial x} = 0 \qquad (e_3)$$

genügen. Wie man so weiter gehen kann, ist klar. Man hat

$$\frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}} = C_1 \frac{\partial^{n-1} y_1}{\partial x^{n-1}} + C_2 \frac{\partial^{n-1} y_2}{\partial x^{n-1}} + \ldots + C_n \frac{\partial^{n-1} y_n}{\partial x^{n-1}}, \qquad (f_{n-1})$$

wenn wieder

$$\frac{\partial^{n-2} y_1}{\partial x^{n-2}}\frac{\partial C_1}{\partial x} + \frac{\partial^{n-2} y_2}{\partial x^{n-2}}\frac{\partial C_2}{\partial x} + \ldots + \frac{\partial^{n-2} y_n}{\partial x^{n-2}}\frac{\partial C_n}{\partial x} = 0. \qquad (e_{n-1})$$

Aus (f_{n-1}) folgt endlich

$$\frac{\partial^n y}{\partial x^n} = C_1 \frac{\partial^n y_1}{\partial x^n} + C_2 \frac{\partial^n y_2}{\partial x^n} + \ldots + C_n \frac{\partial^n y_n}{\partial x^n} + \frac{\partial^{n-1} y_1}{\partial x^{n-1}} \frac{\partial C_1}{\partial x} + \frac{\partial^{n-1} y_2}{\partial x^{n-1}} \frac{\partial C_2}{\partial x} + \ldots \ldots + \frac{\partial^{n-1} y_n}{\partial x^{n-1}} \frac{\partial C_n}{\partial x},$$

und wenn man die Werthe von $\frac{\partial y}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^n y}{\partial x^n}$, wie sie diese Gleichungen geben, in (a) einsetzt, dabei aber die Gleichungen (d) beachtet, so erhält man

$$X_0 \left[\frac{\partial^{n-1} y_1}{\partial x^{n-1}} \frac{\partial C_1}{\partial x} + \frac{\partial^{n-1} y_2}{\partial x^{n-1}} \frac{\partial C_2}{\partial x} + \ldots + \frac{\partial^{n-1} y_n}{\partial x^{n-1}} \frac{\partial C_n}{\partial x} \right] = X. \qquad (e_n)$$

Daraus folgt nun, dass wenn man $C_1, \ldots, C_n$ als Funktionen von x durch die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}
&y_1 \frac{\partial C_1}{\partial x} + y_2 \frac{\partial C_2}{\partial x} + \ldots + y_n \frac{\partial C_n}{\partial x} = 0, \\
&\frac{\partial y_1}{\partial x} \frac{\partial C_1}{\partial x} + \frac{\partial y_2}{\partial x} \frac{\partial C_2}{\partial x} + \ldots + \frac{\partial y_n}{\partial x} \frac{\partial C_n}{\partial x} = 0, \\
&\vdots \\
&\frac{\partial^{n-2} y_1}{\partial x^{n-2}} \frac{\partial C_1}{\partial x} + \frac{\partial^{n-2} y_2}{\partial x^{n-2}} \frac{\partial C_2}{\partial x} + \ldots + \frac{\partial^{n-2} y_n}{\partial x^{n-2}} \frac{\partial C_n}{\partial x} = 0, \\
&\frac{\partial^{n-1} y_1}{\partial x^{n-1}} \frac{\partial C_1}{\partial x} + \frac{\partial^{n-1} y_2}{\partial x^{n-1}} \frac{\partial C_2}{\partial x} + \ldots + \frac{\partial^{n-1} y_n}{\partial x^{n-1}} \frac{\partial C_n}{\partial x} = \frac{X}{X_0}
\end{aligned}\right\} \quad (e)$$

bestimmt, alsdann die Gleichung (c) der (a) genügen wird. Aus (e) folgt aber immer unzweideutig

$$\frac{\partial C_1}{\partial x} = \xi_1, \quad \frac{\partial C_2}{\partial x} = \xi_2, \ldots\ldots, \frac{\partial C_n}{\partial x} = \xi_n, \qquad (e')$$

wenn $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ (bekannte) Funktionen von x sind, während nun aus (e′) folgt:

$$C_1 = \int \xi_1 \partial x + E_1, \quad C_2 = \int \xi_2 \partial x + E_2, \ldots C_n = \int \xi_n \partial x + E_n,$$

wo $E_1, \ldots, E_n$ willkürliche Konstanten sind; so dass der (a) genügt wird durch

$$y = y_1 \left(\int \xi_1 \partial x + E_1 \right) + y_2 \left(\int \xi_2 \partial x + E_2 \right) + \ldots + y_n \left(\int \xi_n \partial x + E_n \right), \qquad (g)$$

welche Gleichung, da sie n willkürliche Konstanten enthält, das allgemeine Integral von (a) vorstellt.

Gesetzt aber, man kenne nicht das allgemeine Integral von (b), sondern blos n — 1 besondere Werthe: $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$, die der Gleichung (b) genügen, so dass also

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_{n-1} y_{n-1} \qquad (h)$$

zwar wohl der (b) genügt, aber eine Konstante zu wenig hat, um das allgemeine Integral dieser Gleichung zu seyn. Lässt man wieder $C_1, \ldots, C_{n-1}$ Funktionen von x seyn, und setzt die Gleichungen $(e_1), (e_2), \ldots, (e_{n-2})$, d. h. die $n-2$ ersten Gleichungen von (e) fest, in denen jedoch C_n fehle, so hat man

$$\frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}} = C_1 \frac{\partial^{n-1} y_1}{\partial x^{n-1}} + \ldots + C_{n-1} \frac{\partial^{n-1} y_{n-1}}{\partial x^{n-1}} + \frac{\partial^{n-2} y_1}{\partial x^{n-2}} \frac{\partial C_1}{\partial x} + \ldots + \frac{\partial^{n-2} y_{n-1}}{\partial x^{n-2}} \frac{\partial C_{n-1}}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^n y}{\partial x^n} = C_1 \frac{\partial^n y_1}{\partial x^n} + \ldots + C_{n-1} \frac{\partial^n y_{n-1}}{\partial x^n} + 2\left(\frac{\partial^{n-1} y_1}{\partial x^{n-1}} \frac{\partial C_1}{\partial x} + \ldots + \frac{\partial^{n-1} y_{n-1}}{\partial x^{n-1}} \frac{\partial C_{n-1}}{\partial x}\right)$$
$$+ \frac{\partial^{n-2} y_1}{\partial x^{n-2}} \frac{\partial^2 C_1}{\partial x} + \ldots + \frac{\partial^{n-2} y_{n-1}}{\partial x^{n-2}} \frac{\partial^2 C_{n-1}}{\partial x^2},$$

und wenn man dann diese Werthe in (a) einsetzt, dabei die Gleichungen (d) beachtet, so folgt, dass (h) der (a) genügen werde, wenn $C_1, \ldots C_{n-1}$ so bestimmt werden, dass:

$$\left.\begin{aligned}
&y_1 \frac{\partial C_1}{\partial x} + y_2 \frac{\partial C_2}{\partial x} + \ldots + y_{n-1} \frac{\partial C_{n-1}}{\partial x} = 0,\\
&\frac{\partial y_1}{\partial x} \frac{\partial C_1}{\partial x} + \frac{\partial y_2}{\partial x} \frac{\partial C_2}{\partial x} + \ldots + \frac{\partial y_{n-1}}{\partial x} \frac{\partial C_{n-1}}{\partial x} = 0,\\
&\qquad\vdots\\
&\frac{\partial^{n-3} y_1}{\partial x^{n-3}} \frac{\partial C_1}{\partial x} + \frac{\partial^{n-3} y_2}{\partial x^{n-3}} \frac{\partial C_2}{\partial x} + \ldots + \frac{\partial^{n-3} y_{n-1}}{\partial x^{n-3}} \frac{\partial C_{n-1}}{\partial x} = 0,\\
&X_1 \left[\frac{\partial^{n-2} y_1}{\partial x^{n-2}} \frac{\partial C_1}{\partial x} + \ldots + \frac{\partial^{n-2} y_{n-1}}{\partial x^{n-2}} \frac{\partial C_{n-1}}{\partial x}\right] + 2X_0 \left[\frac{\partial^{n-1} y_1}{\partial x^{n-1}} \frac{\partial C_1}{\partial x} + \ldots\right.\\
&\left. + \frac{\partial^{n-1} y_{n-1}}{\partial x^{n-1}} \frac{\partial C_{n-1}}{\partial x}\right] + X_0 \left[\frac{\partial^{n-2} y_1}{\partial x^{n-2}} \frac{\partial^2 C_1}{\partial x^2} + \ldots + \frac{\partial^{n-2} y_{n-1}}{\partial x^{n-2}} \frac{\partial^2 C_{n-1}}{\partial x^2}\right] = X.
\end{aligned}\right\} \quad (i)$$

Aus den $n-2$ ersten Gleichungen (i) folgt

$$\frac{\partial C_2}{\partial x} = \zeta_2 \frac{\partial C_1}{\partial x}, \quad \frac{\partial C_3}{\partial x} = \zeta_3 \frac{\partial C_1}{\partial x}, \ldots\ldots, \frac{\partial C_{n-1}}{\partial x} = \zeta_{n-1} \frac{\partial C_1}{\partial x}, \qquad (k)$$

wo $\zeta_2, \ldots, \zeta_{n-1}$ bekannte Funktionen von x sind; setzt man nun diese Werthe in die letzte Gleichung (i) ein, so erhält man eine Gleichung

$$Q \frac{\partial^2 C_1}{\partial x^2} + P \frac{\partial C_1}{\partial x} = X, \qquad (l)$$

in der P und Q bekannte Funktionen von x sind. Kann man (l) allgemein mit zwei willkürlichen Konstanten integriren, so geben dann (k) die $C_2, \ldots, C_{n-1}$ mit weiteren $n-2$ willkürlichen Konstanten, und (h) gibt das allgemeine Integral von (a). Für $X=0$ gäbe die (l):

$$\frac{\frac{\partial^2 C_1}{\partial x^2}}{\frac{\partial C_1}{\partial x}} = -\frac{P}{Q}, \; l\left(\frac{\partial C_1}{\partial x}\right) = -\int \frac{P}{Q} \partial x + E, \; C_1 = E \int e^{-\int \frac{P}{Q} \partial x} \partial x + E',$$

wie bereits in §. 74 gefunden. (Es ist nämlich $X_1 y_1 \frac{\partial C_1}{\partial x} + 2X_0 \frac{\partial y_1}{\partial x} \frac{\partial C_1}{\partial x} +$ $X_0 y_1 \frac{\partial^2 C_1}{\partial x^2} = 0$, $Q = X_0 y_1$, $P = X_1 y_1 + 2X_0 \frac{\partial y_1}{\partial x}$, $\int \frac{P}{Q} \partial x = \int \left(\frac{X_1}{X_0} + \frac{2}{y_1} \frac{\partial y_1}{\partial x}\right) \partial x$ $= l(y_1^{\,2}) + \int \frac{X_1}{X_0} \partial x$, $e^{-\int \frac{P}{Q} x} = \frac{e^{-\int \frac{X_1}{X_0} x}}{y_1^{\,2}}$).

Man sieht leicht, dass wenn man nur $n-2$ besondere Werthe: $y_1, \ldots,$ y_{n-2} kennen würde, die der Gleichung (b) genügen, man das allgemeine Integral von (a) erhalten würde, wenn man die Gleichungen annähme:

$$
\left.\begin{aligned}
& y_1 \frac{\partial C_1}{\partial x} + y_2 \frac{\partial C_2}{\partial x} + \ldots + y_{n-2} \frac{\partial C_{n-2}}{\partial x} = 0, \\
& \vdots \\
& \frac{\partial^{n-4} y_1}{\partial x^{n-4}} \frac{\partial C_1}{\partial x} + \ldots + \frac{\partial^{n-4} y_{n-2}}{\partial x^{n-4}} \frac{\partial C_{n-2}}{\partial x} = 0, \\
& X_3 \left[\frac{\partial^{n-3} y_1}{\partial y^{n-3}} \frac{\partial C_1}{\partial x} + \ldots + \frac{\partial^{n-3} y_{n-2}}{\partial x^{n-3}} \frac{\partial C_{n-2}}{\partial x}\right] + 2X_1 \left[\frac{\partial^{n-2} y_1}{\partial x^{n-2}} \frac{\partial C_1}{\partial x} + \ldots\ldots\ldots\right. \\
& \left. + \frac{\partial^{n-2} y_{n-2}}{\partial x^{n-2}} \frac{\partial C_{n-2}}{\partial x}\right] + X_1 \left[\frac{\partial^{n-3} y_1}{\partial x^{n-3}} \frac{\partial^2 C_1}{\partial x^2} + \ldots\ldots + \frac{\partial^{n-3} y_{n-2}}{\partial x^{n-3}} \frac{\partial^2 C_{n-2}}{\partial x^2}\right] \\
& + 3X_0 \left[\frac{\partial^{n-1} y_1}{\partial x^{n-1}} \frac{\partial C_1}{\partial x} + \ldots + \frac{\partial^{n-1} y_{n-2}}{\partial x^{n-1}} \frac{\partial C_{n-2}}{\partial x}\right] + 3X_0 \left[\frac{\partial^{n-2} y_1}{\partial x^{n-2}} \frac{\partial^2 C_1}{\partial x^2} + \ldots\ldots\right. \\
& \left. + \frac{\partial^{n-2} y_{n-2}}{\partial x^{n-2}} \frac{\partial^2 C_{n-2}}{\partial x^2}\right] + X_0 \left[\frac{\partial^{n-3} y_1}{\partial x^{n-3}} \frac{\partial^3 C_1}{\partial x^3} + \ldots + \frac{\partial^{n-3} y_{n-2}}{\partial x^{n-3}} \frac{\partial^3 C_{n-2}}{\partial x^3}\right] = X,
\end{aligned}\right\} \quad (m)
$$

woraus zunächst folgt:

$$\frac{\partial C_2}{\partial x} = \zeta_2 \frac{\partial C_1}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial C_{n-2}}{\partial x} = \zeta_{n-2} \frac{\partial C_1}{\partial x}, \qquad (n)$$

und dann

$$P \frac{\partial^3 C_1}{\partial x^3} + Q \frac{\partial^2 C_1}{\partial x^2} + R \frac{\partial C_1}{\partial x} = X. \qquad (n')$$

Ist aus (n′) C_1 mit drei Konstanten erhalten, so folgen $C_2, \ldots, C_{n-2}$ aus (n) mit weiteren $n-3$ Konstanten und

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots C_{n-2} y_{n-2}$$

gibt das allgemeine Integral von (a). Wie man diese Betrachtungen weiter fortsetzen kann, ist klar. Eben so, wenn $X = 0$, dass die (l), (n′)... dazu dienen werden, aus $n-1$, oder $n-2\ldots$ besonderen Werthen von y, das allgemeine Integral von (b) zu finden.

§. 81.

Wir wollen nun vor Allem die Methode des §. 80 auf eine Reihe von Beispielen anwenden.

1.) $$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + A \frac{\partial y}{\partial x} + By = X.$$

wenn A, B Konstanten. Hier ist (§. 75): $y_1 = e^{m_1 x}$, $y_2 = e^{m_2 x}$, wenn m_1, m_2 die Wurzeln von $m^2 + Am + B = 0$ sind, vorausgesetzt diese Wurzeln seyen ungleich; sind sie gleich, so ist $y_1 = e^{mx}$, $y_2 = x e^{mx}$. Also sind die (e):

$$e^{m_1 x}\frac{\partial C_1}{\partial x} + e^{m_2 x}\frac{\partial C_2}{\partial x} = 0,\ m_1 e^{m_1 x}\frac{\partial C_1}{\partial x} + m_2 e^{m_2 x}\frac{\partial C_2}{\partial x} = X;$$

$$\frac{\partial C_1}{\partial x} = \frac{X e^{-m_1 x}}{m_1 - m_2},\ \frac{\partial C_2}{\partial x} = \frac{X e^{-m_2 x}}{m_2 - m_1};\ C_1 = \frac{1}{m_1 - m_2}\int X e^{-m_1 x}\partial x + E_1,$$

$$C_2 = \frac{1}{m_2 - m_1}\int X e^{-m_2 x}\partial x + E_2;$$

$$y = \frac{1}{m_1 - m_2}\left[e^{m_1 x}\int X e^{-m_1 x}\partial x - e^{m_2 x}\int X e^{-m_2 x}\partial x\right] + E_1 e^{m_1 x} + E_2 e^{m_2 x}.$$

Für $m_1 = m_2$ ist

$$e^{mx}\frac{\partial C_1}{\partial x} + x e^{mx}\frac{\partial C_2}{\partial x} = 0,\ m e^{mx}\frac{\partial C_1}{\partial x} + (1 + mx) e^{mx}\frac{\partial C_2}{\partial x} = X;$$

$$\frac{\partial C_1}{\partial x} = -x X e^{-mx},\ \frac{\partial C_2}{\partial x} = X e^{-mx};\ C_1 = -\int x X e^{-mx}\partial x + E_1;\ C_2 = \int X e^{-mx}\partial x + E_2;$$

$$y = (E_1 + E_2 x) e^{mx} - e^{mx}\int x X e^{-mx}\partial x + x e^{mx}\int X e^{-mx}\partial x.$$

2.) $$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + y = \cos x.$$

$y_1 = \cos x$, $y_2 = \sin x$ (§. 75, II); also

$$\cos x\frac{\partial C_1}{\partial x} + \sin x\frac{\partial C_2}{\partial x} = 0,\ -\sin x\frac{\partial C_1}{\partial x} + \cos x\frac{\partial C_2}{\partial x} = \cos x;$$

$$\frac{\partial C_1}{\partial x} = -\cos x \sin x,\ \frac{\partial C_2}{\partial x} = \cos^2 x,\ C_1 = -\int \sin x \cos x\,\partial x = -\tfrac{1}{2}\sin^2 x + E_1,$$

$$C_2 = \tfrac{1}{2}\sin x \cos x + \tfrac{1}{2}x + E_2,$$

also

$$y = -\tfrac{1}{2}\sin^2 x \cos x + \tfrac{1}{2}\sin^2 x \cos x + \tfrac{1}{2}x \sin x + E_1 \cos x + E_2 \sin x = \tfrac{1}{2}x\sin x + E_1\cos x + E_2 \sin x.$$

3.) $$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{x}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{1}{x^2}y = \frac{1}{x}.$$

$y_1 = x$, $y_2 = x\,l(x)$ (§. 74, Nr. 1, oder §. 76, Nr. 1).

$$x\frac{\partial C_1}{\partial x} + x\,l(x)\frac{\partial C_2}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial C_1}{\partial x} + [l(x) + 1]\frac{\partial C_2}{\partial x} = \frac{1}{x};$$

$$\frac{\partial C_1}{\partial x} = \frac{-l(x)}{x},\ \frac{\partial C_2}{\partial x} = \frac{1}{x};\ C_1 = -\frac{1}{2}[l(x)]^2 + E_1,\ C_2 = l(x) + E_2;$$

$$y = -\frac{x}{2}l(x)^2 + x\,l(x)^2 + E_1 x + E_2 x\,l(x) = \frac{1}{2}x\,l(x)^2 + E_1 x + E_2 x\,l(x). *$$

4.) $$x^3\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} - 3x^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + 6x\frac{\partial y}{\partial x} - 6y = x.$$

$y_1 = x$, wie man leicht sieht; also nach (m), wenn dort $n = 3$, $y_1 = x$, $X_2 = 6x$, $X_1 = -3x^2$, $X_0 = x^3$, $X = x$:

$$6x \cdot x\frac{\partial C_1}{\partial x} - 6x^2\frac{\partial C_1}{\partial x} - 3x^2 \cdot x\frac{\partial^2 C_1}{\partial x^2} + 3x^3\frac{\partial^2 C_1}{\partial x^2} + x^3 \cdot x\frac{\partial^3 C_1}{\partial x^3} = x,$$

$$\frac{\partial^3 C_1}{\partial x^3} = \frac{1}{x^3},\ C_1 = \frac{1}{2}l(x) + E_1 x^2 + E_2 x + E_3;$$

$$y = \frac{1}{2}x\,l(x) + E_1 x^3 + E_2 x^2 + E_3 x. \quad (\text{§. 74 und §. 76.})$$

* Das Zeichen $l(x)^2$ bedeutet das Quadrat von $l(x)$, ist also zu unterscheiden von $l(x^2)$.

5.) $$x^2[l(x)-1]\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - x\frac{\partial y}{\partial x} + y = -\frac{x}{l(x)}.$$

$y_1 = x$; also in (i) $n=2$, $X_1=-x$, $X_0 = x^2[l(x)-1]$, $X=-\frac{x}{l(x)}$;

$$-x^2\frac{\partial C_1}{\partial x} + 2x^2[l(x)-1]\frac{\partial C_1}{\partial x} + x^3[l(x)-1]\frac{\partial^2 C_1}{\partial x^2} = -\frac{x}{l(x)}.$$

$$\frac{\partial^2 C_1}{\partial x^2} + \frac{2l(x)-3}{x[l(x)-1]}\frac{\partial C_1}{\partial x} = -\frac{1}{x^2[l(x)-1]l(x)}.$$

Setzt man hier $\frac{\partial C_1}{\partial x}=\varphi$, so ist

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{2l(x)-3}{x[l(x)-1]}\varphi = -\frac{1}{x^2 l(x)[l(x)-1]},$$

also (§. 66, I):

$$\varphi = e^{-\int\frac{2l(x)-3}{x[l(x)-1]}\partial x}\left[C-\int\frac{e^{\int\frac{2l(x)-3}{x[l(x)-1]}\partial x}}{x^2 l(x)[l(x)-1]}\partial x\right].$$

Aber $$\int\frac{2l(x)-3}{x[l(x)-1]}\partial x = \int\frac{2\partial x}{x} - \int\frac{\partial x}{x[l(x)-1]} = 2l(x) - l[l(x)-1] = l\left[\frac{x^2}{l(x)-1}\right].$$

$$\varphi = \frac{l(x)-1}{x^2}\left[C-\int\frac{\partial x}{l(x)[l(x)-1]^2}\right].$$

Setzt man $l(x)=z$, $x=e^z$, so ist

$$\int\frac{\partial x}{l(x)[l(x)-1]^2} = \int\frac{e^z\partial z}{z(z-1)^2} = \int\frac{e^z\partial z}{z}+\int\frac{e^z\partial z}{(z-1)^2}-\int\frac{e^z\partial z}{z-1} = \int\frac{e^z\partial z}{z}-\frac{e^z}{z-1}$$
$$+\int\frac{e^z\partial z}{z-1}-\int\frac{e^z\partial z}{z-1}\ (\text{§. } 36) = \frac{-e^z}{z-1}+\int\frac{e^z\partial z}{z} = \frac{-x}{l(x)-1}+\int\frac{\partial x}{l(x)},$$

$$\varphi = C\frac{l(x)-1}{x^2}+\frac{1}{x}-\frac{l(x)-1}{x^2}\int\frac{\partial x}{l(x)},$$

$$C_1 = C\int\frac{l(x)-1}{x^2}\partial x + l(x) - \int\frac{l(x)-1}{x^2}\int\frac{\partial x}{l(x)}\partial x + C'.$$

$$\int\frac{l(x)-1}{x^2}\partial x = -\frac{1}{x}l(x),\quad \int\frac{l(x)-1}{x^2}\int\frac{\partial x}{l(x)}\partial x = -\frac1x l(x)\int\frac{\partial x}{l(x)}+\int\frac1x l(x)\cdot\frac{1}{l(x)}\partial x =$$
$$-\frac1x l(x)\int\frac{\partial x}{l(x)}+l(x),$$

also $$C_1 = -\frac{C}{x}l(x)+\frac1x l(x)\int\frac{\partial x}{l(x)}+C';\quad y=-Cl(x)+C'x+l(x)\int\frac{\partial x}{l(x)}.$$

6.) $$(1+x)^3\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}+(1+x)^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+3(1+x)\frac{\partial y}{\partial x}-8y = \frac{x}{\sqrt{1+x}}.$$

Nach §. 76 ist $A_0=1$, $A_1=1$, $A_2=3$, $A_3=-8$, $a=1$, $b=1$, $n=3$, also
$r(r-1)(r-2)+r(r-1)+3r-8=0$, $r^3-2r^2+4r-8=0$, $r=2, \pm 2i$;
$y_1=(1+x)^2$, $y_2=\cos[l(1+x)^2]$, $y_3=\sin[l(1+x)^2]$, also

$$(1+x)^2\frac{\partial C_1}{\partial x}+\cos l(1+x)^2\frac{\partial C_2}{\partial x}+\sin l(1+x)^2\frac{\partial C_3}{\partial x}=0,$$

$$(1+x)\frac{\partial C_1}{\partial x}-\frac{\sin l(1+x)^2}{1+x}\frac{\partial C_2}{\partial x}+\frac{\cos l(1+x)^2}{1+x}\frac{\partial C_3}{\partial x}=0,$$

$$\frac{\partial C_1}{\partial x}-\frac{2\cos l(1+x)^2-\sin l(1+x)^2}{(1+x)^3}\frac{\partial C_2}{\partial x}-\frac{2\sin l(1+x)^2+\cos l(1+x)^2}{(1+x)^3}\frac{\partial C_2}{\partial x}$$
$$=\frac{x}{2(1+x)^{\frac{7}{2}}},$$

$$\frac{\partial C_1}{\partial x}=\frac{x}{8(1+x)^{\frac{7}{2}}},\ \frac{\partial C_2}{\partial x}=\frac{\sin l(1+x)^2-\cos l(1+x)^2}{8(1+x)^{\frac{3}{2}}}x,\ \frac{\partial C_3}{\partial x}=-\frac{[\sin l(1+x)^2+\cos l(1+x)^2]}{8(1+x)^{\frac{3}{2}}}x,$$

$$C_1=\int\frac{x\,\partial x}{8(1+x)^{\frac{7}{2}}}=\frac{1}{8}\left[-\frac{1+x}{3}+\frac{1}{5}\right]\frac{2}{(1+x)^{\frac{5}{2}}}=-\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{(1+x)^{\frac{3}{2}}}+\frac{1}{20}\cdot\frac{1}{(1+x)^{\frac{5}{2}}}+E_1,$$

$$C_2=\frac{1}{8}\int\frac{\sin l(1+x)^2x\,\partial x}{(1+x)^{\frac{3}{2}}}-\frac{1}{8}\int\frac{\cos l(1+x)^2x\,\partial x}{(1+x)^{\frac{3}{2}}},\ (1+x=e^z),\ \int\frac{\sin l\,(1+x)^2x\,\partial x}{(1+x)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\int\frac{\sin 2z}{e^{\frac{3}{2}z}}(e^z-1)e^z\partial z=\int\sin(2z)\,e^{\frac{1}{2}z}\partial z-\int\sin(2z)\,e^{-\frac{1}{2}z}\partial z=\frac{e^{\frac{1}{2}z}(\frac{1}{2}\sin 2z-2\cos 2z)}{4+\frac{1}{4}}$$

$$-\frac{e^{-\frac{1}{2}z}(-\frac{1}{2}\sin 2z-2\cos 2z)}{4+\frac{1}{4}}\ (\S.\ 43)=\frac{e^{\frac{1}{2}z}(2\sin 2z-8\cos 2z)}{17}+\frac{e^{-\frac{1}{2}z}(2\sin 2z+8\cos 2z)}{17}$$

$$=\frac{(1+x)^{\frac{1}{2}}[2\sin l(1+x)^2-8\cos l(1+x)^2]}{17}+\frac{(1+x)^{-\frac{1}{2}}[2\sin l(1+x)^2+8\cos l(1+x)^2]}{17};$$

bestimmt man die andern Integrale in ähnlicher Weise, so erhält man:

$$C_2=-\frac{(1+x)^{\frac{1}{2}}}{68}[5\cos l(1+x)^2+3\sin l(1+x)^2]+\frac{(1+x)^{-\frac{1}{2}}}{68}[5\sin l(1+x)^2+3\cos l(1+x)^2]$$
$$+E_2,$$

$$C_3=-\frac{(1+x)^{\frac{1}{2}}}{68}[5\sin l(1+x)^2-3\cos l(1+x)^2]+\frac{(1+x)^{-\frac{1}{2}}}{68}[3\sin l(1+x)^2-5\cos l(1+x)^2]$$
$$+E_3.$$

Also $\quad y=C_1(1+x)^2+C_2\cos l(1+x)^2+C_3\sin l\,(1+x)^2$
$$=E_1(1+x)^2+E_2\cos l(1+x)^2+E_3\sin l(1+x)^2-\frac{8}{51}\sqrt{1+x}+\frac{8}{85\sqrt{1+x}}.\ *$$

7.) Man soll die Gleichung

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}-\frac{4}{x}\frac{\partial y}{\partial x}+x^4\frac{\partial y}{\partial x}-6x^8y=x$$

integriren. Lässt man zunächst den zweiten Theil weg, so handelt es sich um

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}-\frac{4}{x}\frac{\partial y}{\partial x}+x^4\frac{\partial y}{\partial x}-6x^8y=0,\ x^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+(x^5-4)x\frac{\partial y}{\partial x}-6x^{10}y=0,$$

so dass also in §. 78 $a_1=-4,\ b_1=1,\ m=5,\ a_0=0,\ b_0=0,\ c_0=-6;\ x^5=u,$ $y=u^n z$ wo n bestimmt ist aus

$$20n+25n(n-1)-20n=0,\ n=0,\ y=z;$$

die neue Gleichung ist:

$$25u\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}+5u\frac{\partial y}{\partial u}-6uy=0,\ \ \frac{\partial^2 y}{\partial u^2}+\frac{1}{5}\frac{\partial y}{\partial u}-\frac{6}{25}y=0\ (\S.\ 75):$$

$$m^2+\frac{1}{5}m-\frac{6}{25}=0;\ m=\frac{2}{5},\ -\frac{3}{5};\ y=C_1e^{\frac{2}{5}u}+C_2e^{-\frac{3}{5}u}=C_1e^{\frac{2}{5}x^5}+C_2e^{-\frac{3}{5}x^5}.$$

$$e^{\frac{2}{5}x^5}\frac{\partial C_1}{\partial x}+e^{-\frac{3}{5}x^5}\frac{\partial C_2}{\partial x}=0,\ 2x^4e^{\frac{2}{5}x^5}\frac{\partial C_1}{\partial x}-3x^4e^{-\frac{3}{5}x^5}\frac{\partial C_2}{\partial x}=x,$$

$$\frac{\partial C_1}{\partial x}=\frac{e^{-\frac{2}{5}x^5}}{5x^3};\ \ \frac{\partial C_2}{\partial x}=-\frac{e^{\frac{3}{5}x^5}}{5x^3};$$

---

* Hier ist $l(1+x)^2=l[(1+x)^2]$, also für $1+x>0:\ l(1+x)^2=2l(1+x)$.

$$C_1 = \frac{1}{5}\int \frac{e^{-\frac{2}{5}x^5}}{x^3}\partial x + E_1, \quad C_2 = -\frac{1}{5}\int \frac{e^{\frac{3}{5}x^5}}{x^3}\partial x + E_2;$$

$$y = E_1 e^{\frac{2}{5}x^5} + E_2 e^{-\frac{3}{5}x^5} + \frac{e^{\frac{2}{5}x^5}}{5}\int \frac{e^{-\frac{2}{5}x^5}}{x^3}\partial x - \frac{e^{-\frac{3}{5}x^5}}{5}\int \frac{e^{\frac{3}{5}x^5}}{x^3}\partial x.$$

8.) Denken wir uns, der in §. 34, II betrachtete Stab sey bereits so lange der Einwirkung der Wärmequelle ausgesetzt, dass er in den Beharrungszustand eingetreten ist, d. h. dass sich die Temperatur seiner einzelnen Querschnitte mit der Zeit nicht mehr ändert. Da alsdann v unabhängig ist von t, so ist $\frac{\partial v}{\partial t} = 0$, also

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{w\gamma}{\omega k}v = 0$$

die Gleichung der Wärmebewegung, wenn ω und k für den ganzen Stab konstant sind, und wo nun ω den (konstanten) Querschnitt des Stabes, k die innere Leitungsfähigkeit, γ das Ausstrahlungsvermögen und w den Umfang des Querschnitts bezeichnet. Aus der obigen Gleichung folgt nach §. 75:

$$v = C e^{x\sqrt{\frac{w\gamma}{\omega k}}} + C' e^{-x\sqrt{\frac{w\gamma}{\omega k}}} = C e^{ax} + C' e^{-ax}, \quad a = \sqrt{\frac{w\gamma}{\omega k}}.$$

Um die Konstanten C und C′ zu bestimmen, wollen wir annehmen, der Stab habe die Länge l und seine beiden Enden seyen immer auf den Temperaturen v_0, v_1 erhalten; alsdann muss für $x = 0$, $v = v_0$ und für $x = l$, $v = v_1$ seyn, d. h. man hat

$$v_0 = C + C', \quad v_1 = C e^{al} + C' e^{-al}; \quad C = \frac{v_0 e^{-al} - v_1}{e^{-al} - e^{al}}, \quad C' = \frac{v_0 e^{al} - v_1}{e^{al} - e^{-al}},$$

also ist unter diesen Voraussetzungen

$$v = \frac{(v_1 - v_0 e^{-al})e^{ax} + (v_0 e^{al} - v_1)e^{-ax}}{e^{al} - e^{-al}} = \frac{v_1(e^{ax} - e^{-ax}) + v_0(e^{a(l-x)} - e^{-a(l-x)})}{e^{al} - e^{-al}},$$

welche Formel die Temperatur v des Stabes in der Entfernnng x vom Anfangspunkte (dem $v = v_0$ entspricht) gibt.

Wäre $v_0 = v_1$, so hätte man

$$v = v_0 \frac{e^{ax} - e^{-ax} + e^{a(l-x)} - e^{-a(l-x)}}{e^{al} - e^{-al}} = v_0 \frac{e^{a(l+x)} - e^{a(l-x)} + e^{a(2l-x)} - e^{ax}}{e^{2al} - 1}$$

$$= v_0 \frac{(e^{ax} + e^{a(l-x)})(e^{al} - 1)}{(e^{al} + 1)(e^{al} - 1)} = v_0 \frac{e^{ax} + e^{a(l-x)}}{e^{al} + 1}.$$

Dies Letztere hat etwa in einem dünnen Ringe von der Länge l Statt, der nur einer Wärmequelle von der unveränderlichen Temperatur v_0 unterworfen ist.

Nehmen wir in unserem Stabe drei Schnitte an, deren Abstand je λ sey, so dass sie vom Anfang um x, $x + \lambda$, $x + 2\lambda$ entfernt sind. Alsdann sind die Temperaturen v', v'', v''' derselben:

$$v' = C e^{ax} + C' e^{-ax}, \quad v'' = C e^{a(x+\lambda)} + C' e^{-a(x+\lambda)}, \quad v''' = C e^{a(x+2\lambda)} + C' e^{-a(x+2\lambda)}.$$

woraus folgt

$$\frac{v' + v'''}{v''} = \frac{C e^{ax}(1 + e^{2a\lambda}) + C' e^{-ax}(1 + e^{-2a\lambda})}{C e^{ax} \cdot e^{a\lambda} + C' e^{-ax} e^{-a\lambda}}$$

$$=\frac{Ce^{a(x+\lambda)}(e^{a\lambda}+e^{-a\lambda})+C'e^{-a(x+\lambda)}(e^{a\lambda}+e^{-a\lambda})}{Ce^{a(x+\lambda)}+C'e^{-a(x+\lambda)}}=e^{a\lambda}+e^{-a\lambda},$$

welche Grösse von x unabhängig ist. Wo also auch der erste Querschnitt gewählt wird, die Grösse $\frac{v'+v'''}{v''}$ bleibt dieselbe, wenn λ ungeändert bleibt. Dieses merkwürdige Resultat wurde durch Versuche bestätigt. (Lamé, Cours de Physique, leçon XVI, 260.)

Ist der Stab unbegränzt, so muss die Konstante $C=0$ seyn, da sonst die Temperatur mit x unbegränzt wachsen würde. Alsdann ist bloss

$$v=C'e^{-ax},\quad C'=v_0,\quad v=v_0 e^{-ax},$$

wenn v_0 die unveränderliche Temperatur der Quelle. Sollen also zwei Stäbe von verschiedenem Stoffe u. s. w., die derselben Wärmequelle ausgesetzt sind, dieselbe Temperatur in den um x und x′ abstehenden Querschnitten haben, so ist $ax=a'x'$, d. h.

$$x:x'=\sqrt{\frac{w'\gamma'}{\omega'k'}}:\sqrt{\frac{w\gamma}{\omega k}},$$

und wenn $w=w'$, $\omega=\omega'$:

$$x:x'=\sqrt{\frac{\gamma'}{k'}}:\sqrt{\frac{\gamma}{k}},$$

aus welcher Proportion, wie man sieht, mittelst Erfahrung das Verhältniss des Bruches $\frac{\gamma}{k}$ für den einen Stab zu dem für den andern Stab erhalten werden kann.

Wir haben bei diesem Beispiele Gelegenheit gehabt, die willkürlichen Konstanten den Bedingungen der Aufgabe gemäss zu bestimmen. Im Allgemeinen werden, wenn n willkürliche Konstanten in dem allgemeinen Integrale vorkommen, eben so viele Bedingungen gegeben seyn müssen, um dieselben zu bestimmen. Diese können nun darin bestehen, dass man für n verschiedene Werthe von x die zugehörigen Werthe von y kennt; oder dass man etwa für denselben Werth von x die Werthe von y, $\frac{\partial y}{\partial x}, \ldots\ldots, \frac{\partial^{n-1}y}{\partial x^{n-1}}$ kennt, oder dass eine Mischung dieser beiden Bestimmungsweisen Statt findet, u. s. w.

§. 82.

I. Wir haben seither meistens die Integralgleichung einer Differentialgleichung n[ter] Ordnung in soferne gesucht, als wir die Gleichung zwischen x und y mit n willkürlichen Konstanten zu erhalten suchten, die der gegebenen Differentialgleichung genügt. In manchen Fällen kann man dies nicht, oder zieht es vor, anders zu verfahren, indem man nämlich zunächst aus der Differentialgleichung n[ter] Ordnung eine der n—1[ten] Ordnung zu erhalten sucht, die ihr genügt und eine willkürliche Konstante mehr erhält; dann aus dieser eine der n—2[ten] Ordnung u. s. w. Da die Schlussgleichung mit n willkürlichen Konstanten all den so einzeln erhaltenen Differentialgleichungen genügt, so müssen diese letzteren durch Elimination der willkürlichen Konstanten sich aus jener bilden lassen. Um aber zu der Gleichung der n—1[ten] Ordnung zu gelangen,

muss man $n-1$ willkürliche Konstanten eliminiren und nur eine noch beibehalten; welche der n dies sey, bleibt willkürlich. Daraus folgt aber wieder, dass eine jede Differentialgleichung der n^{ten} Ordnung n Differentialgleichungen der $n-1^{\text{ten}}$ Ordnung als erste Integralgleichungen haben wird, jede mit einer anderen willkürlichen Konstanten. Ist man im Stande, diese n Gleichungen herzustellen, so gibt die Elimination von $\frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \ldots\ldots, \frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}}$ aus denselben dann die letzte (eigentliche) Integralgleichung mit n willkürlichen Konstanten.

1.) C sey der Mittelpunkt der Erde (Fig. 51); ein Körper, dessen Gewicht an der Oberfläche $=p$ ist, sey zu Anfang der Zeit in der Entfernung $CA = r+h$ vom Mittelpunkte, wo r der Erdhalbmesser und $BA = h$ ist; dieser Körper falle zur Erde, indem er von A mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 ausgehe, wo v_0 nach AC gerichtet ist. Man soll seine Bewegung untersuchen.

Fig. 51.

Am Ende der Zeit t sey der Körper in M, und $AM = x$, so ist (§. 13, X) die bewegende Kraft $= \frac{p}{g}\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$; allein diese Kraft ist die Anziehungskraft der Erde, die nach C gerichtet ist und sich im Gewichte des Körpers äussert, wobei jedoch bekannt ist, dass dieselbe abnimmt nach dem Quadrat der Entfernung von C, mithin die bewegende Kraft in M (die in B gleich p ist) nur $\frac{pr^2}{(r+h-x)^2}$ ist, so dass also die Gleichung der Bewegung ist

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{gr^2}{(r+h-x)^2}.$$

Hieraus folgt, da $\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 = 2\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$:

$$2\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = \frac{2gr^2}{(r+h-x)^2}\frac{\partial x}{\partial t},\quad \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 = 2gr^2\int\frac{\partial x}{(r+h-x)^2} + C = \frac{2gr^2}{r+h-x} + C.$$

Für $t=0$ ist $x=0$ und $\frac{\partial x}{\partial t} = v_0$ (§. 13, IX), also

$$v_0^2 = \frac{2gr^2}{r+h} + C,\quad C = v_0^2 - \frac{2gr^2}{r+h},\quad \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 = 2gr^2\left[\frac{1}{r+h-x} - \frac{1}{r+h}\right] + v_0^2,$$

welche Gleichung die Geschwindigkeit in jedem Punkte des Weges bestimmt. Für B ist z. B. $x=h$ und wenn dort v_1 die Geschwindigkeit, so ist

$$v_1^2 = 2gr^2\left[\frac{1}{r} - \frac{1}{r+h}\right] + v_0^2 = \frac{2grh}{r+h} + v_0^2.$$

Aus obiger Gleichung folgt, wenn $\frac{-2gr^2}{r+h} + v_0^2 = a$:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \sqrt{\frac{2gr^2}{r+h-x} + a} = \sqrt{\frac{2gr^2 + a(r+h) - ax}{r+h-x}},\quad \frac{\partial t}{\partial x} = \frac{\sqrt{r+h-x}}{\sqrt{b-ax}},$$

$$(b = 2gr^2 + a(r+h)),$$

$$t = \int\frac{\sqrt{r+h-x}}{\sqrt{b-ax}}\partial x + C' = \int\frac{(r+h-x)\partial x}{\sqrt{b(r+h) - (b+ar+ah)x + ax^2}} + C'.$$

Für die Zeit des Falls von A nach B folgt hieraus

$$\int_0^h \frac{(r+h-x)\partial x}{\sqrt{b(r+h) - (b+ar+ah)x + ax^2}},$$

da für $t=0$ auch $x=h$ ist. Ist $v_0=0$, so ist $a=\frac{-2gr^2}{r+h}$, $b=0$, $a(r+h) = -2gr^2$, also diese Zeit

$$\sqrt{\frac{r+h}{2gr^2}}\int_0^h \frac{r+h-x}{\sqrt{(r+h)x-x^2}}\partial x = \sqrt{\frac{r+h}{2gr^2}}\left[(r+h)\,\mathrm{arc}\left(\sin = \sqrt{\frac{h}{r+h}}+\sqrt{rh}\right]\right.$$

2.)
$$y\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+X=0,$$

wenn X nur x enthält, gibt, da $y\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2=\frac{\partial}{\partial x}\left(y\frac{\partial y}{\partial x}\right)$:

$$y\frac{\partial y}{\partial x}+\int X\partial x+C=0, \text{ woraus } \frac{y^2}{2}+\int\int X\partial x^2+Cx+C'=0.$$

3.)
$$c\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=(a-x)\left[1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}.$$

Hieraus folgt

$$\frac{c\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}{\left[1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}=a-x,\quad 2c\int\frac{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\partial x}{\left[1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}=2ax-x^2+C.$$

d. h.
$$\frac{2c\frac{\partial y}{\partial x}}{\left[1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}=2ax-x^2+C \text{ (§. 72, VI)},\quad \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2=\frac{(2ax-x^2+C)^2}{4c^2-(2ax-x^2+C)^2}.$$

4.) Die Gleichung

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+X\frac{\partial y}{\partial x}+Y\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2=0,$$

in der X bloss x, Y bloss y enthält, wird durch Division mit $\frac{\partial y}{\partial x}$ zu

$$\frac{\partial}{\partial x}l\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)+X+Y\frac{\partial y}{\partial x}=0,\ l\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)+\int X\partial x+\int Y\partial y=C.$$

So etwa für

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+\frac{2}{x}\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{1}{y}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2=0:\ l\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)+2l(x)+l(y)=C,$$

$$x^2y\frac{\partial y}{\partial x}=C,\ y\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{C}{x^2},\ \frac{y^2}{2}=-\frac{C}{x}+C',$$

5.) Setzt man in der Gleichung

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+Y\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+Y'=0,$$

wo Y, Y' blosse Funktionen von y sind: $\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2=z$, also $2\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{1}{2}\frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{\frac{\partial y}{\partial x}}=\frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial y}$ (§. 14), so hat man

$$\frac{1}{2}\frac{\partial z}{\partial y}+Yz+Y'=0,$$

welche Gleichung zwischen y und z nach §. 66, I integrirt wird. Folgt daraus $z=f(y)$, so ist dann

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 = f(y),\ \frac{\partial y}{\partial x} = \pm\sqrt{f(y)},\ \int\frac{\partial y}{\sqrt{f(y)}} = \pm x + C \ (\S.\ 65).$$

Diese Beispiele mögen genügen, um das Gesagte verständlich zu machen. Wir fügen noch folgende Betrachtungen hinzu.

II. Gesetzt man habe die Gleichung

$$ay + bx = c,$$

so folgt daraus

$$a\frac{\partial y}{\partial x} + b = 0,\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0;$$

eine jede Differentialgleichung mithin, deren allgemeines Integral die vorgelegte seyn soll, muss $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$ geben. Hat man aber

$$ay^2 + 2bxy + cx^2 + 2dy + 2ex = f, \qquad (a)$$

so folgt hieraus:

$$ay\frac{\partial y}{\partial x} + bx\frac{\partial y}{\partial x} + by + cx + d\frac{\partial y}{\partial x} + e = 0,$$

$$ay\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + a\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + 2b\frac{\partial y}{\partial x} + bx\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + c + d\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0,$$

$$ay\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + 3a\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + 3b\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + bx\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + d\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = 0,$$

$$ay\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + 4a\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + 3a\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^2 + 4b\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + bx\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + d\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0,$$

$$ay\frac{\partial^5 y}{\partial x^5} + 5a\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + 10a\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + 5b\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + bx\frac{\partial^5 y}{\partial x^5} + d\frac{\partial^5 y}{\partial x^5} = 0.$$

Bestimmt man aus den letzten zwei Gleichungen a und b und setzt diese Werthe in die vorhergehende Gleichung ein, so erhält man

$$-45\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^2\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + 9\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^3\frac{\partial^5 y}{\partial x^5} + 40\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\right)^3 = 0,$$

d. h. da sicher nicht $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$:

$$-45\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + 9\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^2\frac{\partial^5 y}{\partial x^5} + 40\left(\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\right)^3 = 0. \qquad (b)$$

Eine jede Differentialgleichung nun, deren allgemeines Integral die Form (a) haben soll, muss dieser Gleichung (b) genügen. Zieht man also aus der vorgelegten Differentialgleichung die Differentialquotienten $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$, $\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}$, $\frac{\partial^5 y}{\partial x^5}$, um sie in (b) einzusetzen, so muss diese Gleichung erfüllt seyn, wenn (a) das allgemeine Integral der vorgelegten Differentialgleichung seyn soll. Da (a) in Wahrheit fünf willkürliche Konstanten enthält (indem man die ganze Gleichung durch einen der sechs Koeffizienten dividiren kann und dann nur die fünf Brüche als wirklich verschiedene Konstanten bleiben), so ist es wohl möglich, dass sie zu viel Konstanten enthält. Allein es werden sich dann immer Beziehungen zwischen den Konstanten aufstellen lassen, so dass die überflüssigen entfernt werden können.

6.) Man habe etwa die Gleichung

$$1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + y\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$$

so folgt daraus

$$3\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+y\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}=0,\ 3\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^2+4\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}+y\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}=0,\ 10\frac{\partial^2 y}{\partial x^3}\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}+5\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}+y\frac{\partial^5 y}{\partial x^5}=0,$$

und hieraus:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=-\frac{1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}{y},\ \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}=\frac{3}{y^2}\left[1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right]\frac{\partial y}{\partial x},\ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4}=-\frac{1}{y^3}\left[3+18\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+15\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^4\right],\ \frac{\partial^5 y'}{\partial x^5}=\frac{1}{y^4}\left[45\frac{\partial y}{\partial x}+150\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^3+105\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^5\right],$$

woraus
$$-45\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}+9\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^2\frac{\partial^5 y}{\partial x^5}+40\left(\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\right)^3=0,$$

so dass also der vorgelegten Gleichung durch (a) genügt wird. Allein da die gegebene Gleichung nur vom zweiten Grade ist, so müssen zwischen den fünf Konstanten noch drei Beziehungen bestehen, die man findet, wenn man aus (a) die Werthe von $\frac{\partial y}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ zieht und in die gegebene einsetzt, welche dann erfüllt seyn muss. Aber aus (a) folgt:

$$\frac{\partial y}{\partial x}=-\frac{by+cx+e}{ay+bx+d},\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=-\frac{a\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+2b\frac{\partial y}{\partial x}+c}{ay+bx+d}=$$
$$-\frac{a[by+cx+e]^2-2b(by+cx+e)(ay+bx+d)+c(ay+bx+d)^2}{(ay+bx+d)^3},$$

so dass die gegebene Gleichung ist

$$(ay+bx+d)^3+(by+cx+e)^2(ay+bx+d)-ay(by+cx+e)^2+2by(by+cx+e)(ay+bx+d)-cy(ay+bx+d)^2=0,$$

welche Gleichung, wenn man y durch x aus (a) ersetzt, identisch seyn muss, d. h. für alle möglichen Werthe von x in Erfüllung zu gehen hat. Da diese Gleichung auch ist

$$(ax+bx+d)^2[(a-c)y+bx+d]+(by+cx+e)^2[bx+d]+2by(by+cx+e)(ay+bx+d)+0,$$

so wird ihr genügt, wenn $a=c$, $b=d=0$, und zwar was immer auch x seyn mag. Daraus folgt nun, dass das Integral der obigen Gleichung ist

$$x^2+y^2+cx+c'=0,$$

wenn c und c′ die willkürlichen Konstanten sind. (Vergl. Nr. 2.)

III. Wie bereits in §. 71 angedeutet, kann man zuweilen Gleichungen niederer Ordnung dadurch integriren, dass man zu Gleichungen höherer Ordnung, die man aus jenen bildet, übergeht, vorausgesetzt, dass man dann die letztern integriren kann. Da man hiedurch aber zu viele Konstanten in die Rechnung erhält, so muss man durch Substitution in die gegebene Gleichung die überflüssigen Konstanten zu ermitteln suchen.

7.) Man habe etwa die Gleichung

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}-ax\right)^2+x\left(\frac{\partial y}{\partial x}-ax\right)-\left(y-\frac{1}{2}ax^2\right)=a^2,$$

so folgt daraus durch Differentiation:

$$\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}-a\right)\left(2\frac{\partial y}{\partial x}-ax\right)=0,$$

und da für $2\frac{\partial y}{\partial x}=ax$, $y=\frac{ax^2}{4}+C$, dieser Werth aber der vorgelegten Gleichung nicht genügt, so ist

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=a,\ y=\frac{1}{2}ax^2+cx+c',$$

wo c und c' Konstanten sind. Daraus folgt $\frac{\partial y}{\partial x}=ax+c$ und wenn man diese Werthe in die vorgelegte Gleichung einsetzt, so hat man

$$c^2+cx-cx-c'=a^2,\ c'=c^2-a^2,$$

so dass also

$$y=\frac{1}{2}ax^2+cx+c^2-a^2$$

der vorgelegten Gleichung genügt, wenn c die willkürliche Konstante ist.

8.) Hätte man weiter die Gleichung

$$xy\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+(x^2-y^2)\frac{\partial y}{\partial x}-xy=0,$$

so erhielte man hieraus durch Differentiation:

$$-y\left[1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right]+x\frac{\partial y}{\partial x}\left[1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right]+\left[2xy\frac{\partial y}{\partial x}+x^2-y^2\right]\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=0,$$

und da

$$x^2-y^2=\frac{xy-xy\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}{\frac{\partial y}{\partial x}},\ 2xy\frac{\partial y}{\partial x}+x^2-y^2=\frac{xy\left[1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right]}{\frac{\partial y}{\partial x}},$$

so folgt hieraus, da $1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$ nicht $=0$:

$$-y+x\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{xy\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}{\frac{\partial y}{\partial x}}=0,\ \frac{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}{\frac{\partial y}{\partial x}}+\frac{1}{y}\frac{\partial y}{\partial x}-\frac{1}{x}=0,$$

welche Gleichung unmittelbar gibt

$$l\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)+l(y)-l(x)=l(c),\ y\frac{\partial y}{\partial x}=cx,\ y^2=cx^2+c'.$$

Setzt man diese Werthe von y und $\frac{\partial y}{\partial x}$ in die gegebene Gleichung, so wird sie

$$\frac{x}{y}\left(y\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\frac{(x^2-y^2)y}{y}\frac{\partial y}{\partial x}-\frac{xy^2}{y}=0,\ c^2x^2+[(1-c)x^2-c']cx-(cx^2+c')x=0,$$
$$cc'+c'=0,\ c'=0,\ y^2=cx^2.$$

9.) Sey ferner gegeben:

$$2y^3\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+y^2\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2-x^2=0,$$

so führe man eine neue unabhängig Veränderliche z ein, gegeben durch die Gleichung $\frac{\partial x}{\partial z}=y$, wo also $\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}=\frac{\partial y}{\partial z}$ ist, und erhält (§. 14):

$$\frac{2y^3\left(\frac{\partial^2 y}{\partial z^2}y-\frac{\partial y}{\partial z}\frac{\partial y}{\partial z}\right)}{y^3}+y^2\frac{\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}{y^2}-x^2=0,\ \text{d.h.}\ 2y\frac{\partial^2 y}{\partial z^2}-\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2-x^2=0,$$

woraus durch Differentiation nach z:

$$y\frac{\partial^3 y}{\partial z^3}-x\frac{\partial x}{\partial z}=0,\ \text{d. h.}\ \frac{\partial^3 y}{\partial z^3}-x=0;\ \frac{\partial^4 y}{\partial z^4}-\frac{\partial x}{\partial z}=0,\ \text{d. h.}\ \frac{\partial^4 y}{\partial z^4}-y=0,$$

welcher Gleichung nach §. 75 genügt wird durch

$$y=C_1e^z+C_2e^{-z}+C_3\cos z+C_4\sin z,$$

während $$x = \int y\,\partial z = C_1 e^z - C_2 e^{-z} + C_3 \sin z - C_4 \cos z + C.$$

Da aber auch $\frac{\partial^3 y}{\partial z^3} = x$, d. h. $C_1 e^z - C_2 e^{-z} + C_3 \sin z - C_4 \cos z = x$, so ist $C = 0$, so dass man also

$$y = C_1 e^z + C_2 e^{-z} + C_3 \cos z + C_4 \sin z,\quad x = C_1 e^z - C_2 e^{-z} + C_3 \sin z - C_4 \cos z$$

hat. Setzt man diese Werthe in $2y\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} - \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 - x^2 = 0$ ein, so erhält man

$$2[C_1 e^z + C_2 e^{-z} + C_3 \cos z + C_4 \sin z]\,[C_1 e^z + C_2 e^{-z} - C_3 \cos z - C_4 \sin z]$$
$$- [C_1 e^z - C_2 e^{-z} - C_3 \sin z + C_4 \cos z]^2 - [C_1 e^z - C_2 e^{-z} + C_3 \sin z - C_4 \cos z]^2 = 0,$$

d. h. $$4 C_1 C_2 - C_3^2 - C_4^2 = 0,$$

welche Beziehung zwischen den vier Konstanten bestehen muss. Eliminirt man dann z zwischen den Werthen von y und x, so werden von selbst nur zwei Konstanten bleiben. Um dies hier hervortreten zu lassen, setze man $C_3 = \varrho \cos\alpha$, $C_4 = \varrho \sin\alpha$, also $C_3^2 + C_4^2 = \varrho^2 = 4 C_1 C_2$, $C_3 \cos z + C_4 \sin z = \varrho \cos(z - \alpha)$, $C_3 \sin z - C_4 \cos z = \varrho \sin(z - \alpha)$, also:

$$y = C_1 e^z + C_2 e^{-z} + 2\sqrt{C_1 C_2}\cos(z-\alpha),\quad x = C_1 e^z - C_2 e^{-z} + 2\sqrt{C_1 C_2}\sin(z-\alpha).$$

Setzt man $z = \alpha + u$, $C_1 e^{\alpha} = A$, $C_2 e^{-\alpha} = B$, also $AB = C_1 C_2$, so ist u zu eliminiren zwischen

$$y = A e^u + B e^{-u} + 2\sqrt{AB}\cos u,\quad x = A e^u - B e^{-u} + 2\sqrt{AB}\sin u,$$

wo A und B die beiden willkürlichen Konstanten sind.

§. 83.

Wie in §. 71 wird man, wenn alle Mittel versucht sind, zu der Integration mittelst Reihen greifen können. Die Bemerkungen, die wir dort gemacht haben, gelten hier natürlich ebenfalls. Einige Beispiele mögen zur Erläuterung dienen.

1.) Man habe die Gleichung

$$x\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^2 - 2\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + x = 0,$$

so folgt daraus:

$$2x\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} - \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^2 - 2\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + 1 = 0,\quad x\left[\left(\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\right)^2 + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}\right] - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$$
$$- \frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0,\ \text{d. h.}\ x\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\right],$$

woraus nun, indem man $n-4$mal nacheinander differenzirt, folgt (§. 10):

$$x\frac{\partial^{n-3}}{\partial x^{n-3}}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\right) + (n-4)\frac{\partial^{n-4}}{\partial x^{n-4}}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\right) = \frac{\partial^{n-3}}{\partial x^{n-3}}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\right).$$

Entwickelt man diese Grössen, so hat man

$$x\frac{\partial^{n-3}}{\partial x^{n-3}}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\right) + (n-4)\left[\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}} + \frac{n-4}{1}\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\frac{\partial^{n-2} y}{\partial x^{n-2}} + \ldots + \frac{\partial^{n-2} y}{\partial x^{n-2}}\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\right]$$
$$= \frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial^n y}{\partial x^n} + \frac{n-3}{1}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}} + \ldots + \frac{\partial^{n-2} y}{\partial x^{n-2}}\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}.$$

Für $x = 0$ ist nun nacheinander ($n = 4, \ldots.$)

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=0,\ \frac{\partial^3 y}{\partial x^3}=\frac{1}{2\frac{\partial y}{\partial x}},\ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4}=0,\ \frac{\partial^5 y}{\partial x^5}=0,\ \ldots\ldots$$

also da y und $\frac{\partial y}{\partial x}$ für $x=0$ willkürliche Konstanten sind, etwa c und c':

$$y=c+c'x+\frac{1}{12c'}x^3.$$

2.) $$x\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}-a\frac{\partial y}{\partial x}+b^2xy=0.$$

Wir haben bereits in §. 77, Nr. 4 die Gleichung $x\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}-a\frac{\partial y}{\partial x}-b^2xy=0$ integrirt und dort gefunden, dass $\int_0^\infty \frac{\cos(xv)\,\partial v}{(v^2+b^2)^{\frac{1}{2}a+1}}$ der Gleichung genügt. Die gegebene Gleichung unterscheidet sich von der eben angeführten nur durch das Zeichen von b^2, allein v^2-b^2 für v^2+b^2 gesetzt, würde ein bestimmtes Integral geben, das nicht benützt werden darf. Kann man aber das Integral der eben angeführten Gleichung in anderer Form herstellen, welche diesem Uebelstande nicht unterworfen ist, so würde ein Schluss von einem Integrale auf das andere wohl gestattet seyn. Nun ist aber nach §. 63:

$$\int_0^\infty \frac{\cos(vx)\,\partial v}{b+v^2}=\frac{\pi}{2}\,\frac{e^{-x\sqrt{b}}}{\sqrt{b}},$$

also wenn man n mal nach b differenzirt:

$$(-1)^n\int_0^\infty \frac{\cos(vx)\,\partial v}{(b+v^2)^{n+1}}=\frac{\pi}{2}\,\frac{\partial^n}{\partial b^n}\left(\frac{e^{-x\sqrt{b}}}{\sqrt{b}}\right).$$

Denkt man sich die zweite Seite entwickelt, so werden alle Glieder den Faktor $e^{-x\sqrt{b}}$ haben, so dass man eine Reihe von der Form

$$e^{-x\sqrt{b}}[Ax^n+A_1x^{n-1}+\ldots]$$

erhält. Daraus schliessen wir, wenn man b^2 für b setzt, es werde das Integral der Gleichung $x\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}-a\frac{\partial y}{\partial x}-b^2xy=0$ sich darstellen lassen in der Form, die eben angegeben wurde, und worin wir nun $A, A_1, \ldots$ entwickeln wollen. Sey also:

$$y=e^{-bx}[A_nx^n+A_{n-1}x^{n-1}+A_{n-2}x^{n-2}+\ldots\ldots],$$

so ist

$$\frac{\partial y}{\partial x}=-be^{-bx}[A_nx^n+A_{n-1}x^{n-1}+\ldots]+e^{-bx}[nA_nx^{n-1}+(n-1)A_{n-1}x^{n-2}+\ldots],$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=b^2e^{-bx}[A_nx^n+A_{n-1}x^{n-1}+\ldots]-2be^{-bx}[nA_nx^{n-1}+(n-1)A_{n-1}x^{n-2}+\ldots]$$
$$+e^{-bx}[n(n-1)A_nx^{n-2}+(n-1)(n-2)A_{n-1}x^{n-3}+\ldots].$$

Setzt man diese Werthe in die Gleichung $x\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}-a\frac{\partial y}{\partial x}-b^2xy=0$ ein, und ordnet nach Potenzen von x, so ergibt sich:

$$x^{n+1}[b^2A_n-b^2A_n]+x^n[b^2A_{n-1}-2nbA_n+abA_n-b^2A_{n-1}]+\ldots\ldots$$

$$+x^{n-r}[b^2 A_{n-r-1} - 2(n-r)bA_{n-r} + (n-r+1)(n-r)A_{n-r+1} + abA_{n-r} - (n-r+1)aA_{n-r+1} - b^2 A_{n-r-1}] + \ldots\ldots = 0,$$

woraus nun, indem man die Koeffizienten der aufeinander folgenden Potenzen von x gleich Null setzt, folgt:

$-2n+a=0, \ldots\ldots, bA_{n-r}[-2n+2r+a]-(n-r+1)A_{n-r+1}(a-n+r)=0, \ldots,$

d. h. $a=2n, \ldots\ldots, bA_{n-r}(2r)-(n-r+1)(n+r)A_{n-r+1}=0, \ldots\ldots,$

so dass für $r=1, 2, \ldots\ldots$

$$A_{n-1}=\frac{n(n+1)}{2.1\,b}A_n,\quad A_{n-2}=\frac{(n-1)(n+2)}{2.2.b}A_{n-1}, \ldots,\quad A_{n-r}=\frac{(n-r+1)(n+r)}{2.r.b}A_{n-r+1}, \ldots\ldots,$$

woraus $$A_{n-r}=\frac{(n-r+1)(n-r+2)\ldots(n+r)}{1.2\ldots r.\;(2b)^r}A_n.$$

Demnach bleibt A_n willkürlich $=C$ und es ist

$$y=Ce^{-bx}\left[x^n+\frac{n(n+1)}{1.2b}x^{n-1}+\frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{1.2.(2b)^2}x^{n-2}+\frac{(n-2)(n-1)n\ldots(n+3)}{1.2.3.(2b)^3}x^{n-3}+\ldots\ldots\right],$$

wo $n=\frac{1}{2}a$. Diese Reihe ist endlich, wenn n eine positive oder negative ganze Zahl ist.

Setzt man $-b$ statt b, so sieht man leicht, dass derselben Gleichung ebenfalls genügt wird, so dass also das allgemeine Integral der Gleichung $x\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}-a\frac{\partial y}{\partial x}-b^2 xy=0$ gegeben ist durch

$$y=Ce^{-bx}\left[x^n+\frac{n(n+1)}{2b}x^{n-1}+\frac{(n-1)n\ldots(n+2)}{2.(2b)^2}x^{n-2}+\frac{(n-2)(n-1)\ldots(n+3)}{2.3.(2b)^3}x^{n-3}+\ldots\ldots\right]$$
$$+C'e^{bx}\left[x^n-\frac{n(n+1)}{2b}x^{n-1}+\frac{(n-1)n\ldots(n+2)}{2(2b)^2}x^{n-2}-\frac{(n-2)\ldots(n+3)}{2.3.(2b)^3}x^{n-3}+\ldots\right],$$
$$n=\frac{1}{2}a,$$

welche Grösse immer endlich ist, wenn n eine positive oder negative ganze Zahl. In diesem Falle lässt sich also die Gleichung in geschlossener Form integriren (§. 77, Nr. 4 und 1). Ist n nicht in der angegebenen Lage, so werden die Reihen unendlich, divergiren aber, so dass die angegebenen Formeln nicht zu brauchen sind.

Man setze nun bi für b, so wird das allgemeine Integral der Gleichung

$$x\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}-a\frac{\partial y}{\partial x}+b^2 xy=0,$$

gegeben seyn durch

$$y=C(\cos bx-i\sin bx)\left[x^n-\frac{n(n+1)}{2b}ix^{n-1}-\frac{(n-1)\ldots(n+2)}{2(2b)^2}x^{n-2}+\frac{(n-2)\ldots(n+3)}{2.3.(2b)^3}ix^{n-3}+\ldots\right]$$
$$+C'(\cos bx+i\sin bx)\left[x^n+\frac{n(n+1)}{2b}ix^{n-1}-\frac{(n-1)\ldots(n+2)}{2(2b)^2}x^{n-2}-\frac{(n-2)\ldots(n+3)}{2.3.(2b)^2}ix^{n-3}+\ldots\right].$$

wenn man beachtet, dass $\frac{1}{i}=-i, \frac{1}{i^3}=i, \frac{1}{i^5}=-i, \ldots, \frac{1}{i^2}=-1, \frac{1}{i^4}=1, \ldots\ldots$
Hieraus folgt

$$y=(C+C')\cos bx\left[x^n-\frac{(n-1)..(n+2)}{2(2b)^2}x^{n-2}+\frac{(n-3)..(n+4)}{2.3.4(2b)^4}x^{n-4}-\ldots\right]$$
$$+(C'-C)i\cos bx\left[\frac{n(n+1)}{2b}x^{n-1}-\ldots,\right]$$
$$-(C+C')\sin bx\left[\frac{n(n+1)}{2b}x^{n-1}-\frac{(n-2)..(n+3)}{2.2.(2b)^3}x^{n-3}+\ldots\ldots\right]$$
$$+(C'-C)i\sin bx\left[x^n-\ldots\ldots\right],$$

so dass, wenn $C+C'=E$, $(C'-C)\,i=E'$:

$$y=(E\cos bx+E'\sin bx)\left[x^n-\frac{(n-1)n..(n+2)}{2(2b)^2}x^{n-2}+\frac{(n-3)..(n+4)}{2.3.4.(2b)^4}x^{n-4}-\ldots\right]$$
$$+(E'\cos bx-E\sin bx)\left[\frac{n(n+1)}{2b}x^{n-1}-\frac{(n-2)..(n+3)}{2.3.(2b)^4}x^{n-3}+\ldots\ldots\right], n=\frac{1}{2}a.$$

Ist n eine ganze Zahl, so ist dieser Werth ein endlicher; im anderen Falle ist er weiter nicht brauchbar.

3.) $$x^2(a+bx^m)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+x(c+dx^m)\frac{\partial y}{\partial x}+(f+gx^m)\,y=0.$$

Man setze, um die Gleichung zu vereinfachen: $x^m=u$, $y=u^n z$, so ist (§. 78):

$$x\frac{\partial y}{\partial x}=mu\left(u^n\frac{\partial z}{\partial u}+nu^{n-1}z\right), x^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=m(m-1)u\left(u^n\frac{\partial z}{\partial u}+nu^{n-1}z\right)$$
$$+m^2u^2\left[u^n\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+2nu^{n-1}\frac{\partial z}{\partial u}+n(n-1)u^{n-2}z\right],$$

und wenn man diese Werthe in die vorgelegte Gleichung einsetzt, so erhält man:

$$m^2(a+bu)u^{n+2}\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+[2nm^2(a+bu)u^{n+1}+m(m-1)(a+bu)u^{n+1}$$
$$+m(c+du)u^{n+1}]\frac{\partial z}{\partial u}+[n(n-1)m^2(a+bu)u^n+m(m-1)n(a+bu)u^n$$
$$+mn(c+du)u^n+(fgu)u^n]\,z=0,$$

so dass, wenn n aus der Gleichung

$$n(n-1)m^2a+m(m-1)na+mnc+f=0$$

bestimmt wird, man die ganze Gleichung durch u^{n+1} dividiren kann, und eine Gleichung erhält von der Form

$$u(a_0+b_0u)\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+(a_1+b_1u)\frac{\partial z}{\partial u}+a_2z=0,$$

deren Integration bereits in §. 79, I vorkam. In manchen Fällen kann jedoch die dort gelehrte Integration mittelst bestimmter Integrale nicht zum Ziele führen und wir wollen desshalb die mittelst unendlicher Reihen anführen. Die obige Gleichung, die n bestimmt, kann auch imaginäre Werthe für n geben, so dass dann die Koeffizienten in der umgeformten Gleichung auch imaginär werden könnten. Obwohl dies kein absolutes Hinderniss wäre, wollen wir doch $n=0$ setzen, also bloss $x^m=u$ einführen, wodurch dann die Gleichung

$$u^2(a_0+b_0u)\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}+(a_1+b_1u)u\frac{\partial y}{\partial u}+(a_2+b_2u)y=0, \text{ d. h. } x^2(a_0+b_0x)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$
$$+x(a_1+b_1x)\frac{\partial y}{\partial x}+(a_2+b_2x)\,y=0$$

zum Vorschein kommen wird. Man setze nun

$$y = A_0 x^n + A_1 x^{n+1} + A_2 x^{n+2} + \ldots .$$

wo n ebenfalls noch unbestimmt ist, so erhält man, wenn man diesen Werth einführt:

$$A_0[n(n-1)a_0 + n a_1 + a_2]x^n + [(n+1)n A_1 a_0 + n(n-1)A_0 b_0 + (n+1)A_1 a_1 + n A_0 b_1 + a_2 A_1 + b_2 A_0]x^{n+1} + \ldots + [(n+r)(n+r-1)A_r a_0 + (n+r-1)(n+r-2)A_{r-1} b_0 + (n+r)A_r a_1 + (n+r-1)b_1 A_{r-1} + a_2 A_r + b_2 A_{r-1}]x^{n+r} + \ldots ,$$

welche Grösse $=0$ seyn muss. Daraus folgt:

$$n(n-1)a_0 + n a_1 + a_2 = 0,$$

$$A_1[(n+1)n a_0 + (n+1)a_1 + a_2] = -[n(n-1)b_0 + n b_1 + b_2]A_0, \ldots ,$$

$$A_r[(n+r)(n+r-1)a_0 + (n+r)a_1 + a_2] = -[(n+r-1)(n+r-2)b_0 + (n+r-1)b_1 + b_2]A_{r-1},$$

$$\vdots$$

welche Gleichungen nun n und dann $A_1, A_2 \ldots .$ durch A_0 bestimmen. Im Allgemeinen wird es zwei Werthe von n geben, die der Gleichung genügen, also auch zwei Reihen, so dass man das allgemeine Integral gefunden hat. Im speziellen Falle werden diese Reihen endliche seyn können. Dies wird dann der Fall seyn, wenn für ein ganzes positives r die Gleichung

$$(n+r)(n+r-1)b_0 + (n+r)b_1 + b_2 = 0$$

möglich ist.

Man könnte jedoch statt der steigenden Reihe eine fallende wählen, also setzen

$$y = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots .$$

und würde dann finden:

$$A_0[n(n-1)b_0 + n b_1 + b_2]x^{n+1} + [n(n-1)a_0 A_0 + (n-1)(n-2)b_0 A_1 + n a_1 A_0 + (n-1)b_1 A_1 + a_2 A_0 + b_2 A_1]x^n + \ldots + [(n-r)(n-r-1)a_0 A_r + (n-r-1)(n-r-2)b_0 A_{r+1} + (n-r)a_1 A_r + (n-r-1)b_1 A_{r+1} + a_2 A_r + b_2 A_{r+1}]x^{n-r} + \ldots = 0,$$

woraus

$$n(n-1)b_0 + n b_1 + b_2 = 0,$$

$$[(n-1)(n-2)b_0 + (n-1)b_1 + b_2]A_1 = -[n(n-1)a_0 + n a_1 + a_2]A_0,$$

$$\vdots$$

$$[(n-r-1)(n-r-2)b_0 + (n-r-1)b_1 + b_2]A_{r+1} = -[(n-r)(n-r-1)a_0 + (n-r)a_1 + a_2]A_r, \ldots ,$$

so dass die Reihe eine endliche würde, wenn eine ganze Zahl r möglich ist, so dass

$$(n-r)(n-r-1)a_0 + (n-r)a_1 + a_0 = 0.$$

Begreiflicher Weise können die etwa erhaltenen unendlichen Reihen nur in soweit benützt werden, als sie konvergent sind. Kann man sie summiren, so wird man dadurch auf einen geschlossenen Ausdruck geführt werden, während auch umgekehrt dadurch, dass man für die Integralgleichung einerseits unendliche Reihen, anderseits etwa bestimmte Integrale erhält, interessante analytische Resultate aus der Vergleichung beider gezogen werden können.

§. 84.

I. Legt man sich die Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{\partial y}{\partial x}+ay^2+\frac{by}{x}+cx^m=0 \qquad \text{(a)}$$

vor, so erhält man aus derselben, wenn man $y=\frac{1}{az}\frac{\partial z}{\partial x}$ setzt:

$$\frac{1}{az}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{b}{xaz}\frac{\partial z}{\partial x}+cx^m=0,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{b}{x}\frac{\partial z}{\partial x}+acx^m z=0,$$

welche Gleichung, wenn man sie mit x^2 multiplizirt, gibt

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+bx\frac{\partial z}{\partial x}+acx^{m+2}z=0 \qquad \text{(b)}$$

und ganz unmittelbar zu der in §. 78 allgemein betrachteten Form gehört. Sie wurde bereits in der dortigen Nr. 3 speziell behandelt, und es folgt daraus, dass durch die Annahme $x=u^{\frac{2}{m+2}}$ diese Gleichung auf

$$u\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{m+2b}{m+2}\frac{\partial z}{\partial u}+\frac{4ac}{(m+2)^2}uz=0 \qquad \text{(c)}$$

zurückkommt. Vergleicht man dieselbe mit §. 77, Nr. 1, 4, 7 und §. 83, Nr. 2, so sieht man leicht, dass sie in geschlossener Form integrirt werden kann, wenn

$$\frac{m+2b}{2(m+2)}$$

eine positive oder negative ganze Zahl ist, d. h. also wenn

$$\frac{m+2b}{2(m+2)}=r,\quad m=\frac{2b-4r}{2r-1},$$

wo r eine ganze Zahl. In dem besondern Falle, da in der Gleichung (a) $b=0$, heisst sie die Riccatische Gleichung und ist also in geschlossener Form integrirbar, wenn $m=-\frac{4r}{2r-1}$, wo r eine (positive oder negative) ganze Zahl. Der Fall $m=-2$ gehört hieher ($r=\infty$) und ist in der Gleichung (b) direkt zu erledigen, da man hier nicht auf die Gleichung (c) kommen darf. Allein alsdann gehört die Gleichung (b) zu den in §. 76 erledigten Fällen (Beispiel Nr. 1).

Hat man (c) integrirt, so ergibt sich das Integral von (b), wenn man $u=x^{\frac{1}{2}m+1}$ setzt und dann folgt $y=\frac{1}{az}\frac{\partial z}{\partial x}$. Da immer $z=C_1 z_1+C_2 z_2$, so ist

$$ay=\frac{C_1\frac{\partial z_1}{\partial x}+C_2\frac{\partial z_2}{\partial x}}{C_1 z_1+C_2 z_2}=\frac{\frac{\partial z_1}{\partial x}+C\frac{\partial z_2}{\partial x}}{z_1+Cz_2},$$

wenn $\frac{C_2}{C_1}=C$ die (eine) willkürliche Konstante (§. 71, Nr. 5).

Auf die Riccatische Gleichung lässt sich die Gleichung

$$\frac{\partial y}{\partial x}+ax^n y^2+bx^m=0$$

zurückführen. Denn man setze $x^{n+1}=z$, so ist $\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{\partial y}{\partial z}(n+1)x^n$, also die gegebene Gleichung

$$(n+1)x^n\frac{\partial y}{\partial z}+ax^n y^2+bx^m=0,\quad \frac{\partial y}{\partial z}+\frac{a}{n+1}y^2+\frac{b}{n+1}x^{m-n}=0,$$

d. h.
$$\frac{\partial y}{\partial z}+\frac{a}{n+1}y^2+\frac{b}{n+1}z^{\frac{m-n}{n+1}}=0,$$
welche Gleichung nun die Form der Riccatischen hat.

II. Die Differentialgleichung zweiter Ordnung
$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+X\frac{\partial y}{\partial x}+Y\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2=0, \qquad \text{(d)}$$
in der X bloss x, Y bloss y enthält, wird integrirt, indem man setzt
$$\frac{\partial y}{\partial x}=u\,e^{-\int X\partial x},$$
wo u eine noch zu bestimmende Funktion von x ist. Daraus folgt $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ $=e^{-\int X\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}-Xu\right)$, also
$$e^{-\int X\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}-Xu\right)+Xu\,e^{-\int X\partial x}+Yu^2e^{-2\int X\partial x}=0,\ \frac{\partial u}{\partial x}+Yu^2e^{-\int X\partial x}=0,$$
oder da $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}u\,e^{-\int X\partial x}$:
$$\frac{\partial u}{\partial y}+uY=0,\ u=C\,e^{-\int Y\partial y}\ (\S.\ 65),$$
$$\frac{\partial y}{\partial x}=C\,e^{-\int Y\partial y}e^{-\int X\partial x},\ e^{\int Y\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}=C\,e^{-\int X\partial x},$$
$$\int e^{\int Y\partial y}\partial y=C\int e^{-\int X\partial x}\partial x+C', \qquad \text{(e)}$$
welche Gleichung das allgemeine Integral der vorgelegten Gleichung ist.

III. Wir haben unter I. die Gleichung erster Ordnung (a) zu integriren gelehrt. Hat man nun die allgemeinere Gleichung
$$\frac{\partial y}{\partial x}+Xy^2+X_1y+X_2=0, \qquad \text{(f)}$$
wo X, X_1, X_2 bekannte Funktionen von x sind, und man kennt bereits eine Funktion y_1 von x, welche der (f) genügt, so lässt sich das allgemeine Integral (mit der willkürlichen Konstanten, die wir in y_1 nicht als vorhanden ansehen) leicht finden. Man setze nämlich
$$y=y_1+u,$$
so wird die (f), da $\frac{\partial y_1}{\partial x}+Xy_1{}^2+X_1y_1+X_2=0$:
$$\frac{\partial u}{\partial x}+(2y_1X+X_1)u+Xu^2=0,$$
welche Gleichung nach §. 66, II gibt:
$$\frac{1}{u}=e^{\int(2y_1X+X_1)\partial x}\left[C+\int Xe^{-\int(2y_1X+X_1)\partial x}\partial x\right],$$
also ist, wenn $\int(2y_1X+X_1)\partial x=\varphi$:
$$y=y_1+\frac{e^{-\varphi}}{C+\int Xe^{-\varphi}\partial x}.$$

So z. B. genügt der Gleichung
$$\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{y^2}{x}+y=2x+1$$

offenbar $y=x$, so dass ihr Integral ist ($\varphi=\int\left(\frac{2x}{x}+1\right)\partial x=3x$):

$$y=x+\frac{e^{-3x}}{C+\int\frac{\partial x}{x e^{3x}}}$$

§. 85.

Es wäre möglich, dass die Gleichung n^{ter} Ordnung

$$f\left(x, y, \frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \ldots, \frac{\partial^n y}{\partial x^n}\right)=0 \qquad \text{(a)}$$

einfach durch Differentiation aus der Gleichung

$$F\left(x, y, \frac{\partial y}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}}\right)=C \qquad \text{(b)}$$

entstanden ist, so dass $f\left(x.\, y, \ldots, \frac{\partial^n y}{\partial x^n}\right)$ nichts Anderes ist, als der (vollständige) Differentialquotient von $F\left(x, \ldots, \frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}}\right)$, d. h. dass man hat (§. 7)

$$\frac{\partial}{\partial x} F\left(x, y, \ldots, \frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}}\right)=f\left(x, y, \ldots \frac{\partial^n y}{\partial x^n}\right),$$

und umgekehrt

$$F\left(x, y, \ldots, \frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}}\right)=\int f\left(x, y, \ldots, \frac{\partial^n y}{\partial x^n}\right)\partial x. \qquad \text{(c)}$$

Soll die Gleichung (c) möglich seyn, so ist dies so zu verstehen, dass y eine ganz beliebige Funktion von x seyn kann, d. h. also, dass was immer auch y sey, die Grösse zweiter Seite sich geradezu bestimmen lasse. So wäre etwa

$$\int\left[\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}+6y\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+3\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^3+5x\frac{\partial y}{\partial x}+5y\right]\partial x=\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+3y\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+5xy,$$

was immer auch y seyn mag. Man sieht, dass wenn zur Abkürzung $\frac{\partial y}{\partial x}=y_1$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=y_2, \ldots, \frac{\partial^n y}{\partial x^n}=y_n$ gesetzt wird, Alles darauf ankommt, dass

$$\int f(x, y, y_1, \ldots, y_n)\partial x \qquad \text{(d)}$$

bestimmt werden könne, unabhängig von jeder Beziehung zwischen x und y, d. h. was immer auch y für eine Funktion von x seyn möge. Gesetzt nun, diese Bestimmung sey möglich und es sey

$$\int f(x, y, y_1, \ldots, y_n)\partial x=F(x, y, y_1, \ldots, y_{n-1}), \qquad \text{(e)}$$

so ist, wenn u und v beliebige Funktionen von x bedeuten, φ aber von x un-

abhängig ist, dabei $u_1, \ldots, u_n$, $v_1, \ldots, v_n$ die Differentialquotienten von u und v bezeichnen, eben so

$$\int f(x, u+\varphi v, u_1+\varphi v_1, \ldots, u_n+\varphi v_n)\partial x = F(x, u+\varphi v, u_1+\varphi v_1, \ldots, u_{n-1}+\varphi v_{n-1}), \quad (e')$$

eben weil die Gleichung (e) gilt für alle möglichen Funktionen y von x.

Nun ist aber (§. 7)

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} f(x, u+\varphi v, \ldots, u_n+\varphi v_n) = \frac{\partial f}{\partial y} v + \frac{\partial f}{\partial y_1} v_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial y_n} v_n,$$

wenn man zur Abkürzung $u+\varphi v = y, \ldots\ldots, u_n + \varphi v_n = y_n$ setzt, d. h. man hat

$$f(x, u+\varphi v, \ldots, u_n+\varphi v_n) = \int \left[v \frac{\partial f}{\partial y} + v_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial y_n} v_n\right] \partial \varphi$$

und hieraus (§. 49):

$$f(x, u+v, u_1+v_1, \ldots, u_n+v_n) - f(x, u, u_1, \ldots, u_n) = \int_0^1 \left[v \frac{\partial f}{\partial y} + v_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + \ldots\ldots + v_n \frac{\partial f}{\partial y_n}\right] \partial \varphi, \quad (f)$$

wobei bloss vorausgesetzt ist, dass die Grösse $v\frac{\partial f}{\partial y} + \ldots + v_n \frac{\partial f}{\partial y_n}$ von $\varphi = 0$ bis $\varphi = 1$ endlich bleibe, was man immer erreichen wird, wenn man die beliebige Funktion u gehörig wählt. Wir wollen uns nämlich denken, in der Gleichung (f) sey u eine bestimmte Funktion von x (etwa 0, wenn dies angeht, oder x, u. s. w.), während v ganz willkürlich bleibe. Können wir dann

$$\int f(x, u+v, u_1+v_1, \ldots, u_n+v_n)\partial x$$

bestimmen für ein beliebiges v, so werden wir auch die Grösse (d) bestimmt haben, indem wir bloss $v = y - u$, d. h. y für $u+v$ setzen. Dabei bemerken wir, dass etwa $\int f(x, u, u_1, \ldots u_n)\partial x$ immer als bestimmbar angesehen werden muss, da ja u eine bekannte Funktion von x ist, also die Grösse $f(x, u, \ldots, u_n)$ nur x enthält, und man mithin eine blosse Integration zu vollziehen hat. Aus der Gleichung (f) folgt aber:

$$\int f(x, u+v, \ldots, u_n+v_n)\partial x - \int f(x, u, u_1, \ldots, u_n)\partial x = \int \partial x \int_0^1 \left[v \frac{\partial f}{\partial y} + v_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + \ldots + v_n \frac{\partial f}{\partial y_n}\right] \partial \varphi = \int_0^1 \partial \varphi \int \left[v \frac{\partial f}{\partial y} + \ldots + v_n \frac{\partial f}{\partial y_n}\right] \partial x \text{ (§. 61)};$$

ferner ist (§. 36):

$$\int v_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} \partial x = v \frac{\partial f}{\partial y_1} - \int v \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y_1}\right) \partial x,$$

$$\int v_2 \frac{\partial f}{\partial y_2} \partial x = v_1 \frac{\partial f}{\partial y_2} - \int v_1 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y_2}\right) \partial x = v_1 \frac{\partial f}{\partial y_2} - v \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y_2}\right) + \int v \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial f}{\partial y_2}\right) \partial x,$$

$$\vdots$$

$$\int v_n \frac{\partial f}{\partial y_n} \partial x = v_{n-1} \frac{\partial f}{\partial y_n} - \int v_{n-1} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y_n}\right) \partial x = v_{n-1} \frac{\partial f}{\partial y_n} - v_{n-2} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y_n}\right)$$

$$+ \int v_{n-2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial f}{\partial y_n}\right) \partial x = \ldots = v_{n-1} \frac{\partial f}{\partial y_n} - v_{n-2} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y_n}\right) + v_{n-3} \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial f}{\partial y_n}\right) + \ldots$$

$$\pm v \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}\left(\frac{\partial f}{\partial y_n}\right) \mp \int v \frac{\partial^n}{\partial x^n}\left(\frac{\partial f}{\partial y_n}\right) \partial x.$$

Setzt man diese Werthe in obige Gleichung ein, so erhält man

$$\int f(x, u+v, u_1+v_1, \ldots, u_n+v_n) \partial x = \int f(x, u, u_1, \ldots, u_n) \partial x +$$

$$v \int_0^1 \left[\frac{\partial f}{\partial y_1} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y_2}\right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial f}{\partial y_3}\right) - \ldots \pm \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}\left(\frac{\partial f}{\partial y_n}\right)\right] \partial \varphi$$

$$+ v_1 \int_0^1 \left[\frac{\partial f}{\partial y_2} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y_3}\right) + \ldots \mp \frac{\partial^{n-2}}{\partial x^{n-2}}\left(\frac{\partial f}{\partial y_n}\right)\right] \partial \varphi$$

$$\vdots \qquad (f')$$

$$+ v_{n-1} \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y_n} \partial \varphi + \int v \partial x \int_0^1 \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y_1}\right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial f}{\partial y_2}\right) - \ldots \mp \frac{\partial^n}{\partial x^n}\left(\frac{\partial f}{\partial y_n}\right)\right] \partial \varphi.$$

Da, wie schon bemerkt, $\int f(x, u, u_1, \ldots, u_n) \partial x$ als bestimmbar anzusehen ist; ferner in $\int_0^1 \left[\frac{\partial f}{\partial y_1} - \ldots \pm \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}\left(\frac{\partial f}{\partial y_n}\right)\right] \partial \varphi, \ldots,$ bis $\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y_n} \partial \varphi$ die Integration nur nach φ geschieht, u und v also konstant sind und diese Integrale mithin sämmtlich als bestimmbar betrachtet werden müssen, so folgt hieraus, dass $\int f(x, u+v, \ldots, u_n+v_n) \partial x$ bestimmt werden kann für ganz beliebige v, wenn

$$\int v \partial x \int_0^1 \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y_1}\right) + \ldots \mp \frac{\partial^n}{\partial x^n}\left(\frac{\partial f}{\partial y_n}\right)\right] \partial \varphi = \int V v \partial x$$

in derselben Lage ist, wo $\int_0^1 \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \ldots \mp \frac{\partial^n}{\partial x^n}\left(\frac{\partial f}{\partial y_n}\right)\right] \partial \varphi = V$. Allein bei ganz willkürlichem v ist diese Integration nicht durchführbar, wie sich leicht nachweisen lässt. Wäre nämlich diese Integration ausführbar, was auch immer v seyn möge, so setze man einmal

$$v = (x-a)^m (x-b)^r z,$$

wo m und r ganze positive Zahlen sind, die beide grösser als n seyen, und wo z eine ganz beliebige Funktion von x ist, die endlich sey von $x=a$ bis $x=b$. Alsdann werden $v, v_1, v_2, \ldots v_n$ Null seyn für $x=a$ und $x=b$ (§. 10) und mithin

$$\int_a^b f(x, y, y_1, \ldots, y_n) \partial x = \int_a^b f(x, u, u_1, \ldots, u_n) \partial x + \int_a^b (x-a)^m (x-b)^r z V \partial x,$$

wenn man $u+v=y$ setzt. Da nach unserer dermaligen Annahme $\int f(x, y, \ldots, y_n)\partial x$ integrabel ist, d. h. es eine Funktion $F(x, y, y_1, \ldots, y_{n-1})$ gibt, die jener Grösse gleich ist, so hängt die erste Seite von dem Werthe von z gar nicht ab. Denn dann sind ja die Werthe von $y, y_1, \ldots, y_{n-1}$ an den Gränzen $x=a$ und $x=b$ denen von $u, u_1, \ldots u_{n-1}$ an denselben Gränzen gleich, d. h. man hat

$$\int_a^b f(x, y, y_1, \ldots, y_n)\partial x = \int_a^b f(x, u, u_1, \ldots, u_n)\partial x,$$

so dass für ganz beliebige z seyn muss

$$\int_a^b (x-a)^m (x-b)^r z V \partial x = 0. \qquad (g)$$

Können wir also nachweisen, dass diese Gleichung unmöglich ist, so haben wir damit auch bewiesen, dass $\int Vv\partial x$ nicht im Allgemeinen bestimmbar sey. Dazu genügt es aber, etwa m und r als gerade Zahlen sich zu denken, und wenn V von $x=a$ bis $x=b$ dasselbe Zeichen hat, unter z sich eine Funktion zu denken, die in derselben Lage ist; wenn V sein Zeichen ändern sollte, z ganz eben so sich zu denken, so dass zV immer positiv bleibt. In diesem Falle wird das bestimmte Integral sicher nicht Null seyn (§. 49). Uebrigens wird man leicht sehen, dass m und r immer so gewählt werden können, dass die Gleichung (g) nicht befriedigt ist, es mag nun zV zwischen $x=a$ und $x=b$ sein Zeichen wechseln oder nicht. Demnach ist auch $\int Vv\partial x$ bei ganz willkürlichem v nicht integrirbar, und also auch nicht $\int f(x, y, \ldots, y_n)\partial x$ bestimmbar, es müsste denn seyn, dass $V=0$ wäre. Dazu gehört aber wieder, dass identisch, d. h. was auch y sey, ist:

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y_1}\right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial f}{\partial y_2}\right) - \ldots \pm \frac{\partial^n}{\partial x^n}\left(\frac{\partial f}{\partial y_n}\right) = 0, \qquad (h)$$

welche Gleichung also nothwendig ist, damit $\int f(x, y, \ldots y_n)\partial x$ für jedes y bestimmbar sey, und die auch, wie die vorstehende Entwicklung (f') zeigt, genügt, damit wirklich diese Bestimmung durchgeführt werden kann.

Die Gleichung (h) pflegt die Bedingungsgleichung der Integrabilität genannt zu werden. Ist sie erfüllt, unabhängig von jeder Beziehung zwischen x und y, so ist $f(x, y, \ldots, y_n)$ der Differentialquotient einer Funktion von $x, y, \ldots, y_{n-1}$; ist sie nicht erfüllt, so ist dies nicht der Fall.

Für die Gleichung (§. 69) $P+Q\frac{\partial y}{\partial x}=0$ oder $P+Qy_1=0$ ist $\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial P}{\partial y} + y_1\frac{\partial Q}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial y_1}=Q$, $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y_1}\right)=\frac{\partial Q}{\partial x}+y_1\frac{\partial Q}{\partial y}$ (§. 5), also muss

$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$$

seyn, damit jene Gleichung geradezu der Differentialquotient einer Funktion von x und y sey.

1.) $3y\frac{\partial y}{\partial x}+2x\frac{\partial y}{\partial x}+2y-12x=0$, d. h. $3yy_1+2xy_1+2y-12x=0$.

$$\frac{\partial f}{\partial y}=3y_1+2,\ \frac{\partial f}{\partial y_1}=3y+2x,\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y_1}\right)=3y_1+2;\ \frac{\partial f}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y_1}\right)=0,\ u=0.$$

$$\int f(x,u,u_1)\partial x=\int(-12x)\partial x=-6x^2;\ y=\varphi v:$$

$$\int_0^1\frac{\partial f}{\partial y_1}\partial x=\int_0^1[3\varphi v+2x]\partial\varphi=\frac{3v}{2}+2x,$$

also $$\int(3vv_1+2xv_1+2v-12x)\partial x=-6x^2+v\left(\frac{3v}{2}+2x\right),$$

d. h. wenn man $v=y$ setzt: $\int\left[3y\frac{\partial y}{\partial x}+2x\frac{\partial y}{\partial x}+2y-12x\right]\partial x=\frac{3}{2}y^2+2xy-6x^2$; d. h. die Integralgleichung der vorgelegten ist

$$\frac{3}{2}y^2+2xy-6x^2=C.$$

2.) $(3x-x^2)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+(6-4x)\frac{\partial y}{\partial x}-2y=0$, $(3x-x^2)y_2+(6-4x)y_1-2y=0$.

$$\frac{\partial f}{\partial y}=-2,\ \frac{\partial f}{\partial y_1}=6-4x,\ \frac{\partial f}{\partial y_2}=3x-x^2;\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y_1}\right)=-4;\ \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial f}{\partial y_2}\right)=-2;$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y_1}\right)+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial f}{\partial y_2}\right)=0,$$

und man kann hier wieder $u=0$ setzen, so dass

$$\int f(x,u,u_1,u_2)\partial x=\int 0\,\partial x=0;$$

$$\int_0^1\left[\frac{\partial f}{\partial y_1}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y_2}\right)\right]\partial\varphi=\int_0^1[3-2x]\partial\varphi=3-2x;\ \int_0^1\frac{\partial f}{\partial y_2}\partial\varphi=3x-x^2;$$

so dass also die (erste) Integralgleichung ist

$$(3-2x)y+(3x-x^2)\frac{\partial y}{\partial x}=C,$$

welche Gleichung nun zu §. 66, I gehört.

3.) $10\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}-2y\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}-2\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2+\frac{1}{y}-\frac{x}{y^2}\frac{\partial y}{\partial x}+2=0$; $10y_1y_2-2yy_2-2y_1^2+\frac{1}{y}-\frac{x}{y^2}y_1+2=0$.

$$\frac{\partial f}{\partial y}=-2y_2-\frac{1}{y^2}+\frac{2x}{y^3}y_1,\ \frac{\partial f}{\partial y_1}=10y_2-4y_1-\frac{x}{y^2},\ \frac{\partial f}{\partial y_2}=10y_1-2y;\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y_1}\right)=$$
$$10y_3-4y_2-\frac{1}{y^2}+\frac{2x}{y^3}y_1,\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y_2}\right)=10y_2-2y_1,\ \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial f}{\partial y_2}\right)=10y_3-2y_2:$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y_1}\right)+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial f}{\partial y_2}\right)=0,\ \frac{\partial f}{\partial y_1}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y_2}\right)=-2y_1-\frac{x}{y^2};\ u=1,y=1+\varphi v:$$

$$\int f(x,u,u_1,u_2)\partial x=\int(1+2)\partial x=3x,\ \int_0^1\left[\frac{\partial f}{\partial y_1}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y_2}\right)\right]\partial\varphi$$

$$=\int_0^1\left(-2v_1\varphi-\frac{x}{(1+\varphi v)^2}\right)\partial\varphi=-v_1+\frac{x}{v(1+v)}-\frac{x}{v},\ \int_0^1\frac{\partial f}{\partial y_2}\partial x$$

$$\int_0^1 [10\varphi v_1 - 2(1+\varphi v)]\,\partial\varphi = 5v_1 - 2 - v,$$

also wenn $1+v=y$, $v=y-1$, so ist das Integral:

$$3x + (y-1)\left[-y_1 + \frac{x}{y(y-1)} - \frac{x}{y-1}\right] + y_1(5y_1 - 2 - y + 1) = 5\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 - 2y\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{x}{y} + 2x,$$

und wenn dies $=C$ gesetzt wird, so hat man eine erste Integralgleichung der vorgelegten Gleichung.

§. 86.

Eine vorgelegte Differentialgleichung beliebiger Ordnung kann zwar ganz wohl durch Differentiation einer Gleichung der nächst niederern Ordnung entstanden seyn, man hat aber einen gemeinschaftlichen Faktor ausgeworfen, so dass die vorgelegte Gleichung nicht geradezu ein Differentialquotient ist, es aber werden würde, wenn man im Stande wäre, jenen Faktor wieder herzustellen. Wie in §. 69 wird man nun, bei der Unmöglichkeit, denselben geradezu zu bestimmen, gewisse besondere Gleichungen untersuchen und nachsehen, ob Faktoren von bestimmter Form dieselben auf diejenige Form bringen, die den Bedingungen des §. 85 entspricht. Wir wollen dazu nur Gleichungen der zweiten Ordnung wählen.

I.) Zu untersuchen, ob die Gleichung

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + X\frac{\partial y}{\partial x} + X'y = 0 \qquad \text{(a)}$$

durch einen Faktor von der Form e^{ax} integrabel werden kann, wo a eine Konstante ist. Da alsdann $e^{ax}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + X\frac{\partial y}{\partial x} + X'\,y\right)$ ein vollständiger Differentialquotient seyn soll, so ist (§. 85):

$$\frac{\partial f}{\partial y} = X'e^{ax},\ \frac{\partial f}{\partial y_1} = Xe^{ax},\ \frac{\partial f}{\partial y_2} = e^{ax};\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y_1}\right) = \left(\frac{\partial X}{\partial x} + aX\right)e^{ax},\ \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial f}{\partial y_2}\right) = a^2 e^{ax},$$

also muss $e^{ax}\left[X' - aX - \frac{\partial X}{\partial x} + a^2\right] = 0$, $X' - aX - \frac{\partial X}{\partial x} + a^2 = 0$

seyn. Ist diese Beziehung erfüllt, so wird (a) durch den Faktor e^{ax} integrabel. Für X und X′ konstant, bestimmt diese Gleichung die Werthe von a (§. 75). Ist aber die gegebene Bedingung erfüllt, so lässt sich leicht das Integral von (a) finden. Denn es ist dann (§. 86):

$\frac{\partial f}{\partial y_1} = Xe^{ax}$, $\frac{\partial f}{\partial y_2} = e^{ax}$, $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y_2}\right) = ae^{ax}$, und wenn $u=0$, $v=y$, das Integral:

$$y\int_0^1 e^{ax}(X-a)\,\partial\varphi + \frac{\partial y}{\partial x}\int_0^1 e^{ax}\,\partial\varphi = e^{ax}(X-a)y + e^{ax}\frac{\partial y}{\partial x},$$

d. h. die Integralgleichung ist

$$e^{ax}\frac{\partial y}{\partial x} + e^{ax}(X-a)y = C,$$

welche letztere Gleichung zu §. 66, I gehört.

II.) Zu untersuchen, ob die Gleichung (a) durch einen Faktor der Form $e^{mx^\mu + nx^\gamma}$ integrabel werden kann. Also ist jetzt

$$\frac{\partial f}{\partial y}=X' e^{mx^\mu+nx^\gamma}, \quad \frac{\partial f}{\partial y_1}=X e^{mx^\mu+nx^\gamma}, \quad \frac{\partial f}{\partial y_2}=e^{mx^\mu+nx^\gamma},$$

woraus als Bedingungsgleichung folgt

$$X'-(m\mu x^{\mu-1}+n\gamma x^{\gamma-1})X-\frac{\partial X}{\partial x}+m\mu(\mu-1)x^{\mu-2}+n\gamma(\gamma-1)x^{\gamma-2}+(m\mu x^{\mu-1}+n\gamma x^{\gamma-1})^2=0.$$

Ist diese Bedingung erfüllt, so ist dann das Integral:

$$y\int_0^1 X e^{mx^\mu+nx^\gamma}\partial\varphi - y\int_0^1(m\mu x^{\mu-1}+n\gamma x^{\gamma-1})\, e^{mx^\mu+nx^\gamma}\partial x+\frac{\partial y}{\partial x}\int_0^1 e^{mx^\mu+nx^\gamma}\partial\varphi=C,$$

d. h.
$$e^{mx^\mu+nx^\gamma}\left[yX-(m\mu x^{\mu-1}+n\gamma x^{\gamma-1})y+\frac{\partial y}{\partial x}\right]=C.$$

Für $\mu=1$, $\gamma=2$ wäre

$$X'=(m+2nx)X+\frac{\partial X}{\partial x}-(m+2nx)^2-2n,$$

und also etwa für $X=2nx$, das Integral von

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+2nx\frac{\partial y}{\partial x}-m(m+2nx)y=0:$$

$$e^{mx+nx^2}\left[\frac{\partial y}{\partial x}-my\right]=C.$$

III.) Man soll untersuchen, ob die Gleichung (a) durch einen Faktor von der Form $x^m e^{\mu x^n}$ integrabel gemacht werden kann.

Hier ist nun $\frac{\partial f}{\partial y}=X' x^m e^{\mu x^n}$, $\frac{\partial f}{\partial y_1}=X x^m e^{\mu x^n}$, $\frac{\partial f}{\partial y_2}=x^m e^{\mu x^n}$, woraus als Bedingungsgleichung:

$$X'x^2-x^2\frac{\partial X}{\partial x}-(mx+n\mu x^{n+1})X+m(m-1)+\mu n(2m+n-1)x^n+\mu^2 n^2 x^{2n}=0,$$

während die Integralgleichung ist

$$x^m e^{\mu x^n}\left[\frac{\partial y}{\partial x}+(X-\frac{m}{x}-\mu n x^{n-1})y\right]=C.$$

IV. Man soll die Bedingungen angeben, unter denen dieselbe Gleichung (a) durch den Faktor $\xi\frac{\partial y}{\partial x}+\xi' y$ integrabel wird, wenn ξ, ξ' Funktionen von x sind.

Da jetzt

$$(y_2+Xy_1+X'y)(\xi y_1+\xi' y)$$

ein vollständiger Differentialquotient seyn soll, so ist

$$\frac{\partial f}{\partial y}=X'(\xi y_1+\xi' y)+\xi'(y_2+Xy_1+X'y)=\xi' y_2+(X'\xi+X\xi')y_1+2X'\xi' y,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y_1}=X(\xi y_1+\xi' y)+\xi(y_2+Xy_1+X'y)=\xi y_2+2X\xi y_1+(X\xi'+X'\xi)y,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y_2}=\xi y_1+\xi' y,$$

so dass also wegen $\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y_1}\right)+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial f}{\partial y_2}\right)=0$ seyn muss:

$$\left(2\xi'-2X\xi+\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+\left(2\frac{\partial\xi'}{\partial x}-2X\frac{\partial\xi}{\partial x}-2\xi\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}\right)\frac{\partial y}{\partial x}$$
$$+\left[2X'\xi'-\frac{\partial(X\xi')}{\partial x}-\frac{\partial(X'\xi)}{\partial x}+\frac{\partial^2\xi'}{\partial x^2}\right]y=0.$$

Damit diese Gleichung für alle y erfüllt sey, muss

$$2\xi' - 2X\xi + \frac{\partial \xi}{\partial x} = 0,\ 2X'\xi' - \frac{\partial (X\xi' + X'\xi)}{\partial x} + \frac{\partial^2 \xi'}{\partial x^2} = 0$$

seyn, woraus von selbst folgt, dass der Faktor von $\frac{\partial y}{\partial x}$ Null ist. Man sieht hieraus, dass wenn man ξ, ξ' als bekannt ansieht, man X aus der ersten Gleichung erhält, während dann X' nach §. 66, I aus der zweiten erhalten wird.

Wir wollen einmal $\xi = 1$, $\xi' = b$ annehmen, so hat man

$$2X = 2b,\ X = b;\ 2bX' - \frac{\partial (b^2 + X')}{\partial x} = 0,\ X' = Ce^{2bx},$$

also wird die Gleichung

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + b\frac{\partial y}{\partial x} + a e^{2bx} y = 0$$

integrabel durch den Faktor $\frac{\partial y}{\partial x} + by$.

Diese Beispiele mögen genügen, um zu zeigen, in welcher Weise hier zu verfahren ist.

Vierzehnter Abschnitt.

Von den besonderen Auflösungen der Differentialgleichungen.

§. 87.

Schon in §. 70, V haben wir gesehen, dass es zuweilen Auflösungen von Differentialgleichungen der ersten Ordnung geben kann, die keine willkürliche Konstante enthalten, aber auch nicht aus der allgemeinen Integralgleichung hervorgehen, indem man bloss der willkürlichen Konstanten einen bestimmten Werth beilegt. So würde in dem dortigen Beispiele 14 sicher nicht die Gleichung $x^2 + y^2 = a^2$ aus $y = Cx + a\sqrt{1 + C^2}$ zu erhalten seyn, man möchte der Konstanten C irgend welche Werthe beilegen. Solche Auflösungen heissen wir besondere Auflösungen, im Gegensatz zu dem Integral oder der Integralgleichung.

Gesetzt also, die Gleichung erster Ordnung

$$f\left(x, y, \frac{\partial y}{\partial x}\right) = 0 \qquad \text{(a)}$$

habe zur allgemeinen Integralgleichung

$$F(x, y, c) = 0, \qquad \text{(b)}$$

wo c die willkürliche Konstante vorstellt, so wird jede besondere Form, die aus (b) dadurch folgt, dass man der c einen bestimmten, natürlich von x unabhängigen Werth beilegt, ein besonderes Integral von (a) darstellen. Wird dagegen die Gleichung (a) auch noch befriedigt durch die Gleichung

$$\psi(x, y) = 0, \qquad \text{(c)}$$

in der eine Konstante, die in (a) nicht ist, nicht vorkommt, und es ist nicht

möglich, die Gleichung (c) aus (b) zu erhalten, indem man der dortigen Grösse c einen bestimmten Werth beilegt, so wird (c) eine besondere Auflösung der Gleichung (a) seyn.

Um uns die Möglichkeit einer solchen besonderen Auflösung klar zu machen, wollen wir wieder zu der bereits in §. 65 angewandten Betrachtung zurückkehren. Wir haben dort gesehen, dass man mittelst der Gleichung (a) immer eine Reihe von Kurven konstruiren könne, deren allgemeine Gleichung die (b) ist, während jede einzelne dieser Kurven dadurch erhalten wird, dass die Konstante c einen bestimmten Werth annimmt. Denken wir uns nun die (unendliche) Menge dieser Kurven, die wir als unmittelbar auf einander folgend denken wollen, d. h. so, dass in je zwei auf einander folgenden die Werthe der Konstanten c nur unendlich wenig verschieden sind, so hat jede einzelne dieser Kurven die Eigenschaft, dass der aus ihr folgende Werth von $\frac{\partial y}{\partial x}$ derselbe ist, wie er aus der Gleichung (a) folgt, wenn man für x und y die dem betreffenden Kurvenpunkte zugehörigen Werthe wählt. Gehen wir etwas genauer auf die Sache ein, so werden wir uns auch so aussprechen können. Gesetzt FG sey eine der betreffenden Kurven, M ein Punkt derselben, dessen Koordinaten x und y sind, N ein zweiter Punkt, dessen Koordinaten $x + \Delta x$, $y + \Delta y$ seyen, wo $\Delta x = DE$, $\Delta y = QN$ ist, so wird der Werth Gr. $\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$, wie er aus der Kurve folgt, nichts Anderes seyn, als das $\frac{\partial y}{\partial x}$, das aus (a) folgt, wenn man in (a) für x und y die Koordinaten des Punktes M setzt.

Fig. 52.

Was wir so eben von einer Kurve gesagt haben, gilt von allen andern. Denken wir uns nun weiter, diese Reihe von Kurven sey so beschaffen, dass je zwei unmittelbar auf einander folgende sich schneiden (in einem oder mehreren Punkten), und man ziehe durch diese Durchschnittspunkte je zweier auf einander folgender Kurven selbst wieder eine stetige Kurve, so wird diese ebenfalls Werthe von $\frac{\partial y}{\partial x}$ liefern, wie sie aus der Gleichung (a) folgen. Denn auf der oben betrachteten besonderen Kurve FG liegen zwei einander unendlich nahe solcher Durchschnittspunkte, der eine (M) als Durchschnittspunkt der Kurve FG mit der vorangehenden, der andere (N, wenn MN unendlich klein) als solcher Durchschnittspunkt mit der nächst folgenden Kurve. Da die neue Kurve nun durch alle diese Durchschnittspunkte geht, so hat sie mit der Kurve FG zwei einander unendlich nahe Punkte (M und N) gemeinschaftlich, und folglich wird der Werth von Gr. $\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$, wie er für den Punkt M aus der Kurve FG folgt, nothwendig derselbe seyn, wie der Werth derselben Grösse für denselben Punkt aus der neuen Kurve. Da nun der eine der (a) genügt, so genügt also auch der andere derselben Gleichung. Hieraus folgt aber ganz offenbar, dass die Gleichung

der neuen Kurve ebenfalls der (a) genügt, und eine willkürliche Konstante sicher nicht mehr enthält, da diese Kurve eben nur eine einzige ist. Es folgt aber hieraus noch weiter, dass ausser den anfänglichen Kurven, deren Gleichung (b) ist, nur noch die neue Kurve aus (a) folgt, also weitere Auflösungen nicht mehr existiren können. Die neue Kurve pflegt nun die einhüllende Kurve der andern genannt zu werden, und da sie mit jeder der letzteren zwei unmittelbar auf einander folgende Punkte gemeinschaftlich hat, so folgt unmittelbar daraus, dass sie mit derselben jeweils eine gemeinschaftliche berührende Gerade hat, oder alle jene Kurven berührt. Ist nun diese einhüllende Kurve nicht selbst eine der früheren, so ist ihre Gleichung die gesuchte besondere Auflösung.

Soll man also die besondere Auflösung der Gleichung (a), deren allgemeines Integral (b) ist, aufsuchen, so ist die Aufgabe darauf zurückgeführt, die einhüllende Kurve der durch (b) ausgedrückten Kurven zu suchen. Seyen nun c, $c+\Delta c$ zwei auf einander folgende Werthe der Konstanten c, so werden die Gleichungen

$$F(x, y, c)=0, \quad F(x, y, c+\Delta c)=0 \qquad \text{(d)}$$

auch zwei auf einander folgenden Kurven zugehören, und die Koordinaten ihres Durchschnittspunktes werden erhalten werden, wenn man x und y aus diesen beiden Gleichungen bestimmt. Aus den zwei Gleichungen (d) folgt aber auch

$$F(x, y, c)=0, \quad \frac{F(x, y, c+\Delta c)-F(x, y, c)}{\Delta c}=0,$$

welche zwei Gleichungen eben so gut zur Bestimmung von x und y verwendet werden können, da sie die (d) vollständig ersetzen. Die letzte dieser Gleichungen gibt aber, wenn man Δc unendlich abnehmen lässt, was man muss, wenn die zwei Kurven unmittelbar auf einander folgende seyn sollen: $\frac{\partial F(x, y, c)}{\partial c}=0$, gemäss den Fundamental-Erklärungen in §. 3, so dass also die zwei Gleichungen (d) zu ersetzen sind durch

$$F(x, y, c)=0, \quad \frac{\partial F(x, y, c)}{\partial c}=0, \qquad \text{(d')}$$

aus denen die Koordinaten des Durchschnittspunktes zweier unmittelbar auf einander folgender Kurven folgen müssen. Ist es nicht möglich, dieselben hieraus zu bestimmen, so besteht eben ein solcher Durchschnittspunkt gar nicht. Letzteres wird dann immer der Fall seyn, wenn x und y in der zweiten Gleichung (d') nicht vorkommen, in welchem Falle dieselbe für c einen bestimmten Werth liefert.

Bildet man nun aus den Gleichungen (d') eine neue Gleichung

$$\psi(x, y)=0, \qquad \text{(e)}$$

indem man c zwischen beiden eliminirt, so wird diese Gleichung nothwendig die der einhüllenden Kurve, also die besondere Auflösung von (a) seyn. Denn die Koordinaten des Durchschnittspunktes der Kurven (d') genügen der (e), und da in letzterer c nicht vorkommt, so wird dies der Fall seyn,

was auch immer c seyn mag, d. h. für alle möglichen Durchschnittspunkte, so dass eben die (e) die gesuchte Gleichung ist.

Wir haben so eben die Theorie der besonderen Auflösungen aus geometrischen Betrachtungen abgeleitet, die immer den Vortheil grösserer Anschaulichkeit, dagegen auch den Nachtheil geringerer Allgemeinheit haben. Es ist jedoch ziemlich leicht, auf analytischem Wege zu denselben Resultaten zu gelangen.

Ist (b) die allgemeine Integralgleichung von (a), so muss aus den Gleichungen

$$F(x, y, c)=0, \quad \frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}=0, \qquad (f)$$

wenn man zwischen ihnen c eliminirt, derselbe Werth von $\frac{\partial y}{\partial x}$ folgen, wie ihn die (a) liefert. Denken wir uns nun aber einmal, c sey nicht mehr konstant, sondern eine Funktion von x und y, so wird die Gleichung (b) durch Differentiation geben

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial c}\left(\frac{\partial c}{\partial x}+\frac{\partial c}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}\right)=0; \qquad (g)$$

soll nun durch Elimination von c aus (b) und (g) eine Gleichung entstehen, die denselben Werth von $\frac{\partial y}{\partial x}$ wie (a), d. h. wie die aus den (f) entstehende Gleichung geben soll, so müssen die (b) und (g) der Form nach mit den (f) zusammenstimmen. Dies ist aber der Fall, wenn c eine Funktion von x und y ist, bestimmt durch die Gleichung

$$\frac{\partial F}{\partial c}=0. \qquad (g')$$

Gibt diese Gleichung wirklich c als Funktion von x und y, d. h. enthält sie ausser c wenigstens noch eine dieser Veränderlichen, so wird diese Funktion, in (b) für c gesetzt, eine Gleichung liefern, die als Auflösung von (a) wird angesehen werden müssen. Denn dann gibt (b) zwei Gleichungen, die genau die Form (f) haben und aus denen durch Elimination von c dasselbe folgt, wie oben. Man sieht, dass dies ganz dasselbe ist, was wir oben auf geometrischem Wege aufgefunden haben; namentlich ist (g′) die zweite Gleichung (d′). Allein der analytische Weg geht einen Schritt weiter. Gesetzt nämlich, es sey $\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{P}{Q}$, wo P und Q Funktionen von x und y sind, so werden die Gleichungen (f) seyn:

$$F(x, y, c)=0, \quad Q\frac{\partial F}{\partial x}+P\frac{\partial y}{\partial x}=0$$

und die (g):

$$F(x, y, c)=0, \quad Q\frac{\partial F}{\partial x}+P\frac{\partial y}{\partial x}+Q\frac{\partial F}{\partial c}\left(\frac{\partial c}{\partial x}+\frac{\partial c}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}\right)=0$$

und diese Systeme werden auch zusammenstimmen, wenn $Q=0$. Bestimmt man also c als Funktion von x aus der Gleichung $Q=0$, so kann die durch Elimination von c aus dieser Gleichung und (b) hervorgehende Gleichung auch eine besondere Auflösung von (a) seyn.

Es ist aber wohl möglich, dass dem nicht so ist, da die Annahme $Q=0$ gegen die vorhergehende Multiplikation mit Q streiten könnte, so dass man im speziellen Falle sich versichern muss, ob die gefundene Gleichung überhaupt eine Lösung von (a) ist, oder nicht.

Da auch $\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{1}{\frac{\partial x}{\partial y}}$, so genügt natürlich (b) auch der Gleichung

$$f\left(x, y, \frac{1}{\frac{\partial x}{\partial y}}\right)=0. \qquad (a')$$

und eine besondere Auflösung der (a′) ist auch eine von (a). Statt der zweiten Gleichung (f) wird man jetzt schreiben

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial y}=0,$$

und statt (g):

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial c}\left(\frac{\partial c}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y}+\frac{\partial c}{\partial y}\right)=0,$$

woraus dann folgt, dass wenn $\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{P'}{Q'}$, die Gleichung $Q'=0$, benützt, um c zwischen ihr und (b) zu eliminiren, zu einer besonderen Auflösung von (a) führen kann.

Wir bemerken hiezu nur noch, dass es immer leicht ist zu entscheiden, ob das gefundene Resultat eine besondere Auflösung, oder ein besonderes Integral ist. Wäre es letzteres, so müsste die Elimination von y oder x zwischen (b) und (c) nothwendig für c einen konstanten Werth liefern; ist dies nicht der Fall, so ist die Gleichung (c) eine besondere Auflösung.

Als Beispiele mögen die folgenden dienen.

1.) Die Gleichung

$$y=x\frac{\partial y}{\partial x}+\psi\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)$$

hat zum allgemeinen Integral

$$y=cx+\psi(c) \quad (\S. 70, V).$$

Daraus folgt, wenn man nach c differenzirt:

$$0=x+\psi'(c),$$

und wenn man c zwischen dieser Gleichung und $y=cx+\psi(c)$ eliminirt, so erhält man eine Auflösung der Gleichung. Diese Auflösung ist nothwendig eine besondere, denn sie gibt $\psi'(c)=-x$, also auch $y=-c\psi'(c)+\psi(c)$, woraus sicher nicht c gleich einer Konstanten folgt.

2.) Die Gleichung

$$3x\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2-6y\frac{\partial y}{\partial x}+x+2y=0$$

hat zum allgemeinen Integral

$$y=c+\frac{1}{3}x+\frac{x^2}{9c} \quad (\S. 71, Nr. 3).$$

Daraus, indem man nach c differenzirt:

$$0=1-\frac{x^2}{9c^2},\quad c^2=\frac{x^2}{9},\quad c=\pm\frac{x}{3},$$

also sind $\quad y=\frac{x}{3}+\frac{1}{3}x+\frac{x}{3}=x,\quad y=-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}x-\frac{x}{3}=-\frac{x}{3}$

Auflösungen der vorgelegten Gleichung, die ihr wirklich genügen. Sie sind auch in dem allgemeinen Integral nicht enthalten. Die Grössen $\frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial x}$ sind 1 und $\frac{1}{3}+\frac{2x}{9c}$, von denen nur die letztere für $c=0$ unendlich werden könnte, was aber nicht zulässig ist.

3.) Der Gleichung

$$\frac{y^2-x^2-2xy\frac{\partial y}{\partial x}}{2\left(y-x\frac{\partial y}{\partial x}\right)}=f\left[\frac{(y^2-x^2)\frac{\partial y}{\partial x}+2xy}{2\left(y-x\frac{\partial y}{\partial x}\right)}\right]$$

genügt (§. 70, Nr. 18):

$$x^2+y^2-2cx-2yf(c)=0,$$

so dass die Elimination von c zwischen dieser Gleichung und

$$x+yf'(c)=0$$

ebenfalls eine besondere Auflösung gibt.

4.) Um die Gleichung

$$xy\frac{\partial y}{\partial x}-y^2+a=0,\quad y\frac{\partial y}{\partial x}-\frac{1}{x}y^2+\frac{a}{x}=0$$

zu integriren, hat man in §. 66, II: $m=2$, $X=-\frac{1}{x}$, $X_1=\frac{a}{x}$, also ist die Integralgleichung:

$$y^2=x^2\left(c-2a\int\frac{\partial x}{x^3}\right)=cx^2+a.$$

Differenzirt man hier nach c, so fällt c ganz weg und es ist also eine Elimination nicht möglich. Dagegen ist $\frac{\partial F}{\partial x}=-2cx$, $\frac{\partial F}{\partial y}=2y$, und alle diese können nicht $=\infty$ gesetzt werden. Demgemäss hat die Gleichung keine besondere Auflösung.

5.) Für die Gleichung

$$\left(x\frac{\partial y}{\partial x}-y\right)\left(x\frac{\partial y}{\partial x}-2y\right)+x^2=0$$

findet man nach §. 71, I als allgemeines Integral

$$y=cx+\frac{x^2}{c}.$$

Also ist c zu eliminiren zwischen dieser Gleichung und $x-\frac{x^2}{c^2}=0$, $c=\pm\sqrt{x}$, so dass der gegebenen Gleichung als besondere Auflösungen genügen: $y=2x\sqrt{x}$ und $y=-2x\sqrt{x}$, die beide im allgemeinen Integral nicht enthalten sind.

6.) Der Gleichung

$$\left(y\frac{\partial y}{\partial x}+ax\right)\left(x\frac{\partial y}{\partial x}-y\right)+b\frac{\partial y}{\partial x}=0$$

genügt (§. 71, Nr. 2):

$$y^2=c+\frac{acx^2}{b-c}.$$

Also erhält man eine Auflösung durch Elimination von c aus dieser Gleichung und

$$1+\frac{ax^2}{b-c}+\frac{acx^2}{(b-c)^2}=0,\quad (b-c)^2+abx^2=0,$$

$$b-c=\pm x\sqrt{-ab},\ c=b\mp x\sqrt{-ab},$$

so dass $y^2=b-ax^2\pm 2x\sqrt{-ab}=(\sqrt{b}\pm x\sqrt{-a})^2;\ y=\sqrt{b}\pm x\sqrt{-a},$

oder $y=-\sqrt{b}\pm x\sqrt{-a}$

ebenfalls als besondere Auflösungen der Gleichung genügen.

7.) Der Gleichung

$$\sqrt{x-a}\,\frac{\partial y}{\partial x}=y$$

genügt

$$y=c e^{2\sqrt{x-a}};$$

wollte man hier nach c differenziren, so erhielte man c nicht; $\frac{\partial F}{\partial y}$ ist 1; $\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{c e^{2\sqrt{x-a}}}{\sqrt{x-a}}$, welche letztere Grösse unendlich ist für $x=a$. Allein dies ist keine Auflösung der gegebenen Gleichung.

8.) Der Gleichung

$$y-x\frac{\partial y}{\partial x}+\sqrt{x^2+y^2}\,\frac{\partial y}{\partial x}=0$$

genügt (§. 68, Nr. 2):

$$\frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}-x}=c.$$

Da hier $\frac{\partial F}{\partial c}=-1$, so kann man dies nicht $=0$ setzen. Dagegen ist $\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{2y[\sqrt{x^2+y^2}-x]\sqrt{x^2+y^2}-y^3}{\sqrt{x^2+y^2}[\sqrt{x^2+y^2}-x]}$ und diese Grösse ist $=\infty$, wenn $\sqrt{x^2+y^2}=x$, $y^2=0$, $y=0$, welcher Werth wirklich der Gleichung genügt, aber auch aus dem allgemeinen Integral folgt, wenn $c=0$.

9.) Der Gleichung

$$(-y+\sqrt{x^2+y^2-a^2})\frac{\partial y}{\partial x}-x=0$$

genügt

$$y=C+\sqrt{x^2+y^2-a^2}.$$

Daraus folgt

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2-a^2}},$$

was $=\infty$ ist für $x^2+y^2-a^2=0$. Dies genügt der vorgelegten Gleichung und ist eine besondere Auflösung.

10.) Die Gleichung

$$4xy\frac{\partial y}{\partial x}+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^3-8y^2=0$$

hat als Integralgleichung (§. 71, I):

$$y=c^3+2c^2x+cx^2.$$

Also hat man c zu eliminiren zwischen dieser Gleichung und

$$3c^2+4cx+x^2=0,$$

aus welch letzterer folgt

$$c=-\frac{1}{3}x \text{ oder } =-x.$$

Setzt man diese Werthe in den von y, so ergibt sich

$$y=-\frac{4}{27}x^3 \text{ oder } y=0,$$

wovon der erste Werth eine besondere Auflösung ist.

§. 88.

Wir haben im Vorstehenden immer vorausgesetzt, man kenne das allgemeine Integral der vorgelegten Differentialgleichung und haben daraus die

besondere Auflösung, wenn eine solche vorhanden war, abgeleitet. Allein in gar manchen Fällen ist man nicht im Stande, das allgemeine Integral aufzufinden und soll trotzdem die besondere Auflösung, die etwa vorhanden ist, ermitteln. Um dies bewerkstelligen zu können, wollen wir nochmals auf das Wesen der besonderen Auflösungen eingehen. Wir haben gesehen, dass die besondere Auflösung nichts Anderes ist, als die Gleichung der einhüllenden Kurve all derjenigen Kurven, deren Konstruktion mittelst der gegebenen Differentialgleichung möglich ist. Diese einhüllende Kurve kann aber durch die Differentialgleichung nicht konstruirt werden, obgleich sie ihr genügt, wie aus den Betrachtungen des §. 87 und §. 65 wohl deutlich hervorgeht. Sehen wir nun näher zu, worin der Grund dieser Unmöglichkeit liegt. Alle in dem allgemeinen Integral enthaltenen Kurven können vermittelst der gegebenen Differentialgleichung konstruirt werden, und nicht nur die Werthe von y, wie sie aus jeder folgen, sondern auch die von $\frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \ldots\ldots$ genügen der gegebenen Differentialgleichung, und zwar desshalb, weil man auf jeder Kurve n unmittelbar auf einander folgende Punkte annehmen kann, die sich nach dem durch die Differentialgleichung ausgesprochenen Gesetze (das in der Kurve bildlich dargestellt ist) folgen, so dass dann (§. 11) die Werthe von $\frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \ldots, \frac{\partial^n y}{\partial x^n}$ nothwendig sich aus der Kurve so ergeben müssen, wie die Differentialgleichung sie geben wird, wenn man dieselbe weiter differenzirt. Könnte man auf der Kurve nur zwei Punkte annehmen, die unmittelbar auf einander folgen, so würde nur $\frac{\partial y}{\partial x}$ dasselbe seyn, wie aus der Differentialgleichung; könnte man nur drei Punkte annehmen, so würden bloss $\frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ dieselben seyn, wie aus der gegebenen Differentialgleichung, u. s. w.

Betrachten wir nun die einhüllende Kurve, so liegen von derselben je nur zwei unmittelbar auf einander folgende Punkte auf einer und derselben von den durch die Differentialgleichung gegebenen Kurven, so dass also auch bloss der aus der einhüllenden Kurve gezogene Werth von $\frac{\partial y}{\partial x}$ derselbe ist, wie der aus der Differentialgleichung gezogene, während der aus der einhüllenden Kurve gezogene Werth von $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ ein anderer seyn muss, als der von $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, den man aus der gegebenen Differentialgleichung zieht. Dass es mit den höheren Differentialquotienten dieselbe Bewandtniss haben wird, versteht sich von selbst.

Differenzirt man also die vorgelegte Differentialgleichung nochmals, so muss der so erhaltene Werth von $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ verschieden seyn von dem, den die besondere Auflösung gibt, so dass letzterer aus der differenzirten Gleichung nicht gefunden werden kann. Würde man also in die neue Gleichung denjenigen Werth von y einsetzen, der der besonderen Auflösung zukommt, so

muss eine Bestimmung von $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ geradezu unmöglich seyn, und umgekehrt, wenn diese Bestimmung für einen gewählten Zusammenhang zwischen x und y unmöglich ist, so kann dieser Zusammenhang eine besondere Auflösung der Gleichung seyn.

Ist nun

$$f(x, y, y_1) = 0, \quad y_1 = \frac{\partial y}{\partial x}, \qquad (a)$$

die vorgelegte Differentialgleichung, so folgt aus ihr:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y_1 + \frac{\partial f}{\partial y_1} y_2 = 0 \qquad (b)$$

und eine Bestimmung von $y_2 = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ ist unmöglich, wenn

$$\text{entweder} \quad \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y_1 = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y_1} = 0, \qquad (c)$$

$$\text{oder} \quad \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y_1 = \frac{1}{0}, \quad \frac{\partial f}{\partial y_1} = \frac{1}{0}, \qquad (d)$$

$$\text{oder} \quad \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y_1 = \frac{0}{0}, \quad \frac{\partial f}{\partial y_1} \text{ nicht 0 oder } \infty, \qquad (e)$$

$$\text{oder} \quad \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y_1 \text{ nicht 0 oder } \infty, \quad \frac{\partial f}{\partial y_1} = 0. \qquad (f)$$

Diese vier Fälle können nun besondere Auflösungen von (a) geben. Und zwar, wenn man y_1 zwischen (a) und der ersten (c), eben so y_1 zwischen (a) und der zweiten (c) eliminirt, und erhält beide Male dieselbe Gleichung zwischen x und y, so kann dieselbe eine besondere Auflösung seyn; dasselbe gilt für die Gleichungen (d) und (a); die Gleichung (e) zerfällt in zwei, mit denen eben so zu verfahren ist; eliminirt man y_1 zwischen (a) und (f), so kann das Resultat der Elimination auch eine besondere Auflösung seyn.

Wir haben vorausgesetzt, dass die einhüllende Kurve mit jeder der durch (a) dargestellten Kurven nur zwei Punkte gemeinschaftlich habe. Dies ist jedoch nicht unerlässlich, sondern es könnte ganz wohl eine Reihe von mehr Punkten gemeinschaftlich seyn, nur ist diese Anzahl eine immer beschränkte. Daraus folgt, dass es wohl möglich wäre, dass der aus der besonderen Auflösung hervorgehende Werth von $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ noch derselbe seyn könnte, wie der aus (a) folgende, aber $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$ nicht mehr; oder aber $\frac{\partial y^3}{\partial x^3}$ noch in dieser Lage seyn könnte, nicht aber $\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}$, u. s. w.

Daraus ergibt sich aber jetzt sogleich das Kennzeichen, ob eine Gleichung zwischen x und y eine besondere Auflösung der Gleichung (a) ist oder nicht. Sie wird es nämlich seyn, wenn sie einer der aus (a) durch auf einander folgende Differentiationen gebildeten Gleichungen nicht genügt. In der Regel wird dies sogleich mit der ersten der Fall seyn.

Wir haben so eben gesagt, dass es möglich seyn könnte, dass die ein-

hüllende Kurve mit den eingehüllten mehr als zwei Punkte gemeinschaftlich habe. Seyen nun

$$f(x, y, c) = 0, \; f(x, y, c + \Delta c) = 0, \; f(x, y, c + 2\Delta c) = 0 \qquad (g)$$

die Gleichungen von drei auf einander folgenden Kurven, und es solle die einhüllende Kurve drei Punkte gemeinschaftlich haben, so müsste der Durchschnittspunkt der zwei letzten Kurven auch auf der ersten liegen; zieht man also die Werthe von x und y aus letzteren und setzt sie in die erste ein, so muss diese Gleichung erfüllt seyn. Aus den Gleichungen (g) folgt aber auch:

$$f(x, y, c) = 0, \; \frac{f(x, y, c + \Delta c) - f(x, y, c)}{\Delta c} = 0,$$
$$\frac{f(x, y, c + 2\Delta c) - 2f(x, y, c + \Delta c) + f(x, y, c)}{\Delta c^2} = 0,$$

d. h. wenn man Δc unendlich klein werden lässt (§. 11):

$$f(x, y, c) = 0, \; \frac{\partial f(x, y, c)}{\partial c} = 0, \; \frac{\partial^2 f(x, y, c)}{\partial c^2} = 0, \qquad (g')$$

welche drei Gleichungen die (g) ersetzen und für dieselben Werthe von x und y richtig seyn müssen. Eliminirt man nun x und y zwischen ihnen, so erhält man eine Gleichung in c, die für diese Grösse bestimmte Werthe liefert,* so dass also auch nur für diese bestimmten Werthe von c, d. h. für diejenigen Kurven des Systems, die diesen Werthen entsprechen, die einhüllende Kurve drei Punkte mit derselben eingehüllten gemeinschaftlich hat. Demnach wird unsere obige Regel, dass $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ nicht dürfe bestimmt werden können, vollkommen bestehen bleiben, da immer noch unendlich viele Kurven des eingehüllten Systems vorhanden sind, für welche die einhüllende Kurve in der früher gewählten Lage ist. Eben so aber wird in Bezug auf das Kennzeichen, ob die gefundene Gleichung eine besondere Auflösung ist, oder nicht, die gegebene Regel bestehen bleiben, dass man zuweilen zu höheren Differentiationen gehen muss, eben weil es doch auch einzelne eingehüllte Kurven geben kann, für die $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \ldots$ dieselben sind, wie sie aus der gegebenen Differentialgleichung folgen. Bei diesen Differentiationen kann man, wenn es vorkommt, diejenigen Faktoren, die zur Bestimmung von $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}, \ldots$ nicht tauglich sind, weglassen, da es ja bloss sich um die Bestimmung dieser Grössen handelt.

1.) $\sqrt{x}\frac{\partial y}{\partial x} - \sqrt{y} = 0$ gibt $\frac{1}{2\sqrt{x}}\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{1}{2\sqrt{y}}\frac{\partial y}{\partial x} + \sqrt{x}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0,$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\frac{1}{2}\frac{\partial y}{\partial x}\left(\frac{1}{\sqrt{y}} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{\sqrt{x}},$$

* Es wäre allerdings denkbar, dass die so erhaltene Gleichung für alle möglichen Werthe von c richtig wäre, wenn sie z. B. hiesse $5c^2 + (1-c)(1+5c) - 4c - 1 = 0$; allein dann würden die Gleichungen (g') oder (g) bestehen, wenn man für c setzte $c + \Delta c$, $c + 2\Delta c$, ..., was darauf hinauskäme, dass alle Durchschnittspunkte auf derselben Kurve lägen, d. h. dass die einhüllende Kurve eine Kurve des Systems wäre, mithin eine besondere Auflösung nicht Statt fände.

welche Grösse unbestimmt wird für $y=0$. Ersetzt man aber $\frac{\partial y}{\partial x}$ durch $\sqrt{\frac{y}{x}}$, so ist aus der vorgelegten Gleichung: $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}-\frac{\sqrt{y}}{x\sqrt{x}}\right)$, während aus $y=0$ folgt $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=0$. Demnach ist $y=0$ eine besondere Auflösung, wie dies aus dem allgemeinen Integral: $\sqrt{y}=\sqrt{x}+c$ auch sofort folgt.

2.) $$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2-4x\frac{\partial y}{\partial x}+4y=0.$$

Hieraus $$\left(\frac{\partial y}{\partial x}-2x\right)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=0, \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=0\right),$$

welche Gleichung $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ nicht bestimmt, wenn $\frac{\partial y}{\partial x}=2x$, woraus dann folgt: $y=x^2$. Da hieraus nicht folgt $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=0$, so ist dies eine besondere Auflösung. Das allgemeine Integral ist übrigens (§. 71, I):

$$y=cx-\frac{1}{4}c^2.$$

3.) Die Gleichung

$$1+\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2=a^2\left(y-x\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2$$

gibt: $$\left(\frac{\partial y}{\partial x}+a^2yx-a^2x^2\frac{\partial y}{\partial x}\right)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=0, \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=0\right),$$

so dass $\frac{\partial y}{\partial x}+a^2\left(yx-x^2\frac{\partial y}{\partial x}\right)=0$ zu einer besonderen Auflösung führen kann. Da hieraus folgt

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{a^2yx}{a^2x^2-1}, \quad xy-x^2\frac{\partial y}{\partial x}=-\frac{yx}{a^2x^2-1}, \quad y-x\frac{\partial y}{\partial x}=-\frac{y}{a^2x^2-1},$$

so wird die Gleichung

$$(a^2x^2-1)^2+a^4y^2x^2=a^2y^2, \quad a^2y^2(1-a^2x^2)=(a^2x^2-1)^2, \quad a^2y^2=1-a^2x^2,$$

eine besondere Auflösung seyn können. Da sie nicht $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=0$ gibt, so ist sie es auch wirklich, während das allgemeine Integral ist (§. 70, Nr. 14, oder auch §. 71, I):

$$y=cx\pm\sqrt{\frac{1+c^2}{a^2}}.$$

Gesetzt, man habe die Differentialgleichung (§. 69):

$$P+Q\frac{\partial y}{\partial x}=0 \qquad \text{(h)}$$

und es existire für dieselbe ein integrirender Faktor v, so dass also

$$v\left(P+Q\frac{\partial y}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}f(x,y),$$

so ist das allgemeine Integral der Gleichung (h):

$$\int v\left(P+Q\frac{\partial y}{\partial x}\right)\partial x=C. \qquad \text{(h')}$$

Hat nun die Gleichung (h) noch eine besondere Auflösung, so wird dieselbe wohl $P+Q\frac{\partial y}{\partial x}=0$ gehen, nicht aber der Gleichung (h') genügen. Setzt man demnach in $\int v\left(P+Q\frac{\partial y}{\partial x}\right)\partial x$ für y seinen aus der besonderen Auflösung gezogenen Werth, so wird diese Grösse nicht konstant, d. h. es wird $v\left(P+Q\frac{\partial y}{\partial x}\right)$ nicht Null. Da aber $P+Q\frac{\partial y}{\partial x}$ es wird, so muss noth-

wendig $v = \infty$ werden. Daraus folgt also, dass **jede besondere Auflösung den integrirenden Faktor unendlich macht.**

§. 89.

Für die Differentialgleichungen höherer Ordnung wollen wir nur die der zweiten betrachten, da das Gesagte sich leicht übertragen lässt auch auf höhere Ordnung. Hat man also die Gleichung

$$f\left(x, y, \frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right) = 0 \text{ oder } f(x, y, y_1, y_2) = 0, \qquad (a)$$

so wird dieselbe, allgemein integrirt, eine Integralgleichung der Form

$$F(x, y, c, c') = 0 \qquad (b)$$

haben, wo c und c' die willkürlichen Konstanten sind. Differenzirt man die Gleichung (b), und eliminirt aus ihr selbst und dieser neuen Gleichung c oder c', so erhält man zwei Gleichungen erster Ordnung mit je einer willkürlichen Konstanten, die beide erste Integralgleichungen von (a) sind (§. 82). Gesetzt nun, man finde irgend eine Gleichung zwischen x und y, oder zwischen $x, y, \frac{\partial y}{\partial x}$, welche der (a) genügt, so wird dieselbe entweder eine besondere Auflösung oder ein besonderes Integral seyn. Soll sie letzteres seyn, so müssen alle Werthe von $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \ldots$, wie sie aus (a) folgen, auch aus ihr selbst folgen, geschieht dies nicht, so ist sie nothwendig eine besondere Auflösung. Damit ist dann sofort das Kennzeichen gegeben, wornach man entscheiden kann, ob eine gefundene Gleichung eine besondere Auflösung ist oder nicht.

Sey nun

$$\varphi(x, y, y_1, c) = 0 \qquad (c)$$

ein erstes Integral der Gleichung (a) mit einer willkürlichen Konstanten c, so folgt aus ihr durch Differentiation:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} y_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} y_2 = 0,$$

und wenn man c eliminirt zwischen dieser Gleichung und (c), so erhält man (a). Denkt man sich aber, es sey c eine Funktion von x, y, y_1, so würde aus (c) folgen:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} y_1 + \frac{\partial \varphi}{\partial y_1} y_2 + \frac{\partial \varphi}{\partial c}\left(\frac{\partial c}{\partial x} + \frac{\partial c}{\partial y} y_1 + \frac{\partial c}{\partial y_1} y_2\right) = 0$$

und diese Gleichung würde durch Elimination von c dasselbe Resultat geben, wenn c als Funktion von x, y, y_1 bestimmt wird aus der Gleichung

$$\frac{\partial \varphi}{\partial c} = 0. \qquad (d)$$

Eliminirt man also aus (c) und (d) die Grösse c, so erhält man ganz sicher eine Lösung der Gleichung (a), die wohl eine besondere Auflösung seyn kann.

Hätte man statt der Gleichung (c) die Gleichung

$$\psi(x, y, y_1, c') = 0 \qquad (c')$$

gewählt, wo c' die andere Konstante ist, und die zwei Gleichungen (c) und

(c') wesentlich verschieden sind, so hätte man eben so c' zu eliminiren zwischen den Gleichungen

$$\psi(x, y, y_1\, c') = 0, \quad \frac{\partial \psi(x, y, y_1, c')}{\partial c'} = 0.$$

Allein das Resultat der Elimination wird in beiden Fällen dasselbe seyn. Denn sey wieder (b) das allgemeine Integral von (a), so wird die Gleichung (c) erhalten werden, indem man c' eliminirt zwischen (b) und ihrer Differentialgleichung

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} = 0, \text{ oder } F_1(x, y, y_1, c, c') = 0. \tag{e}$$

Man kann also die Gleichung (c) ersetzen durch (e), wenn man hierin c' als durch (b) gegeben ansieht. Dadurch wird aber c' als Funktion von c (nebst x und y) erscheinen, und die Gleichung (d) wird jezt seyn

$$\frac{\partial F_1}{\partial c} + \frac{\partial F_1}{\partial c'}\frac{\partial c'}{\partial c} = 0,$$

wo $\frac{\partial c'}{\partial c}$ aus (b) zu nehmen ist. Aus (b) folgt aber

$$\frac{\partial F}{\partial c'}\frac{\partial c'}{\partial c} + \frac{\partial F}{\partial c} = 0,$$

so dass also die Gleichung (d) zu ersetzen ist durch

$$\frac{\partial F_1}{\partial c}\frac{\partial F}{\partial c'} - \frac{\partial F_1}{\partial c'}\frac{\partial F}{\partial c} = 0. \tag{f}$$

Eliminirt man also c, c' aus (f), (b), (e), so erhält man die besondere Auflösung. Wir sind hiebei von der Konstanten c ausgegangen; wären wir von c' ausgegangen, so wären natürlich die Gleichungen (b) und (e) dieselben, und sonst hätte man bloss c und c' zu vertauschen. Da aber dadurch die Gleichung (f) sich nicht ändert, so ist unsere Behauptung gerechtfertigt.

Da, wie bereits mehrfach gesagt, die besondere Auflösung jedenfalls der Gleichung (a) genügt, man also für den durch diese Auflösung gegebenen Zusammenhang von x und y sicher die Gleichung (a) hat; man ferner diese Gleichung weiter differenziren darf, um $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ zu bestimmen, endlich aber der aus (a) folgende, nach gewöhnlicher Weise bestimmte Werth von $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ nicht übereinstimmen soll mit dem aus der besonderen Auflösung folgenden, so ersieht man wieder, wie in §. 88, dass man die besondere Auflösung auch erhalten kann dadurch, dass man die Gleichung (a) nochmals differenzirt, und dann mit ihr diejenigen Beziehungen verbindet, mittelst welcher aus der so differenzirten Gleichung (a) eine Bestimmung von $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ unmöglich wird.

Hat man eine besondere Auflösung gefunden, die $\frac{\partial y}{\partial x}$ enthält, und integrirt diese Gleichung, so erhält man eine Gleichung zwischen x und y mit einer Konstanten, die eine besondere Auflösung von (a) ist. Hat die besondere Auflösung der ersten Ordnung selbst wieder eine besondere Auflösung, so ist letztere eine Gleichung zwischen x und y ohne willkürliche Konstante und das, was man füglich doppelt besondere Auflösung nennen könnte, in soferne sie der vorgelegten Gleichung genügt.

1.) $$\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^2 - \frac{2}{x}\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + 1 = 0$$

gibt $$\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{x}\frac{\partial y}{\partial x}\right)\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\left(\frac{1}{x^2}\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{1}{x}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right) = 0.$$

Hier ist eine Bestimmung von $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$ nicht möglich, wenn $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{x}\frac{\partial y}{\partial x}$, woraus, in die vorgelegte eingesetzt, folgt:

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 = x^2, \quad \frac{\partial y}{\partial x} = \pm x,$$

welche beide Werthe der vorgelegten Gleichung genügen. Da

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = \frac{\left(x\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\partial y}{\partial x}\right)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}{\left(x\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\partial y}{\partial x}\right)x} = \frac{1}{x}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

und wenn man $\frac{\partial y}{\partial x} = \pm x$ setzt, diese Gleichung nicht richtig ist, so ist $\frac{\partial y}{\partial x} = \pm x$ eine besondere Auflösung. Daraus folgt

$$y = \pm\frac{1}{2}x^2 + c$$

als besondere Auflösung der gegebenen Gleichung.

Das allgemeine Integral ergibt sich nach §. 83:

$$y = c + c'x + \frac{1}{12c'}x^3.$$

2.) Die Gleichung

$$x\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + 2\frac{\partial y}{\partial x} = 0$$

hat zum allgemeinen Integral $y = c + \frac{c'}{x}$ (§. 76). Daraus folgt $\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{c'}{x^2}$, $c' = -x^2\frac{\partial y}{\partial x}$, $y = c - x\frac{\partial y}{\partial x}$, woraus keine besondere Auflösung folgt, wie denn diese Gleichung keine zulässt.

3.) Die Gleichung

$$\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x} - x\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)^2 - \frac{1}{2}x^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + x\frac{\partial y}{\partial x} - y = 0 \qquad (g)$$

gibt $$\left(2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - 2x\frac{\partial y}{\partial x} + 2x^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{2}x^2\right)\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = 0\left(\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = 0\right),$$

so dass eine besondere Auflösung durch

$$(2 + 2x^2)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 2x\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{1}{2}x^2$$

gegeben seyn kann. Eliminirt man $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ mittelst dieser Gleichung aus der vorgelegten, so erhält man

$$4\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + 2x\frac{\partial y}{\partial x}(x^2+2) - 4y(1+x^2) - \frac{1}{4}x^4 = 0. \qquad (h)$$

Diese Gleichung gibt

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{x(x^2+2)}{4} \pm \frac{1}{4}\sqrt{(1+x^2)(16y+x^4+4x^2)},$$

woraus, wenn $16y + x^4 + 4x^2 = z^2$, $\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{2}x = \frac{z}{8}\frac{\partial z}{\partial x}$:

$$\frac{1}{8}z\frac{\partial z}{\partial x} = \pm\frac{1}{4}z\sqrt{1+x^2}, \quad z = \pm 2\int\sqrt{1+x^2}\,\partial x = \pm[x\sqrt{1+x^2} + l(x+\sqrt{1+x^2})] + c,$$

d. h. $$y = -\frac{1}{16}x^4 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{16}[x\sqrt{1+x^2} + l(x+\sqrt{1+x^2}) + c]^2. \qquad (h')$$

Zieht man hieraus $\frac{\partial y}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, so genügen sie der Gleichung (g), geben aber nicht $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0$, so dass also (h′) eine besondere Auflösung von (h) ist. Als besondere Auflösung von (h) ergibt sich nach §. 87:

$$y = -\frac{1}{16}x^4 - \frac{1}{4}x^2, \qquad (h'')$$

welche Gleichung wohl der (h) genügt, nicht aber der (g).

Das allgemeine Integral von (g) ist übrigens (§. 82, III oder §. 83):

$$y = \frac{1}{2}cx^2 + c'x + c^2 + c'^2.$$

Wir wollen hier noch zum Schlusse dieses Abschnitts die in Wahrheit zu §. 88 gehörige Aufgabe lösen: In der Gleichung

$$F(x, y, a, b) = 0, \qquad (m)$$

in der gewisse Konstanten a, b vorkommen, diese so gegen einander zu bestimmen, damit der aus (m) hervorgehenden Differentialgleichung erster Ordnung die gegebene Gleichung

$$\varphi(x, y) = 0 \qquad (n)$$

als besondere Auflösung zukomme.

Differenzirt man (m), so hat man

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} = 0, \qquad (m')$$

aus welcher Gleichung a, und das von a abhängige b, mittelst (m) zu eliminiren sind. Soll aber (n) eine besondere Auflösung seyn, so muss der aus

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} = 0$$

folgende Werth von $\frac{\partial y}{\partial x}$ der vorhergehenden Differentialgleichung genügen. Man muss also haben

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y}, \qquad (i)$$

in welcher Gleichung a durch (m) zu ersetzen ist. Die Gleichungen (m), (n), (i) müssen also zugleich bestehen; eliminirt man mithin zwischen ihnen x und y, so erhält man diejenige Gleichung, die den Zusammenhang zwischen a und b gibt.

Soll z. B. der aus $y = ax + b$ hervorgehenden Differentialgleichung als besondere Auflösung zugehören $x^2 + y^2 - r^2 = 0$, so ist jetzt x und y zu eliminiren aus:

$$y = ax + b,\ x^2 + y^2 = r^2,\ x + ay = 0, \text{ woraus } b^2 = (1 + a^2)r^2$$

also muss $y = ax + r\sqrt{1+a^2}$ seyn, und der hieraus folgenden Gleichung gehört wirklich $x^2 + y^2 = r^2$ als besondere Auflösung zu (§. 70, Nr. 14).

Man sieht leicht, dass die hier behandelte Aufgabe, geometrisch gefasst, auch die ist: b als von a abhängig, so zu bestimmen, dass die durch (m) ausgedrückten Kurven die durch (n) ausgedrückte Kurve zur einhüllenden haben.

Wäre etwa die (m)

$$y^2 = ax + b,$$

so drückt sie Parabeln aus, und wenn der Kreis $x^2 + y^2 - r^2 = 0$ die einhüllende Kurve seyn sollte, so wären x und y zu eliminiren aus:

$$y^2 = ax + b, \quad x^2 + y^2 = r^2, \quad y(2x + a) = 0.$$

Die letzte Gleichung zerfällt in zwei: $y=0$, $2x+a=0$. Die erste gäbe $b^2 = a^2r^2$, $b = \pm ar$; die zweite $b = \frac{a^2}{4} + r^2$, so dass also

$$y^2 = ax \pm ar, \text{ oder } y^2 = ax + \frac{a^2}{4} + r^2,$$

von welchen Gleichungen jedoch nur die letzte die Aufgabe löst.

Fünfzehnter Abschnitt.

Integration der gleichzeitigen Differentialgleichungen.

§. 90.

Seyen y, z, u, ... Funktionen von x, die aus folgenden gleichzeitig bestehenden Gleichungen zu bestimmen sind:

$$\left.\begin{array}{l} f\left(x, y, \frac{\partial y}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^m y}{\partial x^m}, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^n z}{\partial x^n}, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^r u}{\partial x^r}, \ldots\right) = 0 \\ f'\left(x, y, \frac{\partial y}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^\mu y}{\partial x^\mu}, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^\nu z}{\partial x^\nu}, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^\varrho u}{\partial x^\varrho}, \ldots\right) = 0, \text{u. s. w.} \end{array}\right\} \text{(a)}$$

so heissen wir diese Gleichungen, deren Anzahl dieselbe ist, wie die der zu bestimmenden Funktionen y, z, u, ..., gleichzeitige Differentialgleichungen, und werden unter ihren Integralgleichungen diejenigen Gleichungen zwischen y, z, ..., und x verstehen, welche die (a) vollständig ersetzen, so dass nicht nur diese Gleichungen (a) daraus sich ergeben, sondern auch alle anderen Gleichungen, die durch etwaige weitere Differentiation aus (a) folgen. In der Allgemeinheit, wie die Gleichungen (a) aufgestellt sind, lassen sich gleichzeitige Differentialgleichungen nicht integriren, so dass für die wirkliche Durchführung der Integration die einzelnen Fälle geschieden werden müssen. Dagegen aber werden wir an den allgemeinen Formen auch die allgemeine Gestalt der Integralgleichungen besser erkennen können, wozu wir nun vorerst übergehen wollen.

Gesetzt, zwischen den n abhängig Veränderlichen y, z, u, ... und der unabhängig Veränderlichen x seyen n gleichzeitige Differentialgleichungen gegeben, in denen nur Differentialquotienten der ersten Ordnung vorkommen und die wir durch

$$\left.\begin{array}{l} f\left(x, y, z, u, \ldots, \frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial x}, \ldots\right) = 0 \\ f_1\left(x, y, z, u, \ldots, \frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial x}, \ldots\right) = 0 \\ \vdots \\ f_n\left(x, y, z, u, \ldots, \frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial x}, \ldots\right) = 0 \end{array}\right\} \text{(b)}$$

vorstellen wollen. Denkt man sich diese Gleichungen nach $\frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial x}, \ldots\ldots$ aufgelöst, so dass etwa

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \varphi_1, \frac{\partial z}{\partial x} = \varphi_2, \frac{\partial u}{\partial x} = \varphi_3, \ldots\ldots, \qquad (c)$$

wo $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots\ldots$ bekannte Funktionen von x, y, z, u, . . . sind, so wird man mittelst dieser Gleichungen für jeden Werth von x die zugehörigen Werthe von y, z, u, ... konstruiren können, wenn man nur für einen bestimmten Werth a von x die Werthe von y, z, u, ... willkürlich gewählt hat. Denn dann geben (§. 65) die (c) die zu $x = a$ gehörigen Werthe von $\frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial x}, \ldots\ldots$, also dadurch die zu $x = a + \Delta x$ gehörigen Werthe von y, z, ..., wenn Δx unendlich klein. Dann geben wieder die (c) die zu $x = a + \Delta x$ gehörigen Werthe von $\frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial x}, \ldots\ldots$, woraus dann wieder die zu $x = a + 2\Delta x$ gehörenden Werthe von y, z, u, ... folgen u. s. w. Die beliebig gewählten Werthe von x, z, u, ... sind die willkürlichen Konstanten, und es folgt hieraus, dass in den allgemeinen Integralen der Gleichungen (b) n verschiedene willkürliche Konstanten vorkommen müssen.

Dasselbe Resultat kann man auch auf einem etwas verschiedenen Wege erhalten. Man differenzire nämlich jede der Gleichungen (b) noch $n-1$ mal nach x, so erhält man, mit den Gleichungen (b), ein System von n^2 Gleichungen, in denen die Differentialquotienten von y, z, u, . . . bis zur n^{ten} Ordnung ansteigen. Aus diesen n^2 Gleichungen eliminire man die Grössen $z, \frac{\partial z}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^n z}{\partial x^n}, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^n u}{\partial x^n}, \ldots\ldots$, die der Anzahl nach $(n-1)(n+1) = n^2 - 1$ sind, so dass die Elimination immer möglich ist, und wird eine Gleichung zwischen x und y der n^{ten} Ordnung:

$$\psi\left(x, y, \frac{\partial y}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^n y}{\partial x^n}\right) = 0 \qquad (d)$$

erhalten, die nothwendig aus (b) folgt. Kann man diese Gleichung integriren, so erhält man eine Gleichung zwischen x und y mit n willkürlichen Konstanten, und da bereits behufs der Elimination z, u, ... durch x, y, $\frac{\partial y}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^n y}{\partial x^n}$ ausgedrückt waren, so kennt man sofort auch diese Grössen als Funktionen von x und der n willkürlichen Konstanten, ohne dass eine weitere Konstante eingeführt würde. Hieraus folgt wieder, dass n willkürliche Konstanten erscheinen müssen, wenn man die allgemeinen Integrale wirklich gefunden haben will.

Anm. Wir wollen hier eine gelegentliche Bemerkung beifügen. Die Gleichungen (b) als gegeben vorausgesetzt, sind alle diejenigen Gleichungen richtig, die wir durch Differentiation daraus ziehen, weil eben x eine unabhängig (also willkürlich) Veränderliche ist (§. 12); alle Gleichungen, die wir, ohne gegen die Regeln der Rechnung zu verstossen, aus ihnen ziehen, sind ebenfalls richtig, also namentlich die Gleichung (d), so dass y als Funktion von x

ganz sicher dieser Gleichung genügt, so wie eben so sicher $z, u, \ldots$ durch $x, y, \frac{\partial y}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^n y}{\partial x^n}$, wie gefunden wurde, ausgedrückt werden können. Integrirt man die (d), so ist die so erhaltene Gleichung zwischen y und x eine richtige; ob aber die eingetretenen Konstanten alle willkürlich bleiben oder nicht, ist eine ganz andere Frage. Die Integralgleichung von (d) ist nämlich eine richtige Gleichung zwischen x und y, wie auch immer die Konstanten bestimmt werden, und es wäre daher wohl möglich, dass einige dieser Konstanten, weil y und x auch noch anderen Bedingungen genügen müssen, nicht mehr willkürlich blieben, wie wir dies etwa in §. 82 zu sehen Gelegenheit hatten. Diese Bedingungen sind nun, dass die so gefundenen Werthe von $y, z, u, \ldots,$ in x den Gleichungen (b) genügen. Setzt man also diese Werthe in die (b) ein, so müssen die letzteren für jeden möglichen Werth von x erfüllt seyn, entweder, indem alle n Konstanten ganz unabhängig bleiben, oder indem gewisse Beziehungen zwischen ihnen festgestellt werden müssen, mittelst deren es möglich ist, einige derselben aus den andern zu finden. Im letzteren Falle würden dann in die allgemeinen Integrale der (b) weniger als n willkürliche Konstanten eintreten; aber da ja diese Integrale n solcher Konstanten verlangen, so werden keine Beziehungen obwalten, d. h. die durch Integration von (d) gefundenen willkürlichen Konstanten werden sämmtlich von einander unabhängig bleiben.

Wir wollen nun annehmen, die n gleichzeitigen Differentialgleichungen zwischen den n abhängig Veränderlichen $y, z, u, \ldots$ und der unabhängig Veränderlichen x übersteigen die erste Ordnung, d. h. es kommen auch noch höhere Differentialquotienten dieser abhängig Veränderlichen vor. Wir wollen ferner annehmen, der höchste Differentialquotient von y sey der m^{te}, der von z der r^{te}, der von u der s^{te} u. s. w., und in jeder der vorgelegten Gleichungen kommen diese höchsten Differentialquotienten oder doch einer derselben vor. Diese Gleichungen seyen nun

$$f_1 = 0,\ f_2 = 0, \ldots, f_n = 0, \qquad \text{(e)}$$

wo also $f_1, \ldots, f_n$ Funktionen von $x, y, z, u, \frac{\partial y}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^m y}{\partial x^m}, \frac{\partial z}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^r z}{\partial x^r}, \frac{\partial u}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^s u}{\partial x^s}, \ldots$ sind. Man setze nun

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial y}{\partial x} = y_1, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = y_2, \ldots, \frac{\partial^{m-1} y}{\partial x^{m-1}} = y_{m-1};\ \frac{\partial z}{\partial x} = z_1, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z_2, \ldots, \frac{\partial^r z}{\partial x^r} = z_{r-1}; \\ \frac{\partial u}{\partial x} = u_1, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u_2, \ldots, \frac{\partial^{s-1} u}{\partial x^{s-1}} = u_{s-1};\ \ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}\right\} \text{(f)}$$

so werden die Gleichungen (e) nebst (f) folgendes Gleichungssystem bilden:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial y}{\partial x} = y_1, \frac{\partial y_1}{\partial x} = y_2, \ldots, \frac{\partial y_{m-2}}{\partial x} = y_{m-1},\ f_1\left(x, y, y_1, \ldots, y_{m-1}, \frac{\partial y_{m-1}}{\partial x}, z, z_1, \ldots, z_{r-1}, \frac{\partial z_{r-1}}{\partial x}, \ldots\right) = 0, \\ \frac{\partial z}{\partial x} = z_1, \frac{\partial z_1}{\partial x} = z_2, \ldots, \frac{\partial z_{r-2}}{\partial x} = z_{r-1},\ f_2\left(x, y, \ldots y_{m-1}, \frac{\partial y_{m-1}}{\partial x}, z, \ldots, \frac{\partial z_{r-1}}{\partial x}, \ldots\right) = 0 \\ \qquad \vdots \end{array}\right\} \text{(g)}$$

worin $y_1, \ldots, y_{m-1}, \ldots$ als weitere Veränderliche angesehen werden, und worin bloss Differentialquotienten der ersten Ordnung vorkommen. Die

Anzahl der Veränderlichen, mit Ausschluss von x, ist $m+r+s+\ldots$, und eben so viele Gleichungen erster Ordnung hat man in (g). Behandelt man nun diese $m+r+s+\ldots$ Gleichungen (g) wie oben die (b), so erhält man ein System von $m+r+s+\ldots$ Integralen mit eben so vielen willkürlichen Konstanten, als die allgemeinen Integrale der Gleichungen (e). Dass aber so viele Konstanten nöthig sind, ist leicht zu übersehen. Denn aus (e) kann man $\frac{\partial^m y}{\partial x^m}, \frac{\partial^r z}{\partial x^r}, \frac{\partial^s u}{\partial x^s}, \ldots$ ziehen, ausgedrückt durch $x, y, z, u, \ldots$ und die Differentialquotienten dieser letzteren Grössen. Nimmt man also die $m+r+s+\ldots$ Grössen $y, \frac{\partial y}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^{m-1} y}{\partial x^{m-1}}, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^{r-1} z}{\partial x^{r-1}}, \ldots$ für $x=a$ willkürlich an, so kann man daraus (§. 72) $y, z, \ldots$ für jeden Werth von x konstruiren, so dass diese Annahme nothwendig ist.

Unsere ganze Beweisführung setzt wesentlich voraus, dass in jeder der Gleichungen (e) wenigstens einer der Differentialquotienten höchster Ordnung vorkomme; andernfalls würden unter den Gleichungen (g) solche seyn, die gar keine Differentialquotienten enthielten. Ist dies nun der Fall, d. h. sind unter den Gleichungen (e) solche, die keinen der höchsten Differentialquotienten enthalten, so kann man durch mehrmalige Differentiation der betreffenden Gleichungen diesen Zweck immer erreichen; dann aber werden die $m+r+s+\ldots$ Konstanten nicht mehr alle willkürlich bleiben, sondern gewissen Beziehungen genügen müssen, die man immer aus der Bedingung finden wird, dass die gefundenen Resultate den gegebenen Gleichungen identisch, d. h. für alle möglichen Werthe von x, genügen müssen. Ehe wir zu Beispielen für diese allgemeinen Fälle übergehen, wollen wir die linearen Differentialgleichungen besonders betrachten.

§. 91.

Gleichzeitige lineare Differentialgleichungen der ersten Ordnung heissen wir diejenigen, in denen die abhängig Veränderlichen und ihre (ersten) Differentialquotienten weder mit einander multiplizirt, noch auch in höhere Potenzen erhoben sind. Solche Gleichungen können nun unter folgende Form gebracht werden:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\partial y}{\partial x}+a_1 y+b_1 z+c_1 u+,\ldots=X_1,\\ \frac{\partial z}{\partial x}+a_2 y+b_2 z+c_2 u+\ldots=X_2,\\ \frac{\partial u}{\partial x}+a_3 x+b_3 z+c_3 u+\ldots=X_3,\text{ u. s. w.}\end{array}\right\}\text{(a)}$$

worin $a, b, c, \ldots$ Konstanten, $X_1, X_2, \ldots$ blosse Funktionen von x sind. Ein solches System, wie (a), kann nun immer nach folgender Methode integrirt werden: Man multiplizire die zweite der Gleichungen (a) mit der noch unbestimmten Konstanten α_2, die dritte mit $\alpha_3, \ldots$, die letzte mit α_n und setze

$$\left.\begin{array}{l} X_1 + \alpha_2 X_2 + \alpha_3 X_3 + \ldots = X, \\ a_1 + a_2 \alpha_2 + a_3 \alpha_3 + \ldots = \alpha, \\ b_1 + b_2 \alpha_2 + b_3 \alpha_3 + \ldots = \alpha \alpha_2, \\ c_1 + c_2 \alpha_2 + c_3 \alpha_3 + \ldots = \alpha \alpha_3. \\ \vdots \\ y + \alpha_2 z + \alpha_3 u + \ldots = \varphi, \end{array}\right\} \quad (b)$$

so werden die Gleichungen (a), wenn man sie addirt, geben:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \alpha [y + \alpha_2 z + \alpha_3 u + \ldots] = X,$$

d. h.

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \alpha \varphi = X. \qquad (c)$$

Aus dieser Gleichung folgt (§. 66, I):

$$\varphi = e^{-\alpha x} [C + \int X e^{\alpha x} \partial x], \qquad (c')$$

und es handelt sich vor Allem darum, ob mittelst der Gleichungen (b) die Bestimmung von $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n, \alpha$ möglich ist. Nun hat man

$$\left.\begin{array}{l} (b_2 - \alpha)\alpha_2 + b_3 \alpha_3 + \ldots = -b_1, \\ c_2 \alpha_2 + (c_3 - \alpha)\alpha_3 + \ldots = -c_1, \\ \vdots \end{array}\right\} (b')$$

welche Gleichungen der Anzahl nach n—1 sind, und zur Bestimmung der Grössen $\alpha_2, \alpha_3, \ldots \alpha_n$ durch die Konstanten in (a) und α vollkommen ausreichen. Setzt man die so gefundenen Werthe von $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$ in die Gleichung

$$a_1 + a_2 \alpha_2 + a_3 \alpha_3 + \ldots = \alpha,$$

so erhält man eine Gleichung, die ausser den Konstanten der Gleichung (a) bloss noch α enthält. Diese Gleichung ist aber nothwendig vom n^{ten} Grade in Bezug auf α, wie man sich mittelst der Kramer'schen Regel für die Auflösung der Gleichungen (b') überzeugt. („Grundzüge" S. 204.) Sie sey

$$A + B\alpha + C\alpha^2 + \ldots + M\alpha^n = 0, \qquad (d)$$

so wird diese Gleichung im Allgemeinen n Werthe von α liefern. Zu jedem Werthe von α gehört aber nach (b') ein einziger bestimmter Werth jeder der Grössen $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$, so dass man also auch n Systeme von solchen Werthen bekommt. Setzt man nun in (c') einen der n Werthe von α und, wie natürlich, die zugehörigen Werthe von $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$, so hat man:

$$y + \alpha_2 z + \alpha_3 u + \ldots = e^{-\alpha x} [C + \int X e^{\alpha x} \partial x]. \qquad (e)$$

Solcher Gleichungen hat man n (für die n Werthe von α), und da in jeder die Konstante C eine andere seyn wird, so erhält man somit die allgemeinen Integrale der Gleichungen (a) mit n willkürlichen Konstanten.

Am Besten wird man immer verfahren, wenn man in (c') für $\alpha_2, \alpha_3, \ldots$ die bereits durch die Auflösung von (b') gefundenen Werthe von $\alpha_2, \alpha_3, \ldots$ in α einsetzt und nachher α die verschiedenen Werthe beilegt. Folgt aus (b'):

$$\alpha_2 = \psi_2(\alpha), \ \alpha_3 = \psi_3(\alpha), \ldots, \ \alpha_n = \psi_n(\alpha),$$

wo die Grössen $\psi_2(\alpha), \ldots, \psi_n(\alpha)$ für jeden Werth von α einen einzigen bestimmten Werth erlangen, so ist die (e):

$$y + z\psi_2(\alpha) + u\psi_3(\alpha) + \ldots = e^{-\alpha x}\left[C + \int X e^{\;\;x} \partial x\right]$$

d. h.

$$y + z\psi_2(\alpha) + u\psi_3(\alpha) + \ldots = e^{-\alpha x}\left[C + \int (X_1 + X_2\psi_2(\alpha) + X_3\psi_3(\alpha) + \ldots) e^{\alpha x} \partial x\right]. \quad (e')$$

Wir haben hiebei offenbar stillschweigend vorausgesetzt, die sämmtlichen Wurzeln der Gleichung (d) seyen reell und verschieden, und müssen also noch folgende besondere Betrachtungen anstellen, wobei wir zugleich an §. 75 erinnern wollen.

1) Es seyen zwar die sämmtlichen Wurzeln der Gleichung (d) verschieden, aber einige davon seyen imaginär. Ist nun eine der imaginären Wurzeln $= \beta + \gamma i$, so kommt nothwendig eine zweite noch vor, die $= \beta - \gamma i$ ist. Gesetzt nun, der Bequemlichkeit der Rechnung halber, man habe in der Gleichung (e′) den etwa vorkommenden Nenner durch Multiplikation weggeschafft, so werden in dem aus (a) folgenden Systeme von n Gleichungen zwei seyn, die man erhält, wenn man $\alpha = \beta \pm \gamma i$ setzt. Dadurch aber hat man zwei Gleichungen der Form

$$U + Vi = 0, \quad U - Vi = 0,$$

welche geben:

$$U = 0, \quad V = 0,$$

mit den zwei willkürlichen Konstanten C', C'', so dass diese letzteren Gleichungen statt der betreffenden zwei zu wählen sind, und zwei Konstanten enthalten.

2) Die Wurzeln der Gleichung (d) seyen zwar sämmtlich reell, aber nicht alle von einander verschieden.

Stellen wir die Gleichung (e′), nachdem sie etwa mit dem gemeinschaftlichen Nenner multiplizirt worden, unter der Form

$$F(\alpha) = 0 \qquad (f)$$

vor, wo wir uns also Alles auf eine Seite gebracht denken, so muss man in (f) für α die aus (d) gezogenen Werthe von α setzen, dabei C als Funktion von α ansehen, so dass C für einen andern Werth von α auch einen andern Werth erlangt, wo dann schliesslich diese Werthe von C willkürliche Konstanten sind. Gesetzt nun, α', α'' seyen zwei Werthe von α, die aus (d) folgen, und sey

$$\alpha'' = \alpha' + \Delta\alpha,$$

so sind die betreffenden zwei Gleichungen aus (f):

$$F(\alpha') = 0, \quad F(\alpha' + \Delta\alpha) = 0,$$

wo dann C' die eine Konstante, $C'' = C' + \Delta C$ die andere seyn wird. Statt dieser zwei Gleichungen kann man offenbar auch die folgenden zwei setzen:

$$F(\alpha') = 0, \quad \frac{F(\alpha' + \Delta\alpha) - F(\alpha')}{\Delta\alpha} = 0,$$

welche jene vollständig ersetzen, und wobei nur zu beachten ist, dass $\frac{\Delta C'}{\Delta\alpha}$, was auch $\Delta\alpha$ sey, eine ganz willkürliche Konstante seyn wird. Lässt man hier $\Delta\alpha$ unbegränzt abnehmen, so folgt hieraus, dass man die angegebenen zwei Gleichungen ersetzen kann durch

$$F(\alpha')=0,\ \frac{\partial}{\partial\alpha'}[F(\alpha')]=0,$$

worin C' auch als Funktion von α' zu behandeln ist, und $\frac{\partial C'}{\partial\alpha'}$ eine neue willkürliche Konstante bildet. Wird aber $\Delta\alpha$ unendlich klein, so sind α' und α'' einander gleich, woraus nun folgt, dass für den Fall zweier gleicher reeller Wurzeln von (d) statt der einen Gleichung (e'), die man jetzt für beide gleichen Wurzeln (α') erhält, gesetzt werden muss

$$F(\alpha)=0,\ \frac{\partial}{\partial\alpha}[F(\alpha)]=0,\ \alpha=\alpha',$$

wo C als Funktion von α zu betrachten, und $\frac{\partial C}{\partial\alpha}$ eine neue willkürliche Konstante ist. Sind drei Wurzeln gleich α', so hat man ebenso:

$$F(\alpha)=0,\ \frac{\partial}{\partial\alpha}F(\alpha)=0,\ \frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}F(\alpha)=0,\ \alpha=\alpha',$$

wo $\frac{\partial C}{\partial\alpha},\ \frac{\partial^2 C}{\partial\alpha^2}$ zwei neue Konstanten sind, u. s. w.

3) Sind endlich gleiche imaginäre Wurzeln der Gleichung (d) vorhanden, so wird man aus der Verbindung von Nr. 1 und 2 leicht das einschlägliche Verfahren zu entnehmen haben. Wir haben seither vorausgesetzt, die vorgelegten linearen Differenrialgleichungen seyen bloss der ersten Ordnung. Dies ist jedoch nicht nothwendig; sind sie auch von höherer Ordnung, so wird man, gemäss §. 90, dieselben immer auf die Form linearer Differentialgleichungen erster Ordnung zurückführen können, wo sodann das eben angegebene Verfahren wieder vollständig in sein Recht eintritt. Einige Beispiele mögen das Gesagte erläutern.

1.)
$$9\frac{\partial y}{\partial x}+4\frac{\partial z}{\partial x}+49y+44z=x,$$
$$7\frac{\partial y}{\partial x}+3\frac{\partial z}{\partial x}+38y+34z=e^x.$$

Die allgemeinen Integralgleichungen müssen zwei willkürliche Konstanten umfassen. Man hat zuerst

$$\frac{\partial y}{\partial x}+5y+4z=4e^x-3x,\ \frac{\partial z}{\partial x}+y+2z=7x-9e^x.$$

$5+\alpha_1=\alpha,\ 4+2\alpha_1=\alpha\alpha_1;\ \alpha_1=\alpha-5,\ \alpha^2-7\alpha+6=0;\ \alpha=6$ und 1; $\alpha_1=-1$ und 4.

$$X=4e^x-3x+\alpha_1(7x-9e^x)=(49-9\alpha)e^x+(7\alpha-38)x,\ \varphi=y+(\alpha-5)z.$$

$$\varphi=e^{-\alpha x}[C+\int\left\{(49-9\alpha)e^x+(7\alpha-38)x\right\}e^{\alpha x}\partial x]$$

$$\varphi=Ce^{-\alpha x}+\frac{49-9\alpha}{\alpha+1}e^x+\frac{7\alpha-38}{\alpha}x-\frac{7\alpha-38}{\alpha^2};$$

also hat man für $\alpha=6$ und 1:

$$\left.\begin{aligned}y+z&=C_1e^{-6x}-\frac{5}{7}e^x+\frac{2}{3}x-\frac{1}{9},\\ y-4z&=C_2e^{-x}+20e^x-31x+31,\end{aligned}\right|\begin{aligned}y&=\frac{4}{5}C_1e^{-6x}+\frac{1}{5}C_2e^{-x}+\frac{24}{7}e^x-\frac{17}{3}x+\frac{55}{9},\\ z&=-\frac{1}{5}C_2e^{-x}+\frac{1}{5}C_1e^{-6x}-\frac{29}{7}e^x+\frac{19}{2}x-\frac{56}{9}.\end{aligned}$$

2.)
$$9\frac{\partial y}{\partial x}+4\frac{\partial z}{\partial x}+31y+11z=0,$$
$$7\frac{\partial y}{\partial x}+3\frac{\partial z}{\partial x}+24y+8z=x,$$

woraus $$\frac{\partial y}{\partial x}+3y-z=4x,\quad \frac{\partial z}{\partial x}+y+5z=-9x.$$

$$-1+5\alpha_2=\alpha\alpha_2,\ 3+\alpha_2=\alpha;\ \alpha_2=\alpha-3,\ \alpha^2-8\alpha+16=0,\ \text{d. h. } (\alpha-4)^2=0,$$
$\alpha=4$ doppelt.

$$X=4x-9\alpha_2 x=(31-9\alpha)x,\ \varphi=y+(\alpha-3)z,\ \int X e^{\alpha x}\partial x=\frac{(31-9\alpha)}{\alpha}xe^{\alpha x}-\frac{31-9\alpha}{\alpha^2}e^{\alpha x}.$$

$$y+(\alpha-3)z=Ce^{-\alpha x}+\frac{31-9\alpha}{\alpha}x-\frac{31-9\alpha}{\alpha^2},$$

$$\alpha^2 y+(\alpha^3-3\alpha^2)z=Ce^{-\alpha x}+(31\alpha-9\alpha^2)x-(31-9\alpha),$$

wenn wir $C\alpha^2=C$ setzen.

Differenzirt man nach α, so hat man:

$$2\alpha y+(3\alpha^2-6\alpha)z=-Cxe^{-\alpha x}+C'e^{-\alpha x}+(31-18\alpha)x+9,$$

und wenn man $\alpha=4$ setzt:

$$16y+16z=Ce^{-4x}-20x+5,\ 8y+24z=-Cxe^{-4x}+C'e^{-4x}-41x+9,$$

woraus:

$$y=\frac{Ce^{-4x}}{32}(3+2x)-\frac{C'}{16}e^{-4x}+\frac{11}{16}x-\frac{3}{32},\ z=-\frac{Ce^{-4x}}{32}(1+2x)+\frac{C'e^{-4x}}{16}-\frac{31}{16}x+\frac{13}{32}.$$

3.) $$\frac{\partial y}{\partial x}+3y-2z=x,\ \frac{\partial z}{\partial x}+y+5z=e^x.$$

$$3+\alpha_2=\alpha,\ -2+5\alpha_2=\alpha\alpha_2;\ \alpha_2=\alpha-3,\ \alpha^2-8\alpha+17=0,\ \alpha=4\pm i,$$
$$X=x+(\alpha-3)e^x,\ \varphi=y+(\alpha-3)z.$$

$$y+(1+i)z=e^{-\alpha x}\left[C+\int Xe^{\alpha x}\partial x\right]=e^{-4x}[\cos x-i\sin x]\,[C+C'i$$
$$+\int\left\{x+(1+i)e^x\right\}e^{(4+i)x}\partial x]=e^{-4x}(\cos x-i\sin x)[C+C'i+\frac{1+i}{5+i}e^{(5+i)x}$$
$$+\frac{xe^{(4+i)x}}{4+i}-\frac{e^{(4+i)x}}{(4+i)^2}\Big]=(\cos x-i\sin x)\,[(C+C'i)e^{-4x}+\frac{6+4i}{26}e^x(\cos x+i\sin x)$$
$$+\frac{(4-i)x}{17}(\cos x+i\sin x)-\frac{15-8i}{17^2}(\cos x+i\sin x)].$$

Multiplizirt man die zweite Seite aus und setzt beiderseitig das Reelle und Imaginäre gleich, so erhält man

$$y+z=(C\cos x+C'\sin x)e^{-4x}+\frac{3}{13}e^x+\frac{4}{17}x-\frac{15}{17^2},$$
$$z=(C'\cos x-C\sin x)e^{-4x}+\frac{2}{13}e^x-\frac{1}{17}x+\frac{8}{17^2}.$$

4.) $$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}+ax+by+cz=T_1,$$
$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+a'x+b'y+c'z=T_2$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}+a''x+b''y+c''y=T_3,$$

wo T_1, T_2, T_3 blosse Funktionen von t sind. Bei der hier vorkommenden besonderen Form kann man das obige Verfahren ebenfalls anwenden, nur wird in der Gleichung (c) $\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}$ an die Stelle von $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ treten. Man hat also:

$$a+a'\alpha_2+a''\alpha_3=\alpha,\ b+b'\alpha_2+b''\alpha_3=\alpha\alpha_2,\ c+c'\alpha_2+c''\alpha_3=\alpha\alpha_3,$$

woraus $\alpha_2 = \frac{c b'' - b(c'' - \alpha)}{(b' - \alpha)(c'' - \alpha) - b'' c'}$, $\alpha_3 = \frac{b c' - c(b' - \alpha)}{(b' - \alpha)(c'' - \alpha) - b'' c'}$,

$$(a-\alpha)(b'-\alpha)(c''-\alpha) - b''c'(a-\alpha) - a'b(c''-\alpha) - a''c(b'-\alpha) + a'cb'' + a''bc' = 0,$$

welch letztere Gleichung drei Werthe für α gibt, woraus dann auch drei Werthe für α_2, α_3 folgen. Ist nun $\varphi = x + \alpha_2 y + \alpha_3 z$, so hat man für $T = T_1 + \alpha_2 T_2 + \alpha_3 T_3$:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \alpha \varphi = T,$$

woraus (§. 81, Nr. 1), da dort $m_1 = \sqrt{-\alpha}$, $m_2 = -\sqrt{-\alpha}$:

$$x + \alpha_2 y + \alpha_3 z = \frac{1}{2\sqrt{-\alpha}}\left[e^{t\sqrt{-\alpha}}\int T e^{-t\sqrt{-\alpha}}\partial t - e^{-t\sqrt{-\alpha}}\int T e^{t\sqrt{-\alpha}}\partial t\right]$$
$$+ C e^{t\sqrt{-\alpha}} + C' e^{-t\sqrt{-\alpha}}.$$

Setzt man hier für α seine drei Werthe, und natürlich für α_2, α_3 die entsprechenden, so erhält man drei Gleichungen mit sechs willkürlichen Konstanten, die die Aufgabe lösen.

Anm. Die Gleichungen

$$A\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + B\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + C\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \ldots + ax + by + cz + \ldots = T,$$
$$A'\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + B'\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + C'\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \ldots + a'x + b'y + c'z + \ldots = T',$$
$$A''\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + B''\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + C''\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + \ldots + a''x + b''y + c''z + \ldots = T'',$$

welche in der Mechanik vorkommen (Lagrange, Mécanique analytique, VI section; Poisson, Mechanik, II, §. 545), werden in derselben Weise behandelt. Man zieht aus ihnen $\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$, ... und erhält genau die Form der oben behandelten Gleichungen. Sind die Werthe von α positiv, so ist $\sqrt{-\alpha}$ imaginär und $e^{t\sqrt{-\alpha}}$ wird zu $\cos(t\sqrt{\alpha}) + i\sin(t\sqrt{\alpha})$, wie bekannt.

5.)
$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} - \frac{a+b-c}{b} m \frac{\partial y}{\partial t} - 4m^2 \frac{a-c}{b} x = 0,$$
$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{a+b-c}{b} m \frac{\partial x}{\partial t} - m^2 \frac{b-c}{a} y = 0,$$

welche Gleichungen in den Untersuchungen über die Mondsbewegung vorkommen. (Vergl. Pontécoulant: Théorie analytique du système du monde, II, §. 238.)

Man setze $\frac{\partial x}{\partial t} = x_1$, $\frac{\partial z}{\partial t} = y_1$, so hat man vier abhängig Veränderliche: x, y, x_1, y_1 und dazu die folgenden Gleichungen:

$$\frac{\partial x}{\partial t} - x_1 = 0,\ \frac{\partial y}{\partial t} - y_1 = 0,\ \frac{\partial x_1}{\partial t} - \frac{a+b-c}{b} m y_1 - 4m^2 \frac{a-c}{b} x = 0,$$
$$\frac{\partial y_1}{\partial t} + \frac{a+b-c}{a} m x_1 - \frac{b-c}{a} m^2 y = 0.$$

Daraus nun, wenn man die vier Grössen in folgender Weise ordnet: x, y, x_1, y_1:

$$-4m^2\frac{a-c}{b}\alpha_2 = \alpha,\ -\frac{b-c}{a} m^2 \alpha_4 = \alpha\alpha_3,\ -1 + \frac{a+b-c}{a} m \alpha_4 = \alpha\alpha_2,$$
$$-\alpha_3 - \frac{a+b-c}{b} m \alpha_2 = \alpha\alpha_4,$$

woraus folgt:

$$\alpha_2 = -\frac{\alpha b}{4m^2(a-c)},\ \alpha_4 = \frac{4m^2(a-c) - b\alpha^2}{4m^2(a-c)(a+b-c)} a,\ \alpha_3 = \frac{(b-c)[b\alpha^2 - 4m^2(a-c)]}{4m(a-c)(a+b-c)\alpha},$$

$$\alpha^4 + \left[\frac{(a+b-c)^2}{ab} - 4\frac{a-c}{b} - \frac{b-c}{a}\right]m^2\alpha^2 + 4\frac{a-c}{b}\frac{b-c}{a}m^4 = 0;\ X = 0;$$

$$\varphi = x + \alpha_2 y + \alpha_3 x_1 + \alpha_4 y_1.$$

Also $x + \frac{(b-c)[b\alpha^2 - 4m^2(a-c)]}{4m(a-c)(a+b-c)\alpha} y - \frac{b\alpha}{4m^2(a-c)} x_1 + \frac{4m^2(a-c) - b\alpha^2}{4m^3(a-c)(a+b-c)} a y_1$

$$= Ce^{-\alpha t}.$$

Die Grössen a, b, c sind immer positiv, eben so ist $c > b > a$; daraus folgt, dass wenn die obige biquadratische Gleichung nach α^2 aufgelöst wird, für α^2 zwei Werthe folgen werden, gegeben durch

$$\alpha_2 = \frac{\left\{\begin{array}{c} -\frac{1}{2}[(a+b-c)^2 + 4(c-a)a + (c-b)b] \\ \pm\sqrt{-4(c-a)(c-b)ab + \frac{1}{4}[(a+b-c)^2 + 4(c-a)a + c-b)b]^2} \end{array}\right\}}{ab} m^2,$$

welche Werthe, wie man sieht, reell und beide negativ sind, indem

$$-4(c-a)(c-b)ab + \frac{1}{4}[(a+b-c)^2 + 4(c-a)a + (c-b)b]^2 = \frac{1}{4}[(a+b-c)^2 + 4(c-a)a - (c-b)b]^2 + b(c-b)(a+b-c)^2.$$

Daraus folgt, dass die vier Werthe von α imaginär sind. Seyen dieselben also $= \pm\beta i, \pm\beta' i$, so hat man:

$$x + \frac{(b-c)[-b\beta^2 - 4m^2(a-c)]}{4m(a-c)(a+b-c)\beta i} y - \frac{b\beta i}{4m^2(a-c)} x_1 + \frac{4m^2(a-c) + b\beta^2}{4m^3(a-c)(a+b-c)} a y_1 = C_1(\cos\beta t - i\sin\beta t),$$

$$x - \frac{(b-c)[-b\beta^2 - 4m^2(a-c)]}{4m(a-c)(a+b-c)\beta i} y + \frac{b\beta i}{4m^2(a-c)} x_1 + \frac{4m^2(a-c) + b\beta^2}{4m^3(a-c)(a+b-c)} a y_1 = C_2(\cos\beta t + i\sin\beta t),$$

$$x + \frac{(b-c)[-b\beta'^2 - 4m^2(a-c)]}{4m(a-c)(a+b-c)\beta' i} y - \frac{b\beta' i}{4m^2(a-c)} x_1 + \frac{4m^2(a-c) + b\beta'^2}{4m^3(a-c)(a+b-c)} a y_1 = C_3(\cos\beta' t - i\sin\beta' t),$$

$$x - \frac{(b-c)[-b\beta'^2 - 4m^2(a-c)]}{4m(a-c)(a+b-c)\beta' i} y + \frac{b\beta' i}{4m^2(a-c)} x_1 + \frac{4m^2(a-c) + b\beta'^2}{4m^3(a-c)(a+b-c)} a y_1 = C_4(\cos\beta' t + \sin\beta' t),$$

woraus, wenn man $C_1 = C + C'i$, $C_2 = C - C'i$, $C_3 = C_1 + C_1'i$, $C_4 = C_1 - C_1'i$ setzt:

$$x + \frac{4m^2(a-c) + b\beta^2}{4m^3(a-c)(a+b-c)} a y_1 = C\cos\beta t + C'\sin\beta t,\quad x + \frac{4m^2(a-c) + b\beta'^2}{4m^3(a-c)(a+b-e)} a y_1 = C_1\cos\beta' t + C'_1\sin\beta' t,$$

$$\frac{(b-c)[b\beta^2 + 4m^2(a-c)]}{4m(a-c)(a+b-c)\beta} y - \frac{b\beta}{4m^2(a-c)} x_1 = -C\sin\beta t + C'\cos\beta t,$$

$$\frac{(b-c)[b\beta'^2 + 4m^2(a-c)]}{4m(a-c)(a+b-c)\beta'} y - \frac{b\beta'}{4m^2(a-c)} x_1 = -C_1\sin\beta' t + C'_1\cos\beta' t,$$

und hieraus endlich

$$x = \frac{4m^2(a-c) + b\beta'^2}{b(\beta'^2 - \beta^2)}[C\cos\beta t + C'\sin\beta t] - \frac{4m^2(a-c) + b\beta^2}{b(\beta'^2 - \beta^2)}[C_1\cos\beta' t + C'_1\sin\beta' t],$$

$$y = \frac{\beta\beta'^2(a+b-c}{(\beta'^2 - \beta^2)(b-c)m}[-C\sin\beta t + C'\cos\beta t] - \frac{\beta^2\beta'(a+b-c)}{(\beta'^2 - \beta^2)(b-c)m}[-C_1\sin\beta' t + C'_1\cos\beta' t].$$

Uebrigens ist auch

$$\beta^2\beta'^2 = \frac{4(a-c)(b-c)}{ab}m^4,\ \beta'^2 = \frac{4(a-c)(b-c)}{ab\beta^2}m^4,\ \beta^2 = \frac{4(a-c)(b-c)m^4}{ab\beta'^2},$$

so dass man auch hat:

$$x = \frac{4(a-c)m^3}{b\beta^3} \cdot \frac{\beta^2 + \frac{b-c}{a}m^2}{\frac{4(a-c)(b-c)m^4}{ab\beta^2} - \beta^2} [C\cos\beta t + C'\sin\beta t]$$

$$+ \frac{4(a-c)m^2}{b\beta'^3} \cdot \frac{\beta'^2 + \frac{(b-c)}{a}m^2}{\frac{4(a-c)(b-c)m^4}{ab\beta'^2} - \beta'^2} [C_1\cos\beta' t + C'_1\sin\beta' t],$$

$$y = \frac{4(a-c)m^3}{b\beta} \cdot \frac{\frac{a+b-c}{a}}{\frac{4(a-c)(b-c)m^4}{ab\beta^2} - \beta^2} [-C\sin\beta t + C'\cos\beta t]$$

$$+ \frac{4(a-c)m^3}{b\beta'} \cdot \frac{\frac{a+b-c}{a}}{\frac{4(a-c)(b-c)m^4}{ab\beta'^2} - \beta'^2} [-C_1\sin\beta' t + C'_1\cos\beta' t],$$

und wenn man diese Gleichungen auf die Form

$$x = E\sin(\beta t + \gamma) + E'\sin(\beta' t + \gamma'),$$
$$y = E_1\cos(\beta t + \gamma) + E'_1\cos(\beta' t + \gamma'),$$

bringt, so sind γ und γ' willkürliche Konstanten, eben so E und E', während

$$E_1 = \frac{m\beta\frac{a+b-c}{a}}{\beta^2 + \frac{b-c}{a}m^2}E, \quad E'_1 = \frac{m\beta'\frac{a+b-c}{a}}{\beta'^2 + \frac{b-c}{a}m^2}E'.$$

Unter der letzteren Form werden diese Resultate in der Astronomie benützt.

6.) Setzt man in den Gleichungen

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + ax - b\cos nt(x\cos nt + y\sin nt) = 0,$$
$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + ay - b\sin nt(x\cos nt + y\sin nt) = 0:$$
$$x\cos nt + y\sin nt = u$$
$$x\sin nt - y\cos nt = v,$$

so erhält man

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - (b - a + n^2)u + 2n\frac{\partial v}{\partial t} = 0$$
$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - (n^2 - a)v - 2n\frac{\partial u}{\partial t} = 0,$$

die wie in Nr. 5 behandelt werden. Endlich ist dann

$$x = u\cos nt + v\sin nt,$$
$$y = u\sin nt - v\cos nt.$$

§. 92.

Bei der Integration nicht linearer Differentialgleichungen kann man entweder das in §. 90 im Allgemeinen angedeutete Verfahren anwenden, oder aber sich im speziellen Falle in verschiedener Weise zu helfen suchen, wie wir nun an einigen Beispielen zeigen wollen.

1.) $\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2}\,\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = a\frac{\partial x}{\partial t}, \quad \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2}\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a\frac{\partial y}{\partial t},$

(vergl. Poisson Mechanik, II, §. 463). Aus diesen Gleichungen folgt unmittelbar:

$$\frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\frac{\partial x}{\partial t},\ \frac{\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}}{\frac{\partial x}{\partial t}}=\frac{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}}{\frac{\partial y}{\partial t}},$$

woraus, indem man integrirt:

$$l\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)+l(C)=l\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right),\ \frac{\partial y}{\partial t}=C\frac{\partial x}{\partial t},$$

wenn C die willkürliche Konstante. Setzt man diesen Werth in die erste Gleichung, so hat man

$$\sqrt{1+C^2}\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}=a,\ \frac{\partial x}{\partial t}=\frac{at}{\sqrt{1+C^2}}+C',\ x=\frac{at^2}{2\sqrt{1+C^2}}+C't+C'',$$

$$\frac{\partial y}{\partial t}=\frac{Cat}{\sqrt{1+C^2}}+CC',\ y=\frac{Cat^2}{2\sqrt{1+C^2}}+CC't+C''',$$

so dass die Integrale der gegebenen Gleichungen mit den vier Konstanten: C, C', C'', C''' gefunden sind. Setzt man $C=\operatorname{tg}\alpha$, also $\frac{C}{\sqrt{1+C^2}}=\sin\alpha$, $\frac{1}{\sqrt{1+C^2}}=\cos\alpha$, so ist auch

$$x=\frac{at^2\cos\alpha}{2}+c't+c'',\ y=\frac{at^2\sin\alpha}{2}+\operatorname{tg}\alpha . c't+c'''.$$

Poisson setzt noch $c'=c\cos\alpha$, um zu erhalten:

$$\frac{\partial x}{\partial t}=(at+c)\cos\alpha,\ \frac{\partial y}{\partial t}=(at+c)\sin\alpha,$$

wo dann c und α die willkürlichen Konstanten sind.

2.) Ein Punkt bewege sich unter dem Einflusse einer Kraft, die immer nach demselben festen Punkte gerichtet ist, und deren Intensität im Verhältnisse des Quadrats der Entfernung abnimmt; man soll seine Bewegung untersuchen.

Die hier angegebene Aufgabe ist die der Bewegung (des Schwerpunkts) der Himmelskörper, in so ferne man nur die anziehende Kraft der Sonne in Betracht zieht. Es lässt sich überdies leicht beweisen, dass die Bewegung nothwendig in einer Ebene vor sich gehen muss, die durch den festen Punkt geht, was wir nun geradezu voraussetzen wollen.

Sey also k die Intensität der wirksamen Kraft, wenn der bewegte Punkt (Körper) in einer Entfernung $=1$ ist, so wird dieselbe $=\frac{k}{r^2}$ seyn, wenn die Entfernung r beträgt. Wir wollen weiter den festen Punkt zum Anfangspunkt rechtwinklicher Koordinaten (x und y) wählen, die natürlich in der Ebene liegen, in der die Bewegung geschieht und annehmen, x und y seyen die Koordinaten des bewegten Punktes am Ende der Zeit t, r alsdann seine Entfernung von dem festen Punkte. Die wirksame Kraft $\frac{k}{r^2}$ zerlegen wir in zwei, die nach den Axen der x und y gerichtet sind, und gleich $\frac{kx}{r^3}$, $\frac{ky}{r^3}$ seyn werden, da $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{r}$ die Cosinus der Winkel sind, die r, d. h. die Richtung der Kraft, mit den Axen macht. Da diese Seitenkräfte die x und y zu verkürzen streben, so hat man (§. 13. X):

$$\frac{p}{g}\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}=-\frac{kx}{r^3},\ \frac{p}{g}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=-\frac{ky}{r^3},$$

oder wenn $\frac{gk}{p}=\mu$:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}=-\mu\frac{x}{r^3},\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=-\mu\frac{y}{r^3},\ r=\sqrt{x^2+y^2}, \qquad (a)$$

welche Gleichungen nun zu integriren sind. Man zieht aus denselben zunächst:

$$y\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}-x\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=0, \text{ d. h. } \frac{\partial}{\partial t}\left(y\frac{\partial x}{\partial t}-x\frac{\partial y}{\partial t}\right)=0,\ y\frac{\partial x}{\partial t}-x\frac{\partial y}{\partial t}=c, \quad \text{(b)}$$

wo c eine willkürliche Konstante ist, deren Werth jedoch reell seyn wird, da x und y auch reell sind. Nun ist aber auch

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{r},\ \frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{r}, \text{ also } \frac{\partial^2 x}{\partial t^2}=-\frac{\mu}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x},\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=-\frac{\mu}{r^2}\frac{\partial r}{\partial y},$$

so dass

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\frac{\partial y}{\partial t}=-\frac{\mu}{r^2}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}\right)=-\frac{\mu}{r^2}\frac{\partial r}{\partial t}(\S.\ 7)=\mu\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{r}\right),$$

und da ferner

$$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\frac{\partial y}{\partial t}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2\right],$$

so folgt aus dieser Gleichung

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2=\frac{2\mu}{r}+c_1, \quad \text{(c)}$$

wo c_1 eine weitere Konstante. Aus (b) folgt:

$$y^2\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2-2xy\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial t}+x^2\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2=c^2, \text{ d. h. } (x^2+y^2)\left[\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2\right]$$
$$-\left[x\frac{\partial x}{\partial t}+y\frac{\partial y}{\partial t}\right]^2=c^2,$$

so dass, wenn man beachtet, dass $x\frac{\partial x}{\partial t}+y\frac{\partial y}{\partial t}=r\frac{\partial r}{\partial t}$, und $x^2+y^2=r^2$, aus (c) folgt:

$$r^2\left(\frac{2\mu}{r}+c_1\right)-r^2\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2=c^2,\ r^2\left(\frac{\partial r}{\partial t}\right)^2=2\mu r+c_1 r^2-c^2,$$

und $$\frac{\partial r}{\partial t}=\pm\frac{\sqrt{2\mu r+c_1 r^2-c^2}}{r},\quad t+c_2=\pm\int\frac{r\partial r}{\sqrt{c_1 r^2+2\mu r-c^2}}\ (\S.\ 65),$$

wo c_2 eine dritte Konstante, und das obere Zeichen gilt, wenn r wächst mit wachsendem t, das untere im entgegengesetzten Falle. Setzt man, der Einfachheit wegen:

$$c_1=-\frac{\mu}{a},\ c^2=a\mu(1-e^2), \text{ also } a=-\frac{\mu}{c_1},\ e^2=1+\frac{c^2 c_1}{\mu^2},$$

wo a und e^2 zwei neue willkürliche Konstanten sind, und a von entgegengesetztem Zeichen mit c_1 ist, dagegen $e^2 \gtrless 1$, je nachdem $a \lessgtr 0$, so erhält man $c_1 r^2+2\mu r-c^2 = \frac{\mu}{a}[a^2e^2-(a-r)^2]$, also

$$t+C=\pm\sqrt{\frac{a}{\mu}}\int\frac{r\partial r}{\sqrt{a^2e^2-(a-r)^2}}, \quad \text{(d)}$$

wo C statt c_2 gesetzt ist, und die Zeichen wie oben gelten.

Setzen wir endlich (§. 55) $x=r\cos\omega$, $y=r\sin\omega$, also $\frac{\partial x}{\partial t}=\frac{\partial r}{\partial t}\cos\omega-r\sin\omega\frac{\partial\omega}{\partial t}$, $\frac{\partial y}{\partial t}=\frac{\partial r}{\partial t}\sin\omega+r\cos\omega\frac{\partial\omega}{\partial t}$, so ist $y\frac{\partial x}{\partial t}-x\frac{\partial y}{\partial t}=-r^2\frac{\partial\omega}{\partial t}$, also aus (b):

$$\left(r^2\frac{\partial\omega}{\partial t}\right)^2=c^2=a\mu(1-e^2).$$

Wählen wir nun die Koordinatenaxen so, dass ω wächst mit t, so ist hieraus (§. 13, I)

$$\frac{\partial\omega}{\partial t}=\frac{1}{r^2}\sqrt{a\mu(1-e^2)},$$

also da $\frac{\partial\omega}{\partial t}=\frac{\partial\omega}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial t}$, $\frac{\partial r}{\partial t}=\pm\sqrt{\frac{\mu}{a}}\cdot\frac{\sqrt{a^2e^2-(a-r)^2}}{r}$, so folgt hieraus

$$\frac{\partial\omega}{\partial r}=\pm\sqrt{\frac{a}{\mu}}\sqrt{a\mu(1-e^2)}\frac{1}{r\sqrt{a^2e^2-(a-r)^2}},\quad \omega=\pm\sqrt{1-e^2}\int\frac{\partial r}{r\sqrt{a^2e^2-(a-r)^2}}+C', \qquad (e)$$

wo das Zeichen wie in (d) gewählt wird. Die Gleichungen (d) und (e) lösen die Aufgabe. Die erste gibt t als Funktion von r, also auch r als Funktion von t, und dann die zweite ω als Funktion von r, also auch t. Soll die Auflösung (für $e^2<1$) möglich seyn, so muss $(a-r)^2<a^2e^2$ seyn. Gesetzt also, man setze alsdann

$$a-r=a e\cos\varphi,\quad r=a(1-e\cos\varphi),\quad \frac{\partial r}{\partial\varphi}=a e\sin\varphi,\quad (e>0)$$

wo φ zwischen 0 und π liege, so ist $a^2e^2-(a-r)^2=a^2e^2\sin^2\varphi$, also

$$\left.\begin{aligned}t+C&=\pm a\sqrt{\frac{a}{\mu}}\int(1-e\cos\varphi)\partial\varphi=\pm a\sqrt{\frac{a}{\mu}}(\varphi-e\sin\varphi)\\ \text{und}\qquad \omega&=\pm\sqrt{1-e^2}\int\frac{\partial\varphi}{1-e\cos\varphi}+C'.\end{aligned}\right\}\quad (d')$$

Aus der Gleichung (e) folgt übrigens unmittelbar:

$$\omega=\pm\operatorname{arc}\left(\operatorname{tg}=\frac{r-a(1-e^2)}{\sqrt{1-e^2}\sqrt{a^2e^2-(a-r)^2}}\right)+C'.$$

Setzt man $C'=\omega_1+\frac{\pi}{2}$, so ist hieraus

$$\frac{r-a(1-e^2)}{\sqrt{1-e^2}\sqrt{a^2e^2-(a-r)^2}}=\pm\operatorname{tg}\left(\omega-\omega_1-\frac{\pi}{2}\right)=\mp\operatorname{cotg}(\omega-\omega_1),$$

d. h. $$\frac{(r-a)^2+2ae^2(r-a)+a^2e^4}{1-e^2}=[a^2e^2-(a-r)^2]\operatorname{cotg}^2\varrho,\quad \varrho=\omega-\omega_1,$$

$$(r-a)^2[1+(1-e^2)\operatorname{cotg}^2\varrho]+2ae^2(r-a)+a^2e^2[e^2-(1-e^2)\operatorname{cotg}^2\varrho]=0,$$

$$(r-a)^2[1-e^2\cos^2\varrho]+2ae^2(r-a)\sin^2\varrho+a^2e^2[e^2-\cos^2\varrho]=0,$$

$$r-a=-\frac{ae^2\sin^2\varrho}{1-e^2\cos^2\varrho}\pm\sqrt{\frac{a^2e^2(\cos^2\varrho-e^2)(1-e^2\cos^2\varrho)+a^2e^4\sin^4\varrho}{(1-e^2\cos^2\varrho)^2}}$$

$$=-\frac{ae^2\sin^2\varrho}{1-e^2\cos^2\varrho}\pm\frac{ae(1-e^2)\cos\varrho}{1-e^2\cos^2\varrho},$$

$$r=\frac{a(1-e^2)}{1-e^2\cos^2\varrho}\pm\frac{ae(1-e^2)\cos\varrho}{1-e^2\cos\varrho},$$

so dass also entweder

$$\left.\begin{aligned}r&=\frac{a(1-e^2)}{1-e^2\cos^2\varrho}+\frac{ae(1-e^2)\cos\varrho}{1-e^2\cos^2\varrho}=\frac{a(1-e^2)}{1-e\cos\varrho},\\ \text{oder } r&=\frac{a(1-e^2)}{1-e^2\cos^2\varrho}-\frac{ae(1-e^2)\cos\varrho}{1-e^2\cos^2\varrho}=\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\varrho},\end{aligned}\right\}\quad \varrho=\omega-\omega_1 \qquad (e')$$

ist. Dies ist dann zugleich die Gleichung der Kurve, die somit in allen Fällen ein Kegelschnitt ist, in dessen Brennpunkt die Sonne steht.

Zur Bestimmung der Konstanten a, e, ω_1, C wollen wir annehmen, im Anfange der Zeit sey $r=r_0$ bekannt, ω sey dann $=\omega_0$; ferner kenne man die Geschwindigkeit v_0 in diesem Augenblicke und sey γ der Winkel, den sie mit der Axe der x macht, so dass für $t=0$: $\frac{\partial x}{\partial t}=v_0\cos\gamma$, $\frac{\partial y}{\partial t}=v_0\sin\gamma$. Alsdann gibt die (c):

$$v_0{}^2=\frac{2\mu}{r_0}-\frac{\mu}{a},\ \text{woraus a folgt;}$$

die (b): $v_0r_0(\sin\omega_0\cos\gamma-\cos\omega_0\sin\gamma)=c$, $v_0r_0\sin(\omega_0-\gamma)=c$; $a\mu(1-e^2)=v_0{}^2r_0{}^2\sin^2(\omega_0-\gamma)$, woraus e^2;

die (e'):
$$r_0 = \frac{a(1-e^2)}{1 \mp e\cos(\omega_0 - \omega_1)}, \text{ woraus } \omega_1,$$

während die (d) heisst
$$\sqrt{\frac{\mu}{a}}\, t = \pm \int_{r_0}^{r} \frac{r\,\partial r}{\sqrt{a^2 e^2 - (a-r)^2}} \qquad (d'')$$

Fällt $e^2 < 1$ aus, so ist die Kurve eine Ellipse; nimmt man dann diejenige Linie zur Polaraxe, die durch die Sonne gehend mit der früheren Axe der x den Winkel ω_1 macht, so hat man in (e') bloss $\omega + \omega_1$ für ω zu setzen, um als Polargleichung zu erhalten:
$$r = \frac{a(1-e^2)}{1 \mp e\cos\omega},$$
wo das obere Zeichen gilt, wenn die nunmehrigen ω von dem der Sonne entfernteren Scheitel aus gerechnet werden. Rechnet man aber ω von dem der Sonne näheren Scheitel (Perihelium), so ist
$$r = \frac{a(1-e^2)}{1 + e\cos\omega}, \qquad (e'')$$
so dass a die halbe grosse Axe, $a\sqrt{1-e^2}$ die halbe kleine Axe der Ellipse ist, während die grosse Axe die Polaraxe ist. Lässt man ω von 0 bis 2π gehen, so hat der Körper einen vollen Umlauf gemacht. Von $\omega = 0$ bis $\omega = \pi$ gilt dann in (d'') das obere, von $\omega = \pi$ bis $\omega = 2\pi$ das untere Zeichen, d. h. wenn man die Zeit von $\omega = 0$ an zählt, so ist die Zeit eines Umlaufs τ gegeben durch
$$\sqrt{\frac{\mu}{a}}\,\tau = \int_{r_1}^{r_2} \frac{r\,\partial r}{\sqrt{a^2e^2-(a-r)^2}} - \int_{r_2}^{r_3} \frac{r\,\partial r}{\sqrt{a^2e^2-(a-r)^2}},\; r_1 = a(1-e) = r_3,\; r_2 = a(1+e),$$

so dass
$$\tau = 2\sqrt{\frac{a}{\mu}} \int_{r_1}^{r_2} \frac{r\,\partial r}{\sqrt{a^2e^2-(a-r)^2}}.$$

Nun ist
$$\int \frac{r\,\partial r}{\sqrt{a^2e^2-(a-r)^2}} = -\sqrt{a^2e^2-(a-r)^2} + a.\operatorname{arc}\left(tg = \frac{r-a}{\sqrt{a^2e^2-(a-r)^2}}\right),$$
$$\int_{a(1-e)}^{a(1+e)} \frac{r\,\partial r}{\sqrt{a^2e^2-(a-r)^2}} = a\,.\operatorname{arc}(tg = +\infty) - a\,.\operatorname{arc}(tg = -\infty) = a\pi,$$
so dass $\tau = 2a\pi\sqrt{\frac{a}{\mu}}$, $\mu = \frac{4\pi^2 a^3}{\tau^2}$, $k = \frac{4\pi^2 a^2 p}{g\tau^2}$ ist.

3.) AA'BB' (Fig. 53) stelle einen geradlinigen Kanal vor, der durch die Wand CC' in zwei Theile getheilt sey; in den beiden Theilen bewegen sich Luftströme von verschiedener Temperatur, so dass durch die Wand hindurch, die aus einem für die Wärme leicht durchdringbaren Stoff bestehe, der eine Luftstrom durch den andern erwärmt wird, während die Wände BB', AA' keine Wärme hindurchlassen. Man soll die Temperatur der Luftströme für jeden Querschnitt untersuchen.

Fig. 53.

Wir setzen hiebei voraus, dass bereits ein Zustand eingetreten sey, bei dem in jedem Querschnitt sowohl des Kanals AA'C'C, als CC'BB' immer dieselbe Temperatur herrsche, die natürlich für jeden Querschnitt eine andere seyn wird. Sey ferner τ_0 die Temperatur des (heisseren) Luftstroms in AA'C'C, wenn er in AC in den Kanal eintritt; τ_1 die Temperatur, mit der er den Kanal in A'C' verlässt (beide etwa in Graden des hunderttheiligen Thermometers angegeben); a b, a'b' zwei Querschnitte, deren Entfernung Δx sey, wenn x die Länge Cc ist; T die Temperatur im

Querschnitt ac, t die in cb, welche beide bloss von x und nicht von der Zeit abhängen, und **wenn die Kanäle eng genug sind**, durch den ganzen Querschnitt dieselben sind; im Querschnitt a′b′ werden nun die Temperaturen seyn: $T+\Delta T$ für a′c′, $t+\Delta t$ für c′b′, wo ΔT negativ ist, da T mit wachsendem x sicher abnimmt, dagegen Δt positiv oder negativ ist, je nachdem die beiden Luftsröme sich in derselben oder der entgegengesetzten Richtung bewegen. Sey weiter P das Gewicht derjenigen Luftmenge, die in einer Sekunde durch ac strömt; p das der durch cb in derselben Zeit strömenden Luftmenge; C, c die spezifischen Wärmen der beiden Luftarten (§. 34, II), k dieselbo Grösse für die Zwischenwand, wie in §. 34. Je kleiner nun Δx ist, desto genauer richtig wird es seyn, wenn wir annehmen, es herrsche innerhalb der zwei Schnitte ab, a′b′ durchweg dieselbe Temperatur, die sich dann plötzlich in a′b′ ändere. Nehmen wir dann schliesslich Δx unendlich klein, so ist diese Annahme geradezu richtig. Unter dieser Voraussetzung wird nun die Luftmenge P, indem sie durch acc′a′ strömt, die Wärmemenge $-PC\Delta T$ verlieren, während die durch cbc′b′ strömende Menge p die Wärmemenge $pc\Delta t$ gewinnt, wenn beide Ströme sich in gleicher Richtung bewegen, oder die Wärmemenge $-pc\Delta t$, wenn das Entgegengesetzte stattfindet. Da nun, der Annahme nach, durch die äusseren Wände keine Wärme entweicht, so hat man

$$-PC\Delta T = \pm pc\Delta t, \quad -PC\frac{\Delta T}{\Delta x} = \pm pc\frac{\Delta t}{\Delta x},$$

d. h. wenn Δx unendlich klein, unter welcher Annahme diese Gleichungen erst genau sind:

$$PC\frac{\partial T}{\partial x} = \mp pc\frac{\partial t}{\partial x}, \qquad (f)$$

wo das obere Zeichen gilt, wenn beide Ströme dieselbe, das untere, wenn sie verschiedene Bewegungsrichtung haben.

Der Temperaturunterschied in ac′ und cb′ beträgt $T-t$; also ist die in der Sekunde durch cc′ strömende Wärmemenge $=k(T-t)\omega$, wenn ω die Fläche des zwischen beiden Querschnitten liegenden Wandstücks ist. Diese Fläche sey $= \varphi(x)\Delta x$, wo immer $\varphi(x)$ eine bekannte Funktion von x ist, wie denn im einfachsten Falle $\varphi(x)$ konstant ist. Da die durch cc′ strömende Wärme der gleich ist, welche P verliert, so ist:

$$k(T-t)\varphi(x)\Delta x = -PC\Delta T, \quad k(T-t)\varphi(x) = -PC\frac{\Delta T}{\Delta x},$$

d. h.

$$PC\frac{\partial T}{\partial x} = -k(T-t)\varphi(x). \qquad (g)$$

Die beiden Gleichungen (f) und (g) enthalten die Lösung der Aufgabe. Man wird hier am Besten so verfahren, dass man zunächst aus (f) zieht:

$$pct = \mp PCT + Apc, \qquad (h)$$

wo A eine willkürliche Konstante, und dann hat

$$PC\frac{\partial T}{\partial x} = -k\left[T \pm \frac{PC}{pc}T - A\right]\varphi(x), \quad -k\varphi(x) = \frac{PC}{(1\pm\alpha)T - A}\frac{\partial T}{\partial x}, \quad \alpha = \frac{PC}{pc},$$

woraus (§. 65):

$$-k\int\varphi(x)\partial x = \frac{PC}{1\pm\alpha}l[(1\pm\alpha)T - A] + A';$$

wenn A′ eine weitere Konstante ist. Um die Konstanten zu bestimmen, sey $\int\varphi(x)\partial x = \varphi(x)$, und λ die Länge CC′, so ist für $x=0$: $T=\tau_0$, für $x=\lambda$: $T=\tau_1$, also hat man

$$-k\psi(0) = \frac{PC}{1\pm\alpha}\, l\,[(1\pm\alpha)\tau_0 - A] + A',$$
$$-k\psi(\lambda) = \frac{PC}{1\pm\alpha}\, l\,[(1\pm\alpha)\tau_1 - A] + A',$$

aus welchen zwei Gleichungen A und A′ bestimmt werden können.* Man zieht hieraus, da $\psi(\lambda)-\psi(0)=\int_0^\lambda \varphi(x)\partial x$, und letztere Grösse die Fläche F der Wand CC′ ausdrückt:

$$-kF = \frac{PC}{1\pm\alpha}\, l\left(\frac{(1\pm\alpha)\tau_1 - A}{(1\pm\alpha)\tau_0 - A}\right),$$

aus welcher Gleichung folgt

$$A = \frac{(1\pm\alpha)[\tau_1 - \tau_0 e^{-\varrho}]}{1-e^{-\varrho}}, \quad \varrho = \frac{(1\pm\alpha)kF}{PC};$$

A′ ergibt sich sodann unmittelbar. Da $\psi(x)-\psi(0)=\int_0^x \varphi(x)\partial x$, so ist jetzt:

$$-k\int_0^x \varphi(x)\partial x = \frac{PC}{1\pm\alpha}\, l\cdot\left(\frac{(1\pm\alpha)T - A}{(1\pm\alpha)\tau_0 - A}\right), \qquad (h')$$

wo $\int_0^x \varphi(x)\partial x$ das zwischen C und c liegende Wandstück ist. Die Gleichung (h′) gibt T, während (h) dann t gibt, so dass die Aufgabe vollständig gelöst ist.

Will man die Temperaturen kennen, welche der durch CB′ gehende Luftstrom in CB und C′B′ hat, so wird man in (h) bloss $T=\tau_0$ oder $=\tau_1$ zu setzen haben.

Für den praktischen Gebrauch ist es etwas bequemer, die obigen Formeln in anderer Gestalt zu geben. Seyen nämlich t_0, t_1 die Temperaturen des zu erwärmenden Luftstroms beim Ein- und Austritt in den Kanal (B′), so ist

a) bei gleicher Bewegungsrichtung:

$$pct_0 = -PC\tau_0 + Apc,\quad pct_1 = -PC\tau_1 + Apc,\quad -kF = \frac{PC}{1+\alpha}\, l\left(\frac{(1+\alpha)\tau_1 - A}{(1+\alpha)\tau_0 - A}\right),$$

woraus $$PC(\tau_0-\tau_1) = pc(t_1-t_0),\quad kF = \frac{PpCc}{PC+pc}\, l\left(\frac{\tau_0 - t_0}{\tau_1 - t_1}\right).$$

b) bei entgegengesetzter Bewegungsrichtuug:

$$pct_1 = PC\tau_0 + Apc,\quad pct_0 = PC\tau_1 + Apc,\quad -kF = \frac{PC}{1-\alpha}\, l\left(\frac{(1-\alpha)\tau_1 - A}{(1-\alpha)\tau_0 - A}\right),$$

woraus $$pc(t_1-t_0) = PC(\tau_0-\tau_1),\quad kF = \frac{PpCc}{pc-PC}\, l\left(\frac{\tau_0 - t_1}{\tau_1 - t_0}\right).$$

(Man vergl.: „Redtenbacher, die kalorische Maschine“, zweite Aufl. S. 21 ff.)

4.) Man soll die bestimmten Integrale

$$y = \int_0^\infty \frac{e^{-x}\sin ax}{\sqrt{x}}\partial x,\quad z = \int_0^\infty \frac{e^{-x}\cos ax}{\sqrt{x}}\partial x$$

ermitteln. — Man hat (§. 61)

$$\frac{\partial y}{\partial a} = \int_0^\infty \sqrt{x}\, e^{-x}\cos ax\,\partial x,\quad \frac{\partial z}{\partial a} = -\int_0^\infty \sqrt{x}\, e^{-x}\sin ax\,\partial x.$$

Aber (§. 36, 43):

* Es kann auch seyn, dass bloss die Temperaturen gegeben sind, mit denen die beiden Luftströme eintreten. Alsdann hat man wieder die erste der beiden Gleichungen; statt der zweiten aber muss man T aus (h) in t ausdrücken und beachten, dass t für $x=0$ (oder $x=\lambda$) gegeben ist.

$$\int \sqrt{x}e^{-x}\cos ax\,\partial x = \sqrt{x}.e^{-x}\frac{a\sin ax - \cos ax}{1+a^2} - \frac{1}{2}\int e^{-x}\frac{a\sin ax - \cos ax}{(1+a^2)\sqrt{x}}\partial x,$$

$$\int \sqrt{x}e^{-x}\sin ax\,\partial x = \sqrt{x}\,e^{-x}.\frac{-\sin ax - a\cos ax}{1+a^2} + \frac{1}{2}\int e^{-x}\frac{\sin ax + a\cos ax}{(1+a^2)\sqrt{x}}\partial x;$$

$$\int_0^\infty \sqrt{x}.e^{-x}\cos ax\,\partial x = -\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{e^{-x}(a\sin ax - \cos ax)}{(1+a^2)\sqrt{x}}\partial x = -\frac{1}{2}\frac{ay}{1+a^2} + \frac{1}{2}\frac{z}{1+a^2},$$

$$\int_0^\infty \sqrt{x}.e^{-x}\sin ax\,\partial x = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{e^{-x}(\sin ax + a\cos ax)}{(1+a^2)\sqrt{x}}\partial x = \frac{1}{2}\frac{y}{1+a^2} + \frac{1}{2}\frac{az}{1+a^2};$$

so dass $\frac{\partial y}{\partial a} = -\frac{1}{2}\frac{ay}{1+a^2} + \frac{1}{2}\frac{z}{1+a^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial a} = -\frac{1}{2}\frac{y}{1+a^2} - \frac{1}{2}\frac{az}{1+a^2},$ (l)

woraus auch $a\frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial z}{\partial a} = -\frac{1}{2}y, \quad \frac{\partial y}{\partial a} - a\frac{\partial z}{\partial a} = \frac{1}{2}z.$

Man zieht aus diesen Gleichungen, wenn man sie nochmals nach a differenzirt und dann z, $\frac{\partial z}{\partial a}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial a^2}$ eliminirt:

$$(1+a^2)\frac{\partial^2 y}{\partial a^2} + 3a\frac{\partial y}{\partial a} + \frac{3}{4}y = 0. \qquad \text{(i)}$$

Ganz eben so findet sich

$$(1+a^2)\frac{\partial^2 z}{\partial a^2} + 3a\frac{\partial z}{\partial a} + \frac{3}{4}z = 0. \qquad \text{(i')}$$

Setzt man $u = z + iy$, so folgt hieraus

$$(1+a^2)\frac{\partial^2 u}{\partial a^2} + 3a\frac{\partial u}{\partial a} + \frac{3}{4}u = 0, \qquad \text{(k)}$$

während $u = \int_0^\infty \frac{e^{-x}(\cos ax + i\sin ax)}{\sqrt{x}}\partial x = \int_0^\infty \frac{e^{-(1-ai)x}}{\sqrt{x}}\partial x.$

Setzt man in §. 62 (b) $x = \sqrt{\varphi}$, also $\frac{\partial x}{\partial \varphi} = \frac{1}{2\sqrt{\varphi}}$, so ist

$$\int_0^\infty \frac{e^{-a^2\varphi}}{\sqrt{\varphi}}\partial\varphi = \frac{\sqrt{\pi}}{a}, \int_0^\infty \frac{e^{-a\varphi}}{\sqrt{\varphi}}\partial\varphi = \sqrt{\frac{\pi}{a}},$$

so dass man vermuthen kann, es möchte $u = \sqrt{\frac{\pi}{1-ai}}$ seyn können. Wirklich genügt $\sqrt{\frac{\pi}{1\pm ai}}$ der (k), und da die (i) dieselbe Form hat, so ist (§. 74):

$$y = \frac{C}{\sqrt{1-ai}} + \frac{C'}{\sqrt{1+ai}},$$

während aus (l) dann folgt:

$$z = \frac{Ci}{\sqrt{1-ai}} - \frac{C'i}{\sqrt{1+ai}}.$$

Was C und C′ betrifft, so ist für $a = 0$: $y = 0$, $z = \sqrt{\pi}$ (§. 62), also

$$C + C' = 0, \quad Ci - C'i = \sqrt{\pi}; \quad C = \frac{\sqrt{\pi}}{2i}, \quad C' = -\frac{\sqrt{\pi}}{2i},$$

und mithin

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x}\sin ax}{\sqrt{x}}\partial x = \frac{1}{2i}\left[\frac{1}{\sqrt{1-ai}} - \frac{1}{\sqrt{1+ai}}\right]\sqrt{\pi},$$

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-x} \cos a x}{\sqrt{x}} \partial x = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\sqrt{1-a i}} + \frac{1}{\sqrt{1+a i}} \right] \sqrt{\pi}.$$

Nun ist, wenn $r = \sqrt{1+a^2}$, $\cos\alpha = \frac{1}{r}$, $\sin\alpha = \frac{a}{r}$: $\frac{1}{\sqrt{1+a i}} = (1+a i)^{-\frac{1}{2}}$ $= r^{-\frac{1}{2}}\left[\cos\frac{\alpha}{2} - i \sin\frac{\alpha}{2}\right]$, $\frac{1}{\sqrt{1-a i}} = (1-a i)^{-\frac{1}{2}} = r^{-\frac{1}{2}}\left[\cos\frac{\alpha}{2} + i \sin\frac{\alpha}{2}\right]$, so dass

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-x} \sin a x}{\sqrt{x}} \partial x = \frac{\sqrt{\pi}}{r^{\frac{1}{2}}} \sin\frac{\alpha}{2}, \quad \int_0^{\infty} \frac{e^{-x} \cos a x}{\sqrt{x}} \partial x = \frac{\sqrt{\pi}}{r^{\frac{1}{2}}} \cos\frac{\alpha}{2},$$

d. h.

$$\left.\begin{aligned}
\int_0^{\infty} \frac{e^{-x} \sin a x}{\sqrt{x}} \partial x &= \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{r}} = \sqrt{\frac{r-1}{r^2}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \\
&= \sqrt{\frac{\sqrt{1+a^2}-1}{1+a^2}} \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \\
\int_0^{\infty} \frac{e^{-x} \cos a x}{\sqrt{x}} \partial x &= \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{r}} = \sqrt{\frac{r+1}{r^2}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \\
&= \sqrt{\frac{\sqrt{1+a^2}+1}{1+a^2}} \sqrt{\frac{\pi}{2}}.
\end{aligned}\right\} a > 0.$$

Dass die Integrale $\int_0^{\infty} \frac{e^{-cx} \cos a x}{\sqrt{x}} \partial x$, $\int_0^{\infty} \frac{e^{-cx} \sin a x}{\sqrt{x}} \partial x$ hierauf zurückkommen, ist leicht ersichtlich, und man findet

$$\left.\begin{aligned}
\int_0^{\infty} \frac{e^{-cx} \sin a x}{\sqrt{x}} \partial x &= \sqrt{\frac{\sqrt{c^2+a^2}-c}{c^2+a^2}} \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \\
\int_0^{\infty} \frac{e^{-cx} \cos a x}{\sqrt{x}} \partial x &= \sqrt{\frac{\sqrt{c^2+a^2}+c}{c^4+a^2}} \sqrt{\frac{\pi}{2}}.
\end{aligned}\right\} c > 0,\ a > 0.$$

Es kann sich ereignen, dass zwischen den $n+1$ Veränderlichen $x, y, z, \ldots$ nicht lauter Differentialgleichungen gegeben sind, sondern einige Gleichungen ohne Differentialquotienten. In diesem Falle kann man einige der abhängig Veränderlichen unmittelbar durch x, oder durch andere abhängige Grössen ausdrücken, so dass sie als gar nicht weiter vorhanden betrachtet werden können. Die Gleichungen, welche alsdann noch bleiben, sind nur noch zu integriren, und nach ihnen bestimmt sich die nöthige Anzahl der willkürlichen Konstanten. Ein Beispiel aus den Anwendungen auf Mechanik mag zur Erläuterung genügen.

5.) Wir wollen annehmen, durch eine Röhre, deren Axe horizontal liege, ströme eine elastische Flüssigkeit und es sey der Beharrungszustand der Bewegung eingetreten, d. h. in jedem Querschnitt bleibe die Bewegung immer dieselbe, sey also nur veränderlich von Querschnitt zu Querschnitt. Daraus folgt, dass in der Zeiteinheit durch alle Querschnitte dieselbe Menge der Flüssigkeit (Luft) strömen muss. (Zur Verdeutlichung wollen wir uns in Fig. 53 unter ABB'A' die fragliche Röhre, und unter CC' deren Axe vorstellen, obwohl wir nicht anzunehmen brauchen, dass die

Querschnitte alle gleich gross seyen, wie dies in der Figur der Fall ist; es braucht nur die Axe CC′ geradlinig zu seyn und horizontal zu liegen.) Auf der einen Seite AB stehe die Röhre in Verbindung mit einem Gasometer, in welchem immer derselbe Druck P (für die Flächeneinheit) herrsche; an ihrem anderen Ende A′B′ dagegen stehe sie entweder in Verbindung mit der freien Luft, oder mit einem andern Gasometer, in welchem der konstante Druck P′ herrsche.

Ist ab ein Querschnitt in der Entfernung Cc $=$ x vom Anfang, dessen Fläche $=\omega$ sey, so sey dort die Geschwindigkeit der Lufttheilchen $=v$, wobei wir voraussetzen wollen, dass alle Lufttheilchen sich in demselben Querschnitte parallel und mit gleicher Geschwindigkeit bewegen; p sey der Druck, der in diesem Querschnitte herrscht, so dass, wenn μ das Gewicht der Volumeneinheit des Gases in ab ist, man (nach dem Mariotteschen Gesetze und mit Berücksichtigung der in der ganzen Röhre als gleich vorausgesetzten Temperatur) hat

$$p = k\mu, \qquad (m)$$

wo k ein konstanter (und bekannter) Koeffizient ist. Sey nun a′b′ ein Querschnitt in der Entfernung Δx, so wird, wenn schliesslich Δx unendlich klein, dies Röhrenstück aba′b′ als überall gleich weit angenommen werden dürfen, eben so wie man annehmen darf, es haben alle Lufttheilchen in demselben die Geschwindigkeit v, die plötzlich in a′b′ in $v+\Delta v$ übergehe; eben so herrsche in aba′b′ überall der Druck p, der in a′b′ plötzlich in $p+\Delta p$ übergeht. Die Luftmenge in aba′b′ hat zum Gewicht $\omega\Delta x\mu = \frac{p\omega\Delta x}{k}$, und da sie ihre Geschwindigkeit von v in $v+\Delta v$ umändert, so verliert sie an lebendiger Kraft: $-\frac{p\omega\Delta x}{2kg}[v^2-(v+\Delta v)^2] = -\frac{p\omega\Delta x}{gk}[v\Delta v + \frac{1}{2}(\Delta v)^2]$, d. h. sie hat diese Arbeit beim Durchströmen von aba′b′ verrichtet. Hiebei hatte aber die Luft den Druck $\omega\Delta p$ zu überwinden und zwar auf die Strecke Δx, so dass

$$\omega\Delta p\Delta x = -\frac{p\omega\Delta x}{gk}\left[v\,\Delta v + \tfrac{1}{2}(\Delta v)^2\right],\quad \frac{\Delta p}{\Delta x} = -\frac{p}{gk}\left[v\frac{\Delta v}{\Delta x} + \tfrac{1}{2}\Delta v\frac{\Delta v}{\Delta x}\right],$$

oder da Δx unendlich klein:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{p}{gk}v\frac{\partial v}{\partial x}. \qquad (n)$$

Da die durch einen Querschnitt in der Zeiteinheit strömende Luftmenge immer dieselbe ist, so muss $\mu\omega v$, also auch $p\omega v$ konstant seyn, so dass

$$p\omega v = a \qquad (p)$$

ist. Die Gleichungen (m), (n), (p) geben p, v, μ als Funktionen von x. Von diesen ist nur (m) eine Differentialgleichung (ω muss als bekannte Funktion von x angesehen werden). Wenn man will, kann man v aus (p) ziehen und in (n) einsetzen, um eine Gleichung zur Bestimmung von p zu erhalten. Für den jetzigen Fall aber ist es bequemer zu setzen:

$$gk\frac{1}{p}\frac{\partial p}{\partial x} = -v\frac{\partial v}{\partial x},\quad gk\,l(p) = -\frac{v^2}{2}+C,$$

und wenn V′ die Geschwindigkeit des Abflusses in A′B′, wo $p = P'$, so ist

$$gk\,l(P') = -\frac{V'^2}{2}+C,\quad gk\,l\left(\frac{p}{P'}\right) = \frac{V'^2}{2}-\frac{v^2}{2},$$

d. h. wenn Ω' die Fläche der Oeffnung A′B′ bezeichnet, wo also $a = p\omega v = P'\Omega'V' = P\Omega V$, wo Ω, V die ähnlichen Grössen für AB sind, es ist

$$gk\,l\left(\frac{p}{P'}\right) = \frac{V'^2}{2}\left[1-\left(\frac{P'\Omega'}{p\omega}\right)^2\right]. \qquad (q)$$

Zieht man hieraus p, was freilich nur näherungsweise geschehen kann, so geben (p) und (m) die übrigen Grössen.

Da für $\omega = \Omega$: $p = P$, so ist auch

$$gkl\left(\frac{P}{P'}\right) = \frac{V'^2}{2}\left[1 - \left(\frac{P'\Omega'}{P\Omega}\right)^2\right],\quad V' = \sqrt{\frac{2gkl\left(\frac{P}{P'}\right)}{1 - \left(\frac{P'\Omega'}{P\Omega}\right)^2}},$$

durch welche Gleichung die Ausflussgeschwindigkeit ausgedrückt ist. Die Einflussgeschwindigkeit V ergibt sich aus der Gleichung $P\Omega V = P'\Omega' V'$.

(Man vergl. „Navier, Résumé des leçons sur l'Application de la Mécanique" II partie, XVII.)

§. 93.

Bereits in §. 90 haben wir gezeigt, dass die Integration von gleichzeitigen Differentialgleichungen höherer Ordnung immer zurückgeführt werden könne auf die Integration eines Systems gleichzeitiger Differentialgleichungen erster Ordnung, so dass wir uns nur mit letzteren beschäftigen wollen. Dabei setzen wir voraus, dass man die gleichzeitigen Differentialgleichungen höherer Ordnung nach den höchsten Differentialquotienten der abhängigen Veränderlichen auflösen könne, so dass dieselben die Form

$$\frac{\partial^m y}{\partial x^m} = P,\quad \frac{\partial^n z}{\partial x^n} = Q,\quad \frac{\partial^r u}{\partial x^n} = R, \ldots .$$

haben, wo in P, Q, R, . . . keine Differentialquotienten von y, z, u, . . . vorkommen, die die m^{te}, n^{te}, r^{te}, . . . Ordnung übersteigen. Sollten die gegebenen Differentialgleichungen nicht so beschaffen seyn, dass in jeder die Differentialquotienten höchster Ordnung vorkommen, so wird man, wie bereits in §. 90 angegeben, durch weitere Differentiationen dieses Ziel immer erreichen können. Die Möglichkeit der oben angegebenen Auflösung muss jedoch hier unbedingt vorausgesetzt werden.

I. Wir wollen nun annehmen, man habe bloss die zwei Gleichungen

$$\frac{\partial y}{\partial x} = X,\quad \frac{\partial z}{\partial x} = Y, \qquad (a)$$

worin X, Y Funktionen von x, y, z seyn sollen, und man habe auf irgend eine Weise eine Integralgleichung gefunden, welche diesen Gleichungen genügt:

$$f(x, y, z) = c, \qquad (b)$$

in der c die willkürliche Konstante vorstelle, eine weitere Konstante aber darin nicht sey; so folgt hieraus

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0,$$

also, wenn man die (a) beachtet:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}X + \frac{\partial f}{\partial z}Y = 0, \qquad (c)$$

welche Gleichung nothwendig identisch seyn muss, d. h. die einzelnen Glieder müssen sich gegenseitig aufheben, was auch x, y, z seyn mögen. Wir setzen voraus, dass X und Y nicht Null seyen, so dass y und z nicht kon-

stant sind; eben so dürfen X und Y nicht unendlich, also auch nicht x konstant seyn; dann versteht es sich von selbst, dass in (b) mindestens zwei der Veränderlichen vorkommen werden, da sonst die eine vorkommende einen konstanten Werth hätte.

Gesetzt also, z komme in (b) vor, so ziehen wir z durch die übrigen Grössen aus dieser Gleichung und setzen dasselbe in die erste Gleichung (a), nämlich

$$\frac{\partial y}{\partial x}-X=0 \qquad (a')$$

ein, wodurch dieselbe zu einer gewöhnlichen Differentialgleichung zwischen x und y wird, wie wir sie im zwölften Abschnitt betrachtet haben. Gemäss §. 69, II existirt nun ein Faktor M, der macht, dass dann (a′) ganz unmittelbar integrabel ist. Dieser Faktor ist aber nach §. 69 so beschaffen, dass die Gleichung

$$\frac{\partial M}{\partial x}+\frac{\partial (MX)}{\partial y}=0 \qquad (d)$$

durch ihn erfüllt seyn muss. Denken wir uns nun zunächst in (a′) die z noch nicht ersetzt; denken uns weiter, M sey eine Funktion von x, y, z so beschaffen, dass sie den Integrations-Faktor für (a′) abgibt, wenn man z durch (b) ausdrückt, so wird in der Gleichung (d) bei den partiellen Differentiationen nach y und x zu beachten seyn, dass in M auch noch z vorkommt, das vermöge (b) von x und y abhängt, so dass die Gleichung (d) seyn wird:

$$\frac{\partial M}{\partial x}+\frac{\partial M}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial (MX)}{\partial y}+\frac{\partial (MX)}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}=0, \qquad (d')$$

wo nun $\frac{\partial M}{\partial x}$, $\frac{\partial (MX)}{\partial y}$ die partiellen Differentialquotienten nach x und y, in so ferne diese Grössen in M und MX entwickelt vorkommen, bedeuten und $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ aus (b) zu ziehen sind. Daraus folgt:

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}=0,$$

so dass die (d′) wird:

$$\left[\frac{\partial M}{\partial x}+\frac{\partial (MX)}{\partial y}\right]\frac{\partial f}{\partial z}-\left[\frac{\partial M}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial (MX)}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial y}\right]=0. \qquad (d'')$$

Die Grösse $\frac{\partial f}{\partial z}$ ist, nach unsern Voraussetzungen, sicher nicht Null; ferner ist, wenn $\frac{\partial f}{\partial z}=\varphi$:

$$\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial M}{\partial x}=\frac{\partial (M\varphi)}{\partial x}-M\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z},\quad \frac{\partial (MX)}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{\partial (MX\varphi)}{\partial y}-MX\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y},$$

also gibt die (d″):

$$\frac{\partial (M\varphi)}{\partial x}+\frac{\partial (MX\varphi)}{\partial y}-\left[M\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}+\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial M}{\partial z}\right]-\left[MX\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial y}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial (MX)}{\partial z}\right]=0,$$

d. h.

$$\frac{\partial (M\varphi)}{\partial x}+\frac{\partial (MX\varphi)}{\partial y}-\frac{\partial\left[M\frac{\partial f}{\partial x}\right]}{\partial z}-\frac{\partial\left[MX\frac{\partial f}{\partial y}\right]}{\partial z}=0.$$

Allein, da M nicht $=0$ vorausgesetzt wird, ist auch nach (c):

$$M\frac{\partial f}{\partial x}+MX\frac{\partial f}{\partial y}=-MY\frac{\partial f}{\partial z},$$

woraus offenbar, indem diese Gleichung identisch ist, so dass auf der einen Seite steht, was auf der andern:

$$\frac{\partial\left[M\frac{\partial f}{\partial x}+MX\frac{\partial f}{\partial y}\right]}{\partial z}=-\frac{\partial\left(MY\frac{\partial f}{\partial z}\right)}{\partial z},\ ^*$$

mithin man hat:

$$\frac{\partial(M\varphi)}{\partial x}+\frac{\partial(MX\varphi)}{\partial y}+\frac{\partial(MY\varphi)}{\partial z}=0, \qquad \text{(e)}$$

welcher Gleichung also der zu suchende Faktor M genügen muss. Gesetzt also, man sey im Stande eine Grösse ξ zu bestimmen, welche der Gleichung

$$\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial(X\xi)}{\partial y}+\frac{\partial(Y\xi)}{\partial z}=0 \qquad \text{(e')}$$

genügt, und ξ nicht $=0$ ist, so wird nothwendig $M\frac{\partial f}{\partial z}=\xi$ den Faktor M bestimmen, der die eine der Gleichungen (a) integrabel macht, wenn man z aus (b) zieht und in diese Gleichung einsetzt. Man sieht hieraus, dass man alsdann nur eine Integralgleichung der zwei Gleichungen (a) zu kennen braucht, um die andere sofort finden zu können.

1.) Man habe

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{-y(x-z)}{x(y-z)},\ \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-z(y-x)}{x(y-z)},$$

so folgt hieraus

$$1+\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial x}=0,\ x+y+z=c;\ z=c-(x+y).$$

Die Gleichung (e') ist

$$\frac{\partial\xi}{\partial x}-\frac{\partial\left[\frac{y(x-z)}{x(y-z)}\xi\right]}{\partial y}-\frac{\partial\left[\frac{z(y-x)}{x(y-z)}\xi\right]}{\partial z}=0,$$

d. h.

$$\frac{\partial\xi}{\partial x}-\frac{y(x-z)}{x(y-z)}\frac{\partial\xi}{\partial y}-\frac{z(y-x)}{x(y-z)}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\xi\left\{\frac{z(x-z)}{x(y-z)^2}-\frac{y(y-x)}{x(y-z)^2}\right\}=0.$$

Setzt man hier $\xi=x(y-z)$, so ist diese Gleichung befriedigt, und da $\frac{\partial f}{\partial z}=1$, so ist $x(y-z)$ ein Faktor, der die erste Gleichung integrabel macht. Sie gibt dann:

$$x(y-z)\frac{\partial y}{\partial x}+y(x-z)=0,\ x(2y+x-c)\frac{\partial y}{\partial x}+y(2x+y-c)=0,$$

und §. 69, I:

$$\int P\partial x=x^2y+y^2x-cxy,\ \frac{\partial P}{\partial y}=2x+2y-c,\int\frac{\partial P}{\partial y}\partial x=x^2+2yx-cx,$$

$$Q-\int\frac{\partial P}{\partial y}\partial x=0,$$

so dass die zweite Integralgleichung ist:

$$x(xy+y^2-cy)=c',\ \text{oder}\ xyz=C,$$

wenn man $c=x+y+z$ setzt.

Wenn, wie im vorigen Beispiel, die Grössen X, Y der Gleichungen (a) einen gemeinschaftlichen Nenner haben, also diese Gleichungen etwa sind

* Dieser Satz ist nur unter der gemachten Voraussetzung wahr, es sey die vorhergehende Gleichung eine rein identische, wie etwa $x+yz-5z=x+yz-5z$.

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{Y}{X},\quad \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{Z}{X}, \qquad (a'')$$

so ist die (c′):

$$\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial\left(\frac{Y\xi}{X}\right)}{\partial y}+\frac{\partial\left(\frac{Z\xi}{X}\right)}{\partial z}=0$$

und wenn man $\xi = X\zeta$ setzt, so hat man ζ zu bestimmen aus

$$\frac{\partial (X\zeta)}{\partial x}+\frac{\partial (Y\zeta)}{\partial y}+\frac{\partial (Y\zeta)}{\partial z}=0, \qquad (e'')$$

damit die aus $M\frac{\partial f}{\partial z}=\zeta$ bestimmte Grösse M ein Integrabilitäts-Faktor der Gleichung

$$X\frac{\partial y}{\partial x}-Y=0$$

sey.

II. Man habe die drei Gleichungen

$$\frac{\partial y}{\partial x}=Y,\ \frac{\partial z}{\partial x}=Z,\ \frac{\partial u}{\partial x}=U, \qquad (f)$$

wo Y, Z, U Funktionen von x, y, z, u seyen. Denken wir uns ferner, es sey

$$f(x,y,z,u)=c \qquad (g)$$

eine der (drei) Integralgleichungen des Systems (f), so wird, wie in I nothwendig identisch

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}Y+\frac{\partial f}{\partial z}Z+\frac{\partial f}{\partial u}U=0 \qquad (h)$$

seyn, woraus, da wir wieder Y, Z, U weder 0 noch ∞ voraussetzen, folgt, dass die Gleichung (g) mindestens zwei der Veränderlichen enthalten muss. Sey also u jedenfalls in (g) enthalten, so ziehe man u aus (g) und setze dessen Werth in die zwei ersten Gleichungen (f) ein, wodurch dieselben zu zwei Gleichungen zwischen den drei Veränderlichen x, y, z werden und wir wieder auf dem in I behandelten Falle sind.

Gesetzt nun weiter, man kenne ebenfalls noch eine Integralgleichung dieser zwei ersten Gleichungen, nachdem u aus (g) ersetzt worden, und sey dieselbe

$$f_1(x,y,z,c)=c', \qquad (g')$$

wo c die Konstante der Gleichung (g), c′ die neue Konstante ist. Alsdann wird nach I, wenn man ξ bestimmt aus

$$\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial (Y\xi)}{\partial y}+\frac{\partial (Z\xi)}{\partial z}=0,$$

wo in Y und Z vorerst u aus (g) ersetzt ist, die aus der Gleichung $M\frac{\partial f_1}{\partial z}=\xi$ gezogene Grösse M, in der z aus (g′) ersetzt wird, ein integrirender Faktor für die erste Gleichung (f) seyn. Denken wir uns nun ξ sey eine Funktion von x, y, z, u, die, nachdem u aus (g) in ihr ersetzt ist, in die so eben verlangte Funktion von x, y, z übergeht. Alsdann kann man statt der eben gegebenen Gleichung schreiben:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial \xi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial (Y\xi)}{\partial y}+\frac{\partial (Y\xi)}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial (Z\xi)}{\partial z}+\frac{\partial (Z\xi)}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z}=0,$$

wo nun die partiellen Differentialquotienten bloss nach den entwickelt in ξ, Y, ... vorkommenden Grössen genommen sind, und $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$ aus (g) zu ziehen sind. Aber aus dieser Gleichung folgt

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}=0,\ \frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}=0,\ \frac{\partial f}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z}=0,$$

so dass also

$$\left[\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial (Y\xi)}{\partial y}+\frac{\partial (Z\xi)}{\partial z}\right]\frac{\partial f}{\partial u}-\frac{\partial \xi}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{\partial (Y\xi)}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial y}-\frac{\partial (Z\xi)}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial z}=0.$$

Ferner hat man, wenn wieder $\frac{\partial f}{\partial u}=\varphi$, wo φ nicht $=0$:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial u}=\frac{\partial (\xi\varphi)}{\partial x}-\xi\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial u},\ \frac{\partial (Y\xi)}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial u}=\frac{\partial (Y\xi\varphi)}{\partial y}-Y\xi\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial u},\ \frac{\partial (Z\xi)}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial u}$$
$$=\frac{\partial (Z\xi\varphi)}{\partial z}-Z\xi\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial u},$$

so dass

$$\frac{\partial (\xi\varphi)}{\partial x}+\frac{\partial (Y\xi\varphi)}{\partial y}+\frac{\partial (Z\xi\varphi)}{\partial z}-\frac{\partial\left(\xi\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial u}-\frac{\partial\left(Y\xi\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{\partial u}-\frac{\partial\left(Z\xi\frac{\partial f}{\partial z}\right)}{\partial u}=0.$$

Aus der identischen Gleichung (h) folgt aber

$$\frac{\partial\left(\xi\frac{\partial f}{\partial x}\right)}{\partial u}+\frac{\partial\left(Y\xi\frac{\partial f}{\partial y}\right)}{\partial u}+\frac{\partial\left(Z\xi\frac{\partial f}{\partial z}\right)}{\partial u}=-\frac{\partial\left(U\xi\frac{\partial f}{\partial u}\right)}{\partial u},$$

so dass also endlich

$$\frac{\partial (\xi\varphi)}{\partial x}+\frac{\partial (Y\xi\varphi)}{\partial y}+\frac{\partial (Z\xi\varphi)}{\partial z}+\frac{\partial (U\xi\varphi)}{\partial u}=0.$$

Man schliesst hieraus nun das Folgende:

Kann man der Gleichung

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x}+\frac{\partial (Y\zeta)}{\partial y}+\frac{\partial (Z\zeta)}{\partial z}+\frac{\partial (U\zeta)}{\partial u}=0 \qquad \text{(i)}$$

durch einen andern Werth als $\zeta=0$ genügen, so wird die Gleichung

$$\zeta=\xi\frac{\partial f}{\partial u}$$

eine Grösse ξ geben, die, wenn in ihr u aus der Gleichung (g) ersetzt wird, mittelst der Gleichung

$$\xi=M\frac{\partial f_1}{\partial z}$$

eine andere Grösse M liefern wird, die, wenn man in ihr z durch (g') ersetzt, ein integrirender Faktor der ersten Gleichung (f) seyn wird, in der zuerst u aus (g) und dann z aus (g') ersetzt ist.

Man sieht leicht, wie man dieses Verfahren beliebig ausdehnen kann, und wir wollen das Resultat für vier Gleichungen nur noch aussprechen:

III. Gesetzt, man habe die Gleichungen

$$\frac{\partial y}{\partial x}=Y,\ \frac{\partial z}{\partial x}=Z,\ \frac{\partial u}{\partial x}=U,\ \frac{\partial v}{\partial y}=V, \qquad \text{(k)}$$

so bestimme man zuerst eine Integralgleichung

$$f(x, y, z, u, v)=c, \qquad \text{(l)}$$

in der v vorkomme; schaffe aus den drei ersten Gleichungen v mittelst der

Gleichung (l) weg und erhalte drei Gleichungen zwischen x, y, z, u, für welche eine neue Integralgleichung

$$f_1(x, y, z, u, c) = c' \qquad (l')$$

sey; mittelst dieser schaffe man u in den zwei ersten (k) weg, in denen bereits v mittelst (l) ausgedrückt war, und erhalte zwei Gleichungen zwischen x, y, z, für welche man eine weitere Integralgleichung

$$f_2(x, y, z, c, c') = c'' \qquad (l'')$$

kenne. Alsdann suche man eine Funktion ξ von x, y, z, u, v zu bestimmen aus

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial (\xi Y)}{\partial y} + \frac{\partial (\xi Z)}{\partial z} + \frac{\partial (\xi U)}{\partial u} + \frac{\partial (\xi V)}{\partial v} = 0, \qquad (m)$$

bestimme weiter ξ' aus

$$\xi = \xi' \frac{\partial f}{\partial v},$$

und ersetze in ξ' die Grösse v mittelst (l); bestimme dann ξ'' aus

$$\xi' = \xi'' \frac{\partial f_1}{\partial u},$$

worin u durch (l′) ersetzt werde; ferner bestimme man M aus

$$\xi'' = M \frac{\partial f_2}{\partial z},$$

und ersetze z durch (l″), so ist M ein integrirender Faktor der ersten Gleichung (k), in der v, u, z nach einander durch (l), (l′), (l″) ersetzt sind. Die Integration dieser Gleichung nach §. 69, I wird dann unfehlbar die noch fehlende vierte Integralgleichung des Systems (k) liefern.

IV. Ereignet es sich, dass die Grössen Y, Z, U, . . . der Gleichungen (k) kein x enthalten, so setze man, da $\dfrac{\frac{\partial z}{\partial x}}{\frac{\partial y}{\partial x}} = \dfrac{\partial z}{\partial y}$, u. s. w.:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{Z}{Y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{U}{Y}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{V}{Y}, \ldots .$$

und integrire dieses System, gemäss dem in III. angegebenen Verfahren, wozu man natürlich jetzt nur n—2 Gleichungen zu kennen braucht, wenn n die Anzahl der Grössen y, z, . . . ist, um die n—1[te] nach Auflösung der Gleichung (m) zu finden. Eliminirt man sodann aus der Gleichung $\frac{\partial y}{\partial x} = Y$, alle Veränderlichen bis auf y, so erhält man hieraus

$$x = \int \frac{\partial y}{Y} + C$$

als n[te] Integralgleichung. Für diesen Fall braucht man also bloss n—2 Integralgleichungen des Systems zu kennen.

Enthielten die Grössen Y, Z, U, . . . etwa kein z, so würde man die Gleichung $\frac{\partial z}{\partial x} = Z$ in (k) weglassen und die übrigen n—1 Gleichungen behandeln, wie so eben; eliminirt man dann aus Z die Grössen y, u, . . . mittelst der gefundenen n—1 Integralgleichungen, so wird Z eine blosse Funktion von x und man hat

$$z = \int Z \partial x + C$$

als letzte Integralgleichung.

V. Wenn, wie dies in dem oben angegebenen Beispiele der Fall war, die zweiten Seiten der Gleichungen (k) denselben Nenner haben, so dass man also hat

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{Y}{X}, \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{Z}{X}, \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{U}{X}, \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{V}{X}, \qquad (k')$$

so setze man in (m) $X\xi$ für ξ, und hat dann die Gleichung

$$\frac{\partial (X\xi)}{\partial x} + \frac{\partial (Y\xi)}{\partial y} + \frac{\partial (Z\xi)}{\partial z} + \frac{\partial (U\xi)}{\partial u} + \frac{\partial (V\xi)}{\partial v} = 0 \qquad (m')$$

aufzulösen, während ξ', ξ'', M aus denselben Gleichungen, wie in III. bestimmt werden, und dann M der integrirende Faktor von

$$X\frac{\partial y}{\partial x} - Y = 0$$

ist. Man sieht, dass es immer auf die Auflösung einer partiellen Differentialgleichung (m′) ankommt. Die allgemeine Auflösung derselben kann nicht gegeben werden, allein es genügt immer ein Werth von ξ, der die (m′) erfüllt, wenn er nur nicht 0 oder ∞ ist, und man kann gar oft einen solchen leicht finden.

Gesetzt etwa es sey

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} + \ldots + \frac{\partial V}{\partial v} = 0,$$

so wird der Gleichung (m′) durch $\xi = 1$ genügt, welchen Werth man alsdann wählen wird. Enthält die Grösse

$$\frac{1}{X}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \ldots + \frac{\partial V}{\partial v}\right) = T \qquad (n)$$

ausser x keine Veränderliche, so kann man der Gleichung (m′) genügen, indem man ξ als blosse Funktion von x annimmt. Denn dann ist $\frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{\partial \xi}{\partial z} = \ldots = 0$, also wird die (m′):

$$X\frac{\partial \xi}{\partial x} + \xi\left[\frac{\partial X}{\partial x} + \ldots + \frac{\partial V}{\partial v}\right] = 0, \quad \frac{\partial \xi}{\partial x} = -\xi T, \quad \xi = e^{-\int T \partial x} \quad (\S. 65).$$

Enthält dagegen die Grösse

$$\frac{1}{Z}\left[\frac{\partial X}{\partial x} + \ldots + \frac{\partial V}{\partial v}\right] = T_1$$

bloss z, so betrachte man ξ auch bloss als Funktion von z und hat aus (m′):

$$\xi Z T_1 + Z\frac{\partial \xi}{\partial z} = 0; \quad \xi = e^{-\int T_1 \partial z}.$$

Aehnliche Resultate erhält man, wenn

$$\frac{1}{Y}\left[\frac{\partial X}{\partial x} + \ldots + \frac{\partial V}{\partial v}\right], \quad \frac{1}{U}\left[\frac{\partial X}{\partial x} + \ldots + \frac{\partial V}{\partial v}\right], \ldots$$

bezüglich bloss y, u, ... enthalten.

Als Beispiel mag das folgende dienen, das schon in §. 92 gelöst wurde.

2.) $$\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = -\frac{\mu x}{r^3}, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\frac{\mu y}{r^3}, \quad r^2 = x^2 + y^2,$$

und wenn $\frac{\partial x}{\partial t} = z$, $\frac{\partial y}{\partial t} = u$:

$$\frac{\partial x}{\partial t}=z,\ \frac{\partial y}{\partial t}=u,\ \frac{\partial z}{\partial t}=-\frac{\mu x}{r^3},\ \frac{\partial u}{\partial t}=-\frac{\mu y}{r^3}.$$

Von diesen vier Gleichungen kennt man bereits zwei Integralgleichungen, und da ferner die zweiten Seiten kein t enthalten, so wird man gemäss IV. die zwei anderen daraus finden, wozu man zunächst die folgenden Gleichungen benützen kann:

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{u}{z},\ \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\mu x}{z r^3},\ \frac{\partial u}{\partial x}=-\mu\frac{y}{z r^3},$$

von denen nun

$$zy-ux=c,\ z^2+u^2=\frac{2\mu}{r}+c_1$$

zwei Integralgleichungen sind. Man hat also jetzt in II.

$$Y=\frac{u}{z},\ \ Z=-\frac{\mu x}{z r^3},\ \ U=-\frac{\mu y}{z r^3},\ f=zy-xu,$$

und es ist identisch

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}Y+\frac{\partial f}{\partial z}Z+\frac{\partial f}{\partial u}U=0.$$

Was die dortige Gleichung (g′) anbelangt, so ist $u=\frac{yz-c}{x}$, also

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{zy-c}{zx},\ \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\mu x}{z r^3},$$

welchen Gleichungen durch

$$z^2+\left(\frac{zy-c}{x}\right)^2=\frac{2\mu}{r}+c_1$$

genügt wird, welche Gleichung aus der zweiten der obigen Gleichungen sich ergibt. Demnach ist

$$f_1=z^2+\left(\frac{zy-c}{x}\right)^2-\frac{2\mu}{r}$$

und identisch

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}+\frac{\partial f_1}{\partial y}\frac{zy-c}{xz}+\frac{\partial f_1}{\partial z}\left(-\frac{\mu x}{r^3 z}\right)=0.$$

Die Gleichung (i) ist

$$\frac{\partial\zeta}{\partial x}+\frac{\partial\left(\frac{u}{z}\zeta\right)}{\partial y}-\frac{\partial\left(\frac{\mu x}{z r^3}\zeta\right)}{\partial z}-\frac{\partial\left(\frac{\mu y}{z r^3}\zeta\right)}{\partial u}=0,$$

welcher Gleichung durch $\zeta=z$ genügt wird (V). Da $\frac{\partial f}{\partial u}=-x$, so ist $z=-x\xi$, also $\xi=-\frac{z}{x}$; ferner wegen $\frac{\partial f_1}{\partial z}=2z+2\left(\frac{zy-c}{x}\right)\frac{y}{x}$, und da hier u nicht vorkommt, ist

$$-\frac{z}{x}=2M\left[z+\frac{zy-c}{x^2}y\right],\ M=\frac{-xz}{2(zr^2-cy)},$$

in welcher Formel z durch den aus (g′) folgenden Werth zu ersetzen ist. Alsdann ist M ein integrirender Faktor für $\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{u}{z}$. Multiplizirt man diese Gleichung, so ist

$$\frac{xz}{r^2 z-cy}\frac{\partial y}{\partial x}-\frac{xu}{r^2 z-cy}=0,$$

worin $u=\frac{zy-c}{x}$ und dann z aus (g′) zu ersetzen ist. Das Erstere gibt

$$\frac{xz}{r^2 z-cy}\frac{\partial y}{\partial x}-\frac{zy-c}{r^2 z-cy}=0,$$

während $$z=\frac{cy\pm x\sqrt{c_1 r^2+2\mu r-c^2}}{r^2},\ r^2 z-cy=\pm x\sqrt{c_1 r^2+2\mu r-c^2},$$

so dass
$$\frac{cy \pm x\sqrt{2\mu r + c_1 r^2 - c^2}}{\pm r^2\sqrt{2\mu r + c_1 r^2 - c^2}} \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{-cx \pm y\sqrt{2\mu r + c_1 r^2 - c^2}}{\pm r^2\sqrt{2\mu r + c_1 r^2 - c^2}},$$
$$\frac{\pm c\left(y\frac{\partial y}{\partial x} + x\right)}{r^3\sqrt{2\mu r + c_1 r^2 - c^2}} + \left(x\frac{\partial y}{\partial x} - y\right)\frac{1}{r^2} = 0.$$

Da $x^2 + y^2 = r^2$, so ist $y\frac{\partial y}{\partial x} + x = r\frac{\partial r}{\partial x}$, und wenn $x = r\cos\omega$, $y = r\sin\omega$, so ist
$$x\frac{\partial y}{\partial x} - y = \frac{x\frac{\partial y}{\partial \omega} - y\frac{\partial x}{\partial \omega}}{\frac{\partial x}{\partial \omega}} = \frac{r^2}{\frac{\partial x}{\partial \omega}},$$
so dass also
$$\frac{\pm c\frac{\partial r}{\partial x}}{r\sqrt{2\mu r + c_1 r^2 - c^2}} = -\frac{1}{\frac{\partial x}{\partial \omega}}, \quad \frac{\pm c\frac{\partial r}{\partial \omega}}{r\sqrt{2\mu r + c_1 r^2 - c^2}} + 1 = 0,$$
$$\omega + c_2 = \mp\int\frac{c\,\partial r}{r\sqrt{2\mu r + c_1 r^2 - c^2}},$$
was die Gleichung (e) in §. 92 ist. Setzt man nun endlich in $\frac{\partial x}{\partial t} = z$ für z seinen Werth, oder besser in
$$x\frac{\partial x}{\partial t} + y\frac{\partial y}{\partial t} = xz + yu = \pm\sqrt{2\mu r + c_1 r^2 - c^2},$$
so hat man
$$r\frac{\partial r}{\partial t} = \pm\sqrt{2\mu r + c_1 r^2 - c^2}, \quad t + c_3 = \pm\int\frac{r\,\partial r}{\sqrt{2\mu r + c_1 r^2 - c^2}},$$
welches die Gleichung (d) in §. 92 ist.

Anm. Es ist von Wichtigkeit, dass man sich überzeuge, ob die jeweils gefundenen Integralgleichungen auch den Gleichungen (c), (h), ... identisch genügen. So etwa muss in III. identisch
$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}Y + \frac{\partial f}{\partial z}Z + \frac{\partial f}{\partial u}U + \frac{\partial f}{\partial v}V = 0$$
seyn. Ersetzt man v in Y, Z, U aus (l), so muss eben so identisch seyn:
$$\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y}Y + \frac{\partial f_1}{\partial z}Z + \frac{\partial f_1}{\partial u}U = 0.$$
Ersetzt man weiter v und u in Y, Z aus (l) und (l'), so muss wieder identisch
$$\frac{\partial f_2}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y}Y + \frac{\partial f_2}{\partial z}Z = 0$$
seyn. Fände dies nicht Statt, so könnte man das angegebene Verfahren nicht anwenden.

§. 94.

Gesetzt, man habe wieder die Gleichungen
$$\frac{\partial y}{\partial x} = Y, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = Z, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = U, \ldots, \qquad \text{(a)}$$
und habe für dieselben als allgemeine Integralgleichungen gefunden
$$f_1(x, y, z, \ldots) = c_1, \quad f_2(x, y, z, \ldots) = c_2, \quad f_n(x, y, z, \ldots) = c_n, \qquad \text{(b)}$$
welche Gleichungen der Kürze wegen mit $f_1 = c_1, \ldots, f_n = c_n$ bezeichnet werden mögen, und wobei $c_1, \ldots, c_n$ die willkürlichen Konstanten sind.

Alsdann folgt aus (b)

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}+\ldots\ldots=0, \qquad (c)$$

wo $f=f_1, f_2, \ldots, f_n$ ist. Setzt man in (c) für $\frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial x}, \ldots$ ihre Werthe aus (a), so muss die Gleichung

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}Y+\frac{\partial f}{\partial z}Z+\frac{\partial f}{\partial u}U\ldots=0 \qquad (c')$$

identisch erfüllt seyn, d. h. $0=0$ heissen, da sie sonst eine Beziehung zwischen $x, y, z, \ldots$ feststellen würde, die neben (b) bestehen würde, so dass man $n+1$ Gleichungen mindestens zwischen den $n+1$ Veränderlichen $x, y, z, u, \ldots$ hätte, wodurch dieselben konstante Werthe erlangen würden. Aus (c) und (c′) folgt

$$\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial x}-Y\right)+\frac{\partial f}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial x}-Z\right)+\frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}-U\right)+\ldots=0, \qquad (d)$$

welche Gleichung von (c) nicht verschieden ist, da (c′) identische Gleichung ist. Diese Gleichung (d) stellt übrigens n Gleichungen vor, da in ihr $f=f_1, f_2, \ldots, f_n$ ist, so dass sie eigentlich durch ein System von n solcher Gleichungen zu ersetzen ist.

Gesetzt nun, man habe ein anderes System von n Integralgleichungen, das den (a) genüge, und welches wir durch

$$F_1=0,\ F_2=0, \ldots, F_n=0 \qquad (e)$$

darstellen wollen, so müssen aus (e) dieselben Werthe von $\frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial x}, \ldots\ldots$ folgen, welche die (a) angeben; demnach müssen die aus (e) gezogenen Werthe von $y, z, u, \ldots$ in x, wenn sie in (d) eingesetzt werden, diese Gleichungen nothwendig identisch machen, indem sie $\frac{\partial y}{\partial x}-Y=0$, $\frac{\partial z}{\partial x}-Z=0$, ... machen, es müsste denn etwa seyn, dass eine der Grössen $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}, \ldots$ für diese Werthe unendlich oder unbestimmt wäre. In diesem Falle könnte ganz wohl die Gleichung (d) nicht $0=0$ werden. Diesen Fall ausgeschlossen, also angenommen, die (e) genügen den (d) identisch, und beachtend, dass wegen (c′) die (d) nicht verschieden sind von (c), so genügen die (e) den (c), d. h. den (b); oder aus (e) folgen ganz dieselben Werthe von $y, z, \ldots$, in x, wie aus den (b), so dass die (e) kein von (b) verschiedenes System seyn können.

Es ist also ein von (b) verschiedenes System (e), das den (a) genügt, nur dann möglich, wenn man Gleichungen zwischen $x, y, z, \ldots$ aufstellen kann, für die eine oder die andere der Grössen

$$\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}, \frac{\partial f}{\partial u}, \ldots, \text{wo } f=f_1, f_2, \ldots, f_n$$

unendlich wird. Genügen diese Gleichungen den (a) in Verbindung mit mehreren der (b), so kann ein solches System als eine besondere Auflösung der (a) angesehen werden, in so ferne es nicht aus den (b) folgen kann.

Hätte man etwa die Gleichungen

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{y-z}{u-x},\quad \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y-z}{u-x},\quad \frac{\partial u}{\partial x}=y-z+1,$$

so genügt denselben: *

$$y-z=c_1,\quad u-(y-z+1)x=c_2,\quad z-l(u-x)=c_3.$$

Hieraus $\frac{\partial f_1}{\partial y}=1$, $\frac{\partial f_1}{\partial z}=-1$, $\frac{\partial f_2}{\partial y}=-1$, $\frac{\partial f_2}{\partial z}=1$, $\frac{\partial f_2}{\partial u}=1$, $\frac{\partial f_3}{\partial y}=0$, $\frac{\partial f_3}{\partial z}=1$, $\frac{\partial f_3}{\partial u}=-\frac{1}{u-x}$. Von diesen Grössen kann nur die letzte ∞ werden für $u=x$. Da für $u=x$ auch $y=z$ seyn muss, und da

$$y=z,\quad u=x$$

die Gleichungen

$$(u-x)\frac{\partial y}{\partial x}=y-z,\quad (u-x)\frac{\partial z}{\partial x}=y-z,\quad \frac{\partial u}{\partial x}=y-z+1$$

befriedigt, so ist es eine besondere Auflösung, da es wohl für $c_1=c_2=0$ aus den zwei ersten der allgemeinen Gleichungen folgt, der letzten aber nicht genügen kann.

Man kann jedoch auch noch in anderer Weise besondere Auflösungen erhalten.

Gesetzt nämlich, es seyen

$$\left.\begin{array}{l} f_1(x,y,z,u,\ldots,a_1)=0,\\ f_2(x,y,z,u,\ldots,a_2)=0,\\ \quad\vdots\\ f_n(x,y,z,u,\ldots,a_n)=0 \end{array}\right\}\quad (g)$$

die Integralgleichungen eines Systems von n gleichzeitigen Differentialgleichungen der ersten Ordnung zwischen der n abhängigen Veränderlichen y, z, u, ... und der unabhängig Veränderlichen x, welche Gleichungen wir so voraussetzen, dass in jeder nur eine der n Konstanten vorkomme, so bestimme man $a_1, a_2, \ldots, a_n$ durch x, y, z, ... aus den Gleichungen

$$\frac{\partial f_1}{\partial a_1}=0,\ \frac{\partial f_2}{\partial a_2}=0,\ \ldots\ldots,\ \frac{\partial f_n}{\partial a_n}=0,\qquad (h)$$

und setze diese Werthe in die (g) ein, wodurch dieselben etwa zu

$$F_1(x,y,z,u,\ldots)=0,\ \ldots\ldots,\ F_n(x,y,z,\ldots)=0\qquad (i)$$

werden, so werden die (i) immer noch den vorgelegten Gleichungen genügen können, allein da sie keine willkürlichen Konstanten enthalten, so werden sie als **besondere Auflösungen** derselben anzusehen seyn, wenn nicht etwa die sämmtlichen Grössen $a_1, \ldots, a_n$ aus (h) konstante Werthe erhalten sollten. Man sieht leicht, dass man auch nur einzelne der Gleichungen (h) beibehalten konnte und dann in (i) ein System von Integralgleichungen erhielte, das genügen kann, aber nicht willkürliche Konstanten genug erhält.

Anm. In den meisten Fällen der Anwendung muss man sich mit einer genäherten Auflösung der gleichzeitigen Differentialgleichungen begnügen. Diese Gleichungen erscheinen vor-

* Man hat zuerst $\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial x}$, $y=z+c_1$; dann $\frac{\partial u}{\partial x}=c_1+1$, $u=(c_1+1)x+c_2$; $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{c_1}{c_1x+c_2}$, $z=l(c_1x+c_2)+c_3$, d. h. also

$$y=z+c_1;\ u=(y-z+1)x+c_2,\ z=l[x(y-z)+u-x(y-z+1)]+c_3.$$

zugsweise in der analytischen Mechanik, so wie der analytischen Astronomie, welche in Wahrheit nur ein Theil jener ist. Dort ist die genäherte Auflösung meist durch Entwicklung in unendliche Reihen erreicht. Es tritt aber in manchen Fällen eine eigenthümliche Methode ein, die man besonders bei der Berechnung der Störungen, d. h. der Aenderungen der Bewegung der Planeten (§. 92, Nr. 2) durch die Anziehung der übrigen Planeten, anwendet. Es haben nämlich jene Gleichungen das Eigenthümliche, dass Glieder in sie eintreten, die sehr klein sind und es immer bleiben; man vernachlässigt diese Glieder dann zuerst und integrirt die Gleichungen unter dieser Voraussetzung. Alsdann sieht man die eingetretenen Konstanten als Funktionen der unabhängig Veränderlichen (Zeit) an, und sucht sie nun so zu bestimmen, dass den ursprünglichen Gleichungen Genüge geschieht, wenn auch die anfänglich vernachlässigten Glieder beachtet werden. Diese Methode, die man die Variation (Aenderung) der willkürlichen Konstanten nennt, ist von der ausgedehntesten Anwendung in den eben genannten Wissenschaften und wir wollen desshalb sie hier nicht weiter betrachten, da die Lehrbücher jener Zweige ausführlich darüber handeln. Man vergleiche etwa: Poisson „Mechanik", I, §. 229—233; Pontecoulant, „analytische Theorie des Weltsystems"; Littrow „theoretische und praktische Astronomie", dritter Theil, u. s. w.

Viertes Buch.

Untersuchungen über bestimmte Integrale.

Sechszehnter Abschnitt.

Die periodischen Reihen von Fourier und Lagrange.

§. 95.

Wir wollen annehmen, f(z) sey endlich von $z=a$ bis $z=b$; ferner sey μ eine positive ganze Zahl, so ist (§. 36):

$$\int_a^b f(z)\sin\mu z\,\partial z = \frac{f(a)\cos\mu a - f(b)\cos\mu b}{\mu} + \frac{1}{\mu}\int_a^b f'(z)\cos\mu z\,\partial z.$$

Nun ist aber, wenn $f'(z)$ sein Zeichen nicht wechselt von a bis b, nach §. 49, VIII:

$$\int_a^b f'(z)\cos\mu z\,\partial z = \cos\mu\,[a+\Theta(b-a)]\int_a^b f'(z)\,\partial z = [f(b)-f(a)]\cos\mu\,[a+\Theta(b-a)],$$

so dass also $\int_a^b f'(z)\cos\mu z\,\partial z$ endlich ist. Wechselt $f'(z)$ sein Zeichen zwischen a und b, so zerlege man nach §. 49, II das Integral (durch Einschieben von Gränzen) in mehrere einzelne, für welche jeweils $f'(z)$ sein Zeichen nicht ändert, so werden alle einzelnen, nach dem eben Gesagten, endliche Werthe haben, so dass ihre Summe auch endlich ist. Lässt man nun μ unendlich gross werden, so folgt aus obiger Gleichung, indem $f(a)\cos\mu a - f(b)\cos\mu b$ endlich ist:

$$\text{Gr.}\int_a^b f(z)\sin\mu z\,\partial z = 0, \qquad \text{(a)}$$

wenn Gr. sich auf das unendliche Wachsen von μ hezieht. Dabei ist offenbar vorausgesetzt, dass $f'(z)$ endlich sey von $z=a$ bis $z=b$. Diese Bedingung ist aber nicht unerlässlich. Denn sey für $z=\alpha$ etwa $f'(z)$ unendlich (sonst aber nicht), wo α zwischen a und b liegt, so ist (§. 49)

$$\int_a^b f(z)\sin\mu\,\partial z = \int_a^{\alpha-\varepsilon} f(z)\sin\mu z\,\partial z + \int_{\alpha-\varepsilon}^{\alpha+\varepsilon} f(z)\sin\mu z\,\partial z + \int_{\alpha+\varepsilon}^b f(z)\sin\mu z\,\partial z,$$

wo nun, mit unendlich wachsendem μ das erste und dritte Integral zu Null werden, gemäss der Gleichung (a), wie klein dabei immer auch ε seyn mag; was nun das zweite anbelangt, so werden seine Gränzen sich mehr und mehr nähern, je kleiner ε ist; da ferner f(z) endlich ist von $z=\alpha-\varepsilon$ bis $z=\alpha+\varepsilon$, so wird der Werth dieses Integrals so klein seyn als man nur will, so dass, da ε beliebig klein seyn kann, derselbe kleiner werden kann als jede noch so kleine Grösse, er mithin zu vernachlässigen ist. Demnach gilt der Satz (a) immer noch. Dass, wenn $f'(z)$ mehrere Male unendlich wird zwi-

schen a und b, dieselbe Behauptung noch richtig ist, lässt sich nun leicht übersehen.

Wäre $f(z)$ unendlich für $z=0$, aber $f(z)\sin\mu z$ endlich für $z=0$ (da dann der Faktor $\sin\mu z$ Null ist), so wäre noch

$$\text{Gr.}\int_0^b f(z)\sin\mu z\,\partial z = 0. \qquad (a')$$

Denn es ist, wie klein auch ε (zwischen 0 und b) seyn mag, nach dem Vorstehenden

$$\text{Gr.}\int_\varepsilon^b f(z)\sin\mu z\,\partial z = 0,$$

und da
$$\int_0^b f(z)\sin\mu z\,\partial z = \int_\varepsilon^b f(z)\sin\mu z\,\partial z + \int_0^\varepsilon f(z)\sin\mu z\,\partial z,$$

so folgt hieraus obige Behauptung ganz von selbst. — Man sieht hieraus, dass (a) ganz unbedingt gilt, wenn nur $f(z)$ endlich ist von $z=a$ bis $z=b$, ja dass für $a=0$ sogar $f(0)$ unendlich seyn darf, wenn nur $f(z)\sin\mu z$ für $z=0$ endlich ist.

Wir wollen nun in (a′) setzen $f(z)=\frac{F(z)-F(0)}{\sin z}$, so ist, wenn $b \gtrless {0 \atop \pi}$, und $F(z)$ endlich von $z=0$ bis $z=b$, jedenfalls $f(z)$ endlich, da der Nenner nur Null ist für $z=0$. Für diesen letzteren Werth ist aber (§. 22):

$$f(z)\sin\mu z = \frac{F(z)-F(0)}{\sin z}\sin\mu z = [F(z)-F(0)]\mu,\quad z=0, \text{ d. h. } =0,$$

so dass also, auch wenn $\frac{F(z)-F(0)}{\sin z}$ für $z=0$ nicht endlich seyn sollte, die Substitution immer erlaubt ist. Man hat also, immer unter der Voraussetzung $F(z)$ sey endlich von 0 bis b:

$$\text{Gr.}\int_0^b \frac{F(z)-F(0)}{\sin z}\sin\mu z\,\partial z = 0,\quad \text{Gr.}\int_0^b \frac{F(z)}{\sin z}\sin\mu z\,\partial z = \text{Gr.}\int_0^b \frac{F(0)\sin\mu z}{\sin z}\partial z,$$

d. h. da $F(0)$ konstant ist:

$$\text{Gr.}\int_0^b \frac{F(z)\sin\mu z}{\sin z}\partial z = F(0)\ \text{Gr.}\int_0^b \frac{\sin\mu z}{\sin z}\partial z. \qquad (b),\ b \lesseqgtr {\pi \atop 0}.$$

Auf das letzte Integral kann der Satz (a′) nicht angewendet werden, da $\frac{1}{\sin z}$ unendlich ist für $z=0$, und selbst $\frac{\sin\mu z}{\sin z}$ nicht mehr endlich ist für $z=0$ und $\mu=\infty$.

In der Gleichung (b) wollen wir $\mu=2n+1$, d. h. ungerade voraussetzen, so ist

$$\frac{\sin(2n+1)z}{\sin z} = 1+2[\cos 2z+\cos 4z+\ldots\ldots+\cos 2nz]\ *,$$

---

* Man setze $1+2[\cos 2z+\cos 4z+\ldots\ldots+\cos 2nz]=S$, so ist $S\sin 2z = \sin 2z + \sin 4z - \sin 0 + \sin 6z - \sin 2z + \ldots\ldots + \sin(2n+2)z - \sin(2n-2)z = \sin(2n+2)z + \sin 2nz = 2\sin(2n+1)z\cos z$, und da $\sin 2z = 2\sin z\cos z$, so ist

$$2S.\sin z\cos z = 2\sin(2n+1)z\cos z,\quad S=\frac{\sin(2n+1)z}{\sin z}.$$

(Vergl. mein „Handbuch der ebenen und sphärischen Trigonometrie“ I, §. 14.)

also
$$\int \frac{\sin(2n+1)z}{\sin z}\partial z = z + \sin 2z + \frac{1}{2}\sin 4z + \ldots + \frac{1}{n}\sin 2nz,$$

woraus
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)z}{\sin z}\partial z = \frac{\pi}{2},$$

was auch n seyn möge. Da ferner $\int_{\frac{\pi}{2}}^b \frac{\sin(2n+1)z}{\sin z}\partial z$ sich mit unendlich wachsendem n, nach der Gleichung (a), der Null unbegränzt nähert, wenn b zwischen 0 und π liegt, in welchem Falle $\frac{1}{\sin z}$ immer endlich bleibt zwischen $\frac{\pi}{2}$ und b, so ist

$$\text{Gr.}\int_0^b \frac{\sin(2n+1)z}{\sin z}\partial z = \text{Gr.}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)z}{\sin z}\partial z + \text{Gr.}\int_{\frac{\pi}{2}}^b \frac{\sin(2n+1)z}{\sin z}\partial z = \frac{\pi}{2},$$

und mithin in (b):

$$\text{Gr.}\int_0^b \frac{F(z)\sin(2n+1)z}{\sin z}\partial z = \frac{\pi}{2}F(0). \qquad \text{(c)}, \ b \lesseqgtr {\pi \atop 0}.$$

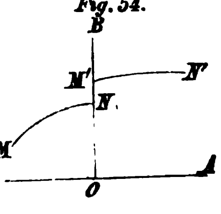


Fig. 54.

Dabei müssen wir bemerken, dass wenn F(z) für z = 0 etwa zwei Werthe hätte, was der Fall ist, wenn F(z) die Ordinate der Kurve MNM'N' (Fig. 54) ausdrückt, wo für z = 0 die zwei Werthe ON, OM' gewählt werden können, in der Formel (c) derjenige zu wählen ist, der gegen die positiven z liegt, also hier OM'. Wir wollen ihn dadurch bezeichnen, dass wir $F(+0)$ schreiben, so wie überhaupt, wenn F(z) für $z = \alpha$ zwei Werthe haben könnte, wir den einen mit $F(\alpha - 0)$, den andern mit $F(\alpha + 0)$ bezeichnen wollen. Dass diese Möglichkeiten in unserer Formel (c) nicht ausgeschlossen sind, ist klar, da sie bloss verlangt, dass F(z) endlich sey von z = 0 bis z = b.

Der in der Gleichung (c) ausgesprochene Satz gilt nicht mehr für $b = \pi$, da dann die Grösse $\frac{F(z) - F(0)}{\sin z}$ für $z = \pi$ unendlich wird. Aber man hat:

$$\int_0^\pi \frac{F(z)\sin(2n+1)z}{\sin z}\partial z = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{F(z)\sin(2n+1)z}{\sin z}\partial z + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \frac{F(z)\sin(2n+1)z}{\sin z}\partial z.$$

Setzt man im zweiten Integrale $z = \pi - u$, $\frac{\partial z}{\partial u} = -1$, so sind die Gränzen von u : $\frac{\pi}{2}$, 0, und es ist (§. 49):

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \frac{F(z)\sin(2n+1)z}{\sin z}\partial z = -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{F(\pi-u)\sin(2n+1)(\pi-u)}{\sin(\pi-u)}\partial u = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{F(\pi-u)\sin(2n+1)u}{\sin u}\partial u$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{F(\pi-z)\sin(2n+1)z}{\sin z}\partial z,$$

also
$$\text{Gr.}\int_0^\pi \frac{F(z)\sin(2n+1)z}{\sin z}\partial z = \text{Gr.}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{F(z)+F(\pi-z)}{\sin z}\sin(2n+1)\partial z$$
$$= \frac{\pi}{2}\left[F(+0)+F(\pi-0)\right], \qquad \text{(d)}$$
wenn man den Satz (c) beachtet, wo dann $b=\frac{\pi}{2}$ ist.

§. 96.

Wir wollen durch das Zeichen
$$\sum_1^n \int_0^\pi f(z)\cos\mu(z-x)\,\partial z$$
die Summe der Reihe bezeichnen, die man erhält, wenn man in $\int_0^\pi f(z)\cos\mu(z-x)\,\partial z$ nach einander setzt $\mu=1, 2, \ldots\ldots, n$; desgleichen bedeute $\sum_1^\infty \int_0^\pi f(z)\cos\mu(z-x)\partial z$ die Summe der unendlichen Reihe:
$$\int_0^\pi f(z)\cos(z-x)\,\partial z + \int_0^\pi f(z)\cos 2(z-x)\,\partial z + \int_0^\pi f(z)\cos 3(z-x)\,\partial z + \ldots\ldots,$$
welche Summe nichts Anderes ist, als der Gränzwerth, dem die erstere sich mit unendlich wachsendem n nähert. Man hat aber
$$\frac{1}{2}\int_0^\pi f(z)\,\partial z + \sum_1^n \int_0^\pi f(z)\cos\mu(z-x)\,\partial z = \int_0^\pi f(z)\left[\frac{1}{2}+\cos(z-x)+\cos 2(z-x)+\ldots\ldots\right.$$
$$\left.+\cos n(z-x)\right]\partial z = \frac{1}{2}\int_0^\pi f(z)\frac{\sin(2n+1)\left(\frac{z-x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{z-x}{2}\right)}\partial z \text{ (§. 95).}$$

Setzt man hier $z-x=2u$, so hat man
$$\frac{1}{2}\int_0^\pi f(z)\,\partial z + \sum_1^n \int_0^\pi f(z)\cos\mu(z-x)\,\partial z = \int_{-\frac{1}{2}x}^{\frac{1}{2}(\pi-x)} f(x+2u)\frac{\sin(2n+1)u}{\sin u}\partial u$$
$$= \int_{-\frac{x}{2}}^0 f(x+2u)\frac{\sin(2n+1)u}{\sin u}\partial u + \int_0^{\frac{\pi-x}{2}} f(x+2u)\frac{\sin(2n+1)u}{\sin u}\partial u$$
$$= \int_0^{\frac{x}{2}} f(x-2z)\frac{\sin(2n+1)z}{\sin z}\partial z\,^* + \int_0^{\frac{\pi-x}{2}} f(x+2z)\frac{\sin(2n+1)z}{\sin z}\partial z.$$

Lässt man hier n unendlich gross werden, so hat man als Werthe dieser zwei Integrale, gemäss (c) und (d), wo F(z) gleich $f(x-2z)$ oder $f(x+2z)$:

* $u=-z$ gesetzt.

a) wenn $x=0$: erstes Integral $=0$, zweites $=\frac{\pi}{2}f(x+0)=\frac{\pi}{2}f(+0)$,

b) wenn $x \gtrless {0 \atop \pi}$: erstes Integral $=\frac{\pi}{2}f(x-0)$, zweites $=\frac{\pi}{2}f(x+0)$,

c) wenn $x=\pi$: erstes Integral $=\frac{\pi}{2}f(\pi-0)$, zweites $=0$.

Daraus folgt, dass

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_0^\pi f(z)\,\partial z+\sum_1^\infty\int_0^\pi f(z)\cos\mu(z-x)\,\partial z &= \frac{\pi}{2}f(+0),\ \text{wenn } x=0,\\ &= \frac{\pi}{2}[f(x-0)+f(x+0)],\ \text{wenn } x\gtrless{0 \atop \pi},\\ &= \frac{\pi}{2}f(\pi-0),\ \text{wenn } x=\pi.\end{aligned}\right\}\quad(e)$$

Ist $f(x)$ nur einwerthig, so ist $f(x-0)+f(x+0)=2f(x)$.

Ganz in derselben Weise wird man nun erhalten:

$$\frac{1}{2}\int_0^\pi f(z)\,\partial z+\sum_1^n\int_0^\pi f(z)\cos\mu(z+x)\,\partial z=\int_0^\pi f(z)[\tfrac{1}{2}+\cos(z+x)+\cos 2(z+x)+\ldots\ldots.$$

$$+\cos n(z+x)]\,\partial z=\frac{1}{2}\int_0^\pi f(z)\frac{\sin(2n+1)\frac{z+x}{2}}{\sin\frac{z+x}{2}}\partial z=\int_{\frac{1}{2}x}^{\frac{1}{2}(\pi+x)} f(2u-x)\frac{\sin(2n+1)u}{\sin u}\partial u$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}(\pi+x)} f(2u-x)\frac{\sin(2n+1)u}{\sin u}\partial u-\int_0^{\frac{1}{2}x} f(2u-x)\frac{\sin(2n+1)u}{\sin u}\partial u.$$

Lässt man hier wieder $n=\infty$ werden, so ist abermals

a) für $x=0$: erstes Integral $=\frac{\pi}{2}f(0-x)=\frac{\pi}{2}f(+0)$, zweites $=0$,

b) für $x\gtrless{0 \atop \pi}$: erstes Integral $=\frac{\pi}{2}f(0-x)$, zweites $=\frac{\pi}{2}f(0-x)$,

c) für $x=\pi$: erstes Integral $=\frac{\pi}{2}[f(0-\pi)+f(\pi-0)]$, zweites $=\frac{\pi}{2}f(0-\pi)$.

Demnach

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_0^\pi f(z)\,\partial z+\sum_1^\infty\int_0^\pi f(z)\cos\mu(z+x)\,\partial z &= \frac{\pi}{2}f(+0),\ \text{wenn } x=0,\\ &= 0,\ \text{wenn } x\gtrless{0 \atop \pi},\\ &= \frac{\pi}{2}f(\pi-0),\ \text{wenn } x=\pi.\end{aligned}\right\}\quad(f)$$

Addirt man die zwei Gleichungen (e) und (f) und beachtet, dass $\cos\mu(z-x)+\cos\mu(z+x)=2\cos\mu z\cos\mu x$, so erhält man:

$$\left.\begin{aligned}\int_0^\pi f(z)\,\partial z+2\sum_1^\infty\cos\mu x\int_0^\pi f(z)\cos\mu z\,\partial z &= \pi f(+0),\ \text{wenn } x=0,\\ &= \frac{\pi}{2}[f(x-0)+f(x+0)].\ \text{wenn } x\gtrless{0 \atop \pi},\\ &= \pi f(\pi-0),\ \text{wenn } x=\pi.\end{aligned}\right\}\quad(g)$$

Ist f(x) immer nur einwerthig, so ist also die erste Seite $= \pi f(x)$, wenn $0 \overset{=}{<} x \overset{=}{<} \pi$.

Subtrahirt man eben so die Gleichungen (e) und (f), so ist wegen $\cos\mu(z-x) - \cos\mu(z+x) = 2\sin\mu x \sin\mu z$:

$$\left.\begin{aligned} 2\sum_1^\infty \sin\mu x \int_0^\pi f(z)\sin\mu z\,\partial z &= 0, \text{ wenn } x = 0 \text{ oder } = \pi, \\ &= \frac{\pi}{2}[f(x-0)+f(x+0)], \text{ wenn } x \gtrless {}^0_\pi. \end{aligned}\right\} \text{(h)}$$

Man setze in den Formeln (g) und (h): $z = \frac{\pi z'}{c}$, $x = \frac{\pi x'}{c}$, so sind die Gränzen nach z' : 0 und c, wobei wir $c > 0$ voraussetzen; mithin

$$\frac{\pi}{c}\int_0^c f\left(\frac{\pi z'}{c}\right)\partial z' + \frac{2\pi}{c}\sum_1^\infty \cos\frac{\mu\pi x'}{c}\int_0^c f\left(\frac{\pi z'}{c}\right)\cos\frac{\mu\pi z'}{c}\partial z' = \pi f\left(\frac{\pi x}{c}\right);\ 0 \overset{=}{<} \frac{x'\pi}{c} \overset{=}{<} c,$$

$$0 \overset{=}{<} x' \overset{=}{<} c.$$

Setzt man hier $f\left(\frac{\pi z'}{c}\right) = \varphi(z')$, dann z und x statt z' und x', so erhält man aus (g) und (h), indem man mit $\frac{c}{\pi}$ multiplizirt:

$$\left.\begin{aligned} \int_0^c \varphi(z)\partial z + 2\sum_1^\infty \cos\frac{\mu\pi x}{c}\int_0^c \varphi(z)\cos\frac{\mu\pi z}{c}\partial z &= c\varphi(x),\ 0 \overset{=}{<} x \overset{=}{<} c, \\ 2\sum_1^\infty \sin\frac{\mu\pi x}{c}\int_0^c \varphi(z)\sin\frac{\mu\pi z}{c}\partial z &= c\varphi(x),\ 0 < x < c, \\ &= 0, \text{ für } x = 0 \text{ oder } = c. \end{aligned}\right\} \text{(i)}$$

Wir haben dabei $\varphi(x)$ immer als einwerthig vorausgesetzt. Wäre es doppelwerthig, so müsste man, in so ferne x zwischen 0 und c liegt, statt $\varphi(x)$ die halbe Summe der beiden betreffenden Werthe nehmen, während für $x = 0$ in der ersten Formel die obere, für $x = c$ der untere Werth zu wählen wäre. Wir werden künftig immer die Bezeichnung der Formeln (i) beibehalten, unter den angegebenen Bemerkungen. Dass $\varphi(z)$ nur endlich zu seyn braucht von $z = 0$ bis $z = c$ versteht sich von selbst; für $c = \pi$ gehen die (i) unmittelbar in (g) und (h) über.

Man setze in der ersten Formel (i): $\varphi(z) = f(z) + f(-z)$, so ist

$$\int_0^c \varphi(z)\cos\frac{\mu\pi z}{c}\partial z = \int_0^c f(z)\cos\frac{\mu\pi z}{c}\partial z + \int_0^c f(-z)\cos\frac{\mu\pi z}{c}\partial z$$

$$= \int_0^c f(z)\cos\frac{\mu\pi z}{c}\partial z - \int_0^{-c} f(z)\cos\frac{\mu\pi z}{c}\partial z = \int_{-c}^{+c} f(z)\cos\frac{\mu\pi z}{c}\partial z.$$

so dass also

$$\int_{-c}^{+c} f(z)\partial z + 2\sum_1^\infty \cos\frac{\mu\pi x}{c}\int_{-c}^{+c} f(z)\cos\frac{\mu\pi z}{c}\partial z = c[f(x)+f(-x)],\ 0 \overset{=}{<} x \overset{=}{<} c. \qquad \text{(k)}$$

Eben so wenn man in der zweiten Formel (i) setzt $\varphi(z) = f(z) - f(-z)$, und annimmt, dass $f(+0) = f(-0)$, so dass $\varphi(0) = 0$, also jene Formel auch noch für $x = 0$ gilt:

$$2\sum_1^{\infty}\sin\frac{\mu\pi x}{c}\int_{-c}^{+c}f(z)\sin\frac{\mu\pi z}{c}\partial z = c[f(x)-f(-x)],\ 0 \overline{\overline{<}} x < c. \quad (k')$$

Da für ein negatives x die erste Seite in (k) denselben Werth hat, wie für dasselbe positive x, und dies auch mit der zweiten der Fall ist, so gilt die Formel (k) von $x \overline{\overline{>}} -c$ bis $x \overline{\overline{<}} c$; eben so verhält es sich mit der zweiten Formel, deren erste und zweite Seite mit x bloss ihr Zeichen wechseln, sonst gleich bleiben, dieselbe gilt also von $x > -c$ bis $x < c$, mit Ausschluss jedoch dieser Gränzen.

Die Addition der Formeln (k) und (k′) gibt nun, wegen $\cos\frac{\mu\pi x}{c}\cos\frac{\mu\pi z}{c} + \sin\frac{\mu\pi x}{c}\sin\frac{\mu\pi z}{c} = \cos\frac{\mu\pi(z-x)}{c}$:

$$\int_{-c}^{+c}f(z)\partial z + 2\sum_1^{\infty}\int_{-c}^{+c}f(z)\cos\frac{\mu\pi(z-x)}{c}\partial z = 2cf(x),\ -c<x<+c, \quad (l)$$

Ist f(x) doppelwerthig, so nimmt man die halbe Summe statt f(x) auf der zweiten Seite, was auch für $x=0$ gilt, da dann in (k′) Null stehen würde, wegen (i). Für $x=\pm c$ ist die Grösse erster Seite $=c[f(c)+f(-c)]$. Man zieht umgekehrt aus diesen Formeln:

$$\left.\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{c}\int_0^c f(z)\partial z + \frac{2}{c}\sum_1^{\infty}\cos\frac{\mu\pi x}{c}\int_0^c f(z)\cos\frac{\mu\pi z}{c}\partial z,\ 0 \overline{\overline{<}} x \overline{\overline{<}} c,\\
f(x) &= \frac{2}{c}\sum_1^{\infty}\sin\frac{\mu\pi x}{c}\int_0^c f(z)\sin\frac{\mu\pi z}{c}\partial z,\ 0<x<c,\\
f(x) &= \frac{1}{2c}\int_{-c}^{+c}f(z)\partial z + \frac{1}{c}\sum_1^{\infty}\int_{-c}^{+c}f(z)\cos\frac{\mu\pi(z-x)}{c}\partial z,\ -c<x<+c,
\end{aligned}\right\}(m)$$

mittelst welcher Formeln man, innerhalb der angegebenen Gränzen, jede beliebige Funktion von x durch eine unendliche Reihe ausdrücken kann. Kann für den betreffenden Werth von x die f(x) zwei verschiedene Werthe annehmen, so hat man auf der ersten Seite weder den einen noch den andern, sondern die halbe Summe beider zu setzen.

§. 97.

Die im vorigen §. gefundenen Sätze geben nun bereits die Mittel zur Auflösung einer bedeutenden Anzahl eigenthümlicher Aufgaben an die Hand, von denen wir einige betrachten wollen.

1.) Man soll eine Funktion von x finden, die von $x=0$ bis $x=c$ gleich 1 sey.

Man setze in der zweiten Formel (m) $f(z)=1$, so ist $\int_0^c f(z)\sin\frac{\mu\pi z}{c}\partial z = \int_0^c\sin\frac{\mu\pi z}{c}\partial z = -\frac{c}{\mu\pi}[\cos\mu\pi - 1]$, so dass also

$$1 = \frac{2}{c}\sum_1^\infty -\frac{c}{\mu\pi}(\cos\mu\pi - 1)\sin\frac{\mu\pi x}{c} = -\frac{2}{\pi}\sum_1^\infty \frac{1}{\mu}(\cos\mu\pi - 1)\sin\frac{\mu\pi x}{c}.$$

Setzt man hier $\mu = 1, 2, \ldots$, so wird also die unendliche Reihe

$$\frac{4}{\pi}\left[\sin\frac{\pi x}{c} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{c} + \frac{1}{5}\sin\frac{5\pi x}{c} + \ldots\ldots\right]$$

immer 1 seyn von $x=0$ bis $x=c$, jedoch mit Ausschluss dieser Gränzen. (Sie ist -1 für $0 > x > -c$).

2.) Man soll eine Funktion von x bestimmen, die von $-c$ bis $+c$ gleich x sey.

In derselben Formel setze man $f(z) = z$, so wird sie auch von 0 bis $-c$ für x gelten. Alsdann ist

$$\int_0^c f(z)\sin\frac{\mu\pi z}{c}\partial z = \int_0^c z\sin\frac{\mu\pi z}{c}\partial z = -\frac{c^2}{\mu\pi}\cos\mu\pi,$$

und mithin

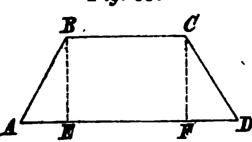
$$-\frac{2}{c}\sum_1^\infty \frac{c^2}{\mu\pi}\cos\mu\pi\sin\frac{\mu\pi x}{c} = x, \quad -c < x < +c$$

d. h. die unendliche Reihe

$$\frac{2c}{\pi}\left[\sin\frac{\pi x}{c} - \frac{1}{2}\sin\frac{2\pi x}{c} + \frac{1}{3}\sin\frac{3\pi x}{c} + \ldots\ldots\right]$$

ist gleich x, von $x = -c$ bis $x = +c$ mit Ausschluss dieser Gränzen.

Fig. 55.



3.) In dem Trapez ABCD (Fig. 55) ist $AE = DF = BE = CF = \alpha$, BC parallel AD, $AD = c$; man soll die Gleichung des Umfangs ABCD aufstellen.

Nimmt man AD als Abszissenaxe, A als Anfangspunkt, so ist $y = x$ die Gleichung der Geraden AB, $y = \alpha$ die von BC, $y = c - x$ die von CD, so dass man also eine Funktion y von x zu bestimmen hat, die von $x = 0$ bis $x = \alpha$ gleich x, von $x = \alpha$ bis $x = c - \alpha$ gleich α, von $x = c - \alpha$ bis $x = c$ gleich $c - x$ ist. Wählt man dazu wieder die zweite Gleichung (m), so ist

$$\int_0^c f(z)\sin\frac{\mu\pi z}{c}\partial z = \int_0^\alpha z\sin\frac{\mu\pi z}{c}\partial z + \int_\alpha^{c-\alpha}\alpha\sin\frac{\mu\pi z}{c}\partial z + \int_{c-\alpha}^c (c-z)\sin\frac{\mu\pi z}{c}\partial z$$

$$= \frac{c^2}{\mu^2\pi^2}\left[\sin\frac{\mu\alpha\pi}{c} + \sin\left(\mu\pi - \frac{\mu\pi\alpha}{c}\right)\right].$$

Setzt man hier nach einander $\mu = 1, 2, \ldots$, so ist also

$$y = \frac{4c}{\pi^2}\left[\sin\frac{\alpha\pi}{c}\sin\frac{x\pi}{c} + \frac{1}{3^2}\sin\frac{3\alpha\pi}{c}\sin\frac{3x\pi}{c} + \frac{1}{5^2}\sin\frac{5\alpha\pi}{c}\sin\frac{5x\pi}{c} + \ldots\right],$$

welche Gleichung (in diesem Falle) auch noch für $x = 0$ und $x = c$ gilt.

Wollte man überhaupt, es solle $y = \varphi_1(x)$ seyn von $x = 0$ bis $x = a_1$, gleich $\varphi_2(x)$ von $x = a_1$ bis $x = a_2$, ..., gleich $\varphi_n(x)$ von $x = a_{n-1}$ bis a_n, so wäre, wenn man etwa die erste Formel (m) benützen würde:

$$y = A_0 + A_1\cos\frac{\pi x}{a_n} + A_2\cos\frac{2\pi x}{a_n} + \ldots\ldots,$$

wo

$$A_0 = \frac{1}{a_n}\left[\int_0^{a_1}\varphi_1(z)\partial z + \int_{a_1}^{a_2}\varphi_2(z)\partial z + \ldots + \int_{a_{n-1}}^{a_n}\varphi_n(z)\partial z\right],$$

und $$A_r = \frac{2}{a_n}\left[\int_0^{a_1}\varphi_1(z)\cos\frac{r\pi z}{a_n}\partial z + \int_{a_1}^{a_2}\varphi_2(z)\cos\frac{r\pi z}{a_n}\partial z + \ldots + \int_{a_{n-1}}^{a_n}\varphi_n(z)\cos\frac{r\pi z}{a_n}\partial z\right],$$
$r = 1, 2, \ldots.$ Für $x = a_1$ ist übrigens $y = \frac{1}{2}[\varphi_1(a_1) + \varphi_2(a_2)], \ldots.,$ für $x = a_{n-1}: y = \frac{1}{2}[\varphi_{n-1}(a_{n-1}) + \varphi_n(a_{n-1})]$.

4.) Das bereits in §. 20, I gelöste Problem lässt sich auch mittelst der Formeln des §. 96 leicht lösen. Man hatte dort:
$$x = \psi + \frac{e}{a}\sin x,\quad tg\tfrac{1}{2}v = \sqrt{\frac{a+e}{a-e}}\,tg\tfrac{1}{2}x,\quad r = a - e\cos x.$$
und sollte x als Funktion von ψ bestimmen, um namentlich v als Funktion von ψ zu erhalten. Man setze
$$v - \psi = A_1\sin\psi + A_2\sin 2\psi + \ldots\ldots,$$
so wird es sich um die Bestimmung von A_n handeln. Nach dem Satze (h) ist aber, wenn $v - \psi = f(\psi)$:
$$f(\psi) = \frac{2}{\pi}\sum_1^\infty \sin\mu\psi\int_0^\pi f(z)\sin\mu z\,\partial z,\quad A_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(z)\sin n z\,\partial z.$$

Die Grösse f(z) erhält man, wenn man in $v-\psi$, d. h. $f(\psi)$, die ψ durch z ersetzt, wo der Zusammenhang zwischen v und ψ durch die obigen Gleichungen gegeben ist. Man sieht leicht, dass
$$\int_0^\pi f(z)\sin n z\,\partial z = \int_0^\pi (v-\psi)\sin n\psi\,\partial\psi,$$
wo der Zusammenhang zwischen v und ψ geradezu aus den obigen Formeln entnommen werden muss. Setzt man hier (behufs Umformung)
$$\psi = x - \frac{e}{a}\sin x,\ \text{so ist}\ tg\tfrac{1}{2}v = \sqrt{\frac{a+e}{a-e}}\,tg\tfrac{1}{2}x,\quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\sqrt{a^2-e^2}}{a-e\cos x}\ (\S.\,7),$$
$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = 1 - \frac{e}{a}\cos x,$$
und da die Gränzen von x auch sind 0 und π, so ist
$$\int_0^\pi f(z)\sin n z\,\partial z = \int_0^\pi\left(v - x + \frac{e}{a}\sin x\right)\sin n\left[x - \frac{e}{a}\sin x\right]\left(1 - \frac{e}{a}\cos x\right)\partial x.$$

Aber es ist (§. 36):
$$\int\left(v - x + \frac{e}{a}\sin x\right)\sin n\left[x - \frac{e}{a}\sin x\right]\left(1 - \frac{e}{a}\cos x\right)\partial x = -\frac{\left(v - x + \frac{e}{a}\sin x\right)\cos n\left[x - \frac{e}{a}\sin x\right]}{n}$$
$$+ \frac{1}{n}\int\left(\frac{\partial v}{\partial x} - 1 + \frac{e}{a}\cos x\right)\cos n\left[x - \frac{e}{a}\sin x\right]\partial x,$$
da $\int \sin n\left(x - \frac{e}{a}\sin x\right)\left(1 - \frac{e}{a}\cos x\right)\partial x = -\frac{1}{n}\cos n\left(x - \frac{e}{a}\sin x\right)$ ist. Also da für $x = 0$, $v = 0$, für $x = \pi$, $v = \pi$:
$$\int_0^\pi\left(v - x + \frac{e}{c}\sin x\right)\sin n\left(x - \frac{e}{a}\sin x\right)\left(1 - \frac{e}{a}\cos x\right)\partial x =$$
$$\frac{1}{n}\int_0^\pi\left[\frac{\sqrt{a^2-e^2}}{a-e\cos x} - 1 + \frac{e}{a}\cos x\right]\cos n\left(x - \frac{e}{a}\sin x\right)\partial x =$$

$$\int_0^\pi \frac{\sqrt{a^2-e^2}}{a-e\cos x}\cos n\left[x-\frac{e}{a}\sin x\right]\partial x-\frac{1}{n}\int_0^\pi\left(1-\frac{e}{a}\cos x\right)\cos n\left(x-\frac{e}{a}\sin x\right)\partial x.$$

und da letztere Grösse $=0$, indem $\int\left(1-\frac{e}{a}\cos x\right)\cos n\left(x-\frac{e}{a}\sin x\right)\partial x=\frac{1}{n}\sin n\left(x-\frac{e}{a}\sin x\right)$, so ist endlich

$$A_n=\frac{2\sqrt{a^2-e^2}}{n\pi}\int_0^\pi\frac{\cos\left[n\left(x-\frac{e}{a}\sin x\right)\right]\partial x}{a-e\cos x}.$$

Will man diesen Werth berechnen, so setze man zuerst

$$\cos\left(nx-\frac{ne}{a}\sin x\right)=\cos nx\cos\left(\frac{ne}{a}\sin x\right)+\sin nx\sin\left(\frac{ne}{a}\sin x\right),$$

verwandele dann $\cos\left(\frac{ne}{a}\sin x\right)$, $\sin\left(\frac{ne}{a}\sin x\right)$ in unendliche Reihen (§. 17), so wird man Integrale erhalten, die nach §. 45 bestimmt werden können.

Setzt man eben so

$$r=B_0+B_1\cos\psi+B_2\cos 2\psi+\ldots\ldots,$$

so ist nach der Formel (g) in §. 96:

$$B_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi r\cos n\psi\,\partial\psi,\quad B_0=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi r\,\partial\psi.$$

Ganz eben so wie vorhin ist wieder

$$B_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi(a-e\cos x)\cos n\left(x-\frac{e}{a}\sin x\right)\left(1-\frac{e}{a}\cos x\right)\partial x=-\frac{2}{n\pi}\int_0^\pi\sin n\left(x-\frac{e}{a}\sin x\right)e\sin x\,\partial x$$

$$=-\frac{2e}{n\pi}\int_0^\pi\sin x\sin\left[n\left(x-\frac{e}{a}\sin x\right)\right]\partial x,\ n=1,2,\ldots;\ B_0=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi(a-e\cos x)\left(1-\frac{e}{a}\cos x\right)\partial x$$

$$=\frac{a}{\pi}\int_0^\pi\left(1-\frac{e}{a}\cos x\right)^2\partial x=a\left(1+\frac{1}{2}\frac{e^2}{a^2}\right).$$

Anm. Diese Auflösung rührt von Bessel her. Man sehe „Zeitschrift für Astronomie etc." von Lindenau und Bohnenberger, 5. Band, 1818. S. 367. Poisson theilt sie in seiner Mechanik (ohne Nennung des Urhebers) I, §. 221 mit, jedoch in etwas zu weitläufiger Form.

5.) Dass man die abgeleiteten Formeln zu Reihensummirungen benützen kann, ist leicht ersichtlich.

Setzt man etwa in der Formel (h): $f(x)=e^{mx}$, so ergibt sich (§. 43):

$$\frac{e^{m\pi}+1}{m^2+1}\sin x-\frac{2(e^{m\pi}-1)}{m^2+4}\sin 2x+\frac{3(e^{m\pi}+1)}{m^2+9}\sin 3x-\ldots=\frac{\pi}{2}e^{mx},\ 0<x<\pi,$$

während die Formel (g) gibt:

$$\frac{e^{m\pi}-1}{2m^2}-\frac{e^{m\pi}+1}{m^2+1}\cos x+\frac{e^{m\pi}+1}{m^2+4}\cos 2x-\frac{e^{m\pi}+1}{m^2+9}\cos 3x+\ldots=\frac{\pi}{2m}e^{mx},\ 0\overset{=}{<}x\overset{=}{<}\pi.$$

Setzt man in derselben Formel $f(x)=\sin x$, so ist wegen

$$\int_0^\pi \sin z \cos \mu z\, \partial z = \tfrac{1}{2}\int_0^\pi [\sin(\mu+1)z - \sin(\mu-1)z]\,\partial z = \tfrac{1}{2}\Big[-\frac{\cos(\mu+1)\pi}{\mu+1} + \frac{\cos(\mu-1)\pi}{\mu-1} - \frac{2}{\mu^2-1}\Big] = -\frac{1}{\mu^2-1} + \frac{\cos\mu\pi}{2(\mu+1)} - \frac{\cos\mu\pi}{2(\mu-1)} = -\frac{\cos\mu\pi+1}{\mu^2-1} = -\frac{(\cos\mu\pi+1)}{(\mu+1)(\mu-1)},$$

und
$$\int_0^\pi \sin z \cos z\, \partial z = \tfrac{1}{2}\int_0^\pi \sin 2z\, \partial z = 0,\quad \int_0^\pi \sin z\, \partial z = 2:$$

$$1 - 2\Big[\frac{\cos 2x}{1.3} + \frac{\cos 4x}{3.5} + \frac{\cos 6x}{5.7} + \ldots\Big] = \frac{\pi}{2}\sin x,\quad 0 \overline{\gtrless} x \overline{\gtrless} \pi.$$

Eine Menge solcher Resultate habe ich abgeleitet in Crelles Journal, 34. Bd., S. 75—100.

Die Formeln des §. 96 lassen sich leicht auf Funktionen mehrerer Veränderlichen ausdehnen. Ist nämlich $f(x, y)$ eine beliebige Funktion der zwei Veränderlichen x und y, so hat man nach (m):

$$f(x, y) = \frac{1}{c}\int_0^c f(u, y)\,\partial u + \frac{2}{c}\sum_{n=1}^{n=\infty} \cos\frac{n\pi x}{c}\int_0^c f(u, y)\cos\frac{n\pi u}{c}\,\partial u$$

$$= \frac{2}{c}\sum_{n=1}^{n=\infty} \sin\frac{n\pi x}{c}\int_0^c f(u, y)\sin\frac{n\pi u}{c}\,\partial u$$

$$= \frac{1}{2c}\int_{-c}^{+c} f(u, y)\,\partial u + \frac{1}{c}\sum_{n=1}^{n=\infty}\int_{-c}^{+c} f(u, y)\cos\frac{n(u-x)\pi}{c}\,\partial u,$$

während nach denselben Formeln:

$$f(u, y) = \frac{1}{c'}\int_0^{c'} f(u, v)\,\partial v + \frac{2}{c'}\sum_{n'=1}^{n'=\infty} \cos\frac{n'\pi y}{c'}\int_0^{c'} f(u, v)\cos\frac{n'\pi v}{c'}\,\partial v,$$

$$= \frac{2}{c'}\sum_{n'=1}^{n'=\infty} \sin\frac{n'\pi y}{c'}\int_0^{c'} f(u, v)\sin\frac{n'\pi v}{c'}\,\partial v$$

$$= \frac{1}{2c'}\int_{-c'}^{c'} f(u, v)\,\partial v + \frac{1}{c'}\sum_{n'=1}^{n'=\infty}\int_{-c'}^{+c'} f(u, v)\cos\frac{n'(v-y)\pi}{c'}\,\partial v.$$

Setzt man letztere Werthe in jeden der ersten ein, so erhält man neunerlei Ausdrücke für $f(x, y)$, die sind:

$$f(x, y) = \frac{1}{cc'}\int_0^c \partial u\int_0^{c'} f(u, v)\,\partial v + \frac{2}{cc'}\sum_{n'=1}^{n'=\infty} \cos\frac{n'\pi y}{c'}\int_0^c \partial u\int_0^{c'} f(u, v)\cos\frac{n'\pi v}{c'}\,\partial v$$

$$+ \frac{2}{cc'}\sum_{n=1}^{n=\infty} \cos\frac{n\pi x}{c}\int_0^c \partial u\int_0^{c'} f(u, v)\cos\frac{n\pi u}{c}\,\partial v$$

$$+ \frac{4}{cc'}\sum_{n=1}^{n=\infty}\sum_{n'=1}^{n'=\infty} \cos\frac{n\pi x}{c}\cos\frac{n'\pi y}{c'}\int_0^c \partial u\int_0^{c'} f(u, v)\cos\frac{n\pi u}{c}\cos\frac{n'\pi v}{c'}\,\partial v,$$

$$0 \overline{\gtrless} x \overline{\gtrless} c,\quad 0 \overline{\gtrless} y \overline{\gtrless} c',$$

$$f(x, y) = \frac{2}{cc'} \sum_{n'=1}^{n'=\infty} \sin\frac{n'\pi y}{c'} \int_0^c \partial u \int_0^{c'} f(u, v) \sin\frac{n'\pi v}{c'} \partial v$$

$$+ \frac{4}{cc'} \sum_{n'=1}^{n'=\infty} \sum_{n=1}^{n=\infty} \cos\frac{n\pi x}{c} \sin\frac{n'\pi y}{c'} \int_0^c \partial u \int_0^{c'} f(u, v) \cos\frac{n\pi u}{c} \sin\frac{n'\pi v}{c'} \partial v$$

$$0 \overset{=}{<} x \overset{=}{<} c, \; 0 < y < c'$$

u. s. w.

Man sieht, dass man hiedurch unendliche Doppelreihen erhält, deren Glieder von der Form

$$A \frac{\sin}{\cos} \frac{n\pi x}{c} \frac{\sin}{\cos} \frac{n'\pi y}{c'}$$

sind. Gesetzt also etwa, man solle f (x, y) als eine unendliche Doppelreihe ausdrücken, deren allgemeines Glied

$$A_{n,n'} \sin\frac{n\pi x}{c} \sin\frac{n'\pi y}{c'},$$

wo n und n' von 1 bis ∞ gehen können, so ist, dem Vorstehenden gemäss

$$A_{n,n'} = \frac{4}{cc'} \int_0^c \partial u \int_0^{c'} f(u, v) \sin\frac{n\pi u}{c} \sin\frac{n'\pi v}{c'} \partial v.$$

Ganz in derselben Weise wird man eine Funktion dreier Veränderlichen im Ganzen in 27 verschiedenen Weisen, durch dreifach unendliche Reihen ausdrücken. Gesetzt etwa, man solle f(x, y, z) als eine solche Reihe finden, deren allgemeines Glied ist

$$A_{n,n',n''} \cos\frac{n\pi x}{c} \sin\frac{n'\pi y}{c'} \sin\frac{n''\pi z}{c''},$$

wobei n, n', n'' von 1 bis ∞ gehen können, so dass eine dreifach unendliche Reihe entsteht, so wird man nach einander haben:

$$f(x,y,z) = \frac{1}{c}\int_0^c f(u,y,z)\,\partial u + \frac{2}{c}\sum_{n=1}^{n=\infty} \cos\frac{n\pi x}{c} \int_0^c f(u,y,z) \cos\frac{n\pi u}{c} \partial u, \; 0 \overset{=}{<} x \overset{=}{<} c,$$

$$f(u,y,z) = \frac{2}{c'} \sum_{n'=1}^{n'=\infty} \sin\frac{n'\pi y}{c'} \int_0^{c'} f(u,v,z) \sin\frac{n'\pi v}{c'} \partial v, \; 0 < y < c';$$

$$f(u,v,z) = \frac{2}{c''} \sum_{n''=1}^{n''=\infty} \sin\frac{n''\pi z}{c''} \int_0^{c''} f(u,v,w) \sin\frac{n''\pi w}{c''} \partial w, \; 0 < z < c'',$$

woraus nun, indem man substituirt:

$$f(x,y,z) = \frac{4}{cc'c''} \sum_{n'=1}^{n'=\infty} \sum_{n''=1}^{n''=\infty} \sin\frac{n'\pi y}{c'} \sin\frac{n''\pi z}{c''} \int_0^c \partial u \int_0^{c'} \partial v \int_0^{c''} f(u,v,w) \sin\frac{n'\pi v}{c'} \sin\frac{n''\pi w}{c''} \partial w$$

$$+ \frac{8}{cc'c''} \sum_{n=1}^{n=\infty} \sum_{n'=1}^{n'=\infty} \sum_{n''=1}^{n''=\infty} \cos\frac{n\pi x}{c} \sin\frac{n'\pi y}{c'} \sin\frac{n''\pi z}{c''} \int_0^c \partial u \int_0^{c'} \partial v \int_0^{c''} f(u,v,w) \sin\frac{n\pi u}{c}$$

$$\sin\frac{n'\pi v}{c'} \sin\frac{n''\pi w}{c''} \partial w,$$

$$0 \overset{=}{<} x \overset{=}{<} c, \; 0 < y < c', \; 0 < z < c''.$$

Wie man eben so für Funktionen von vier oder mehr Veränderlichen verfahren kann, ist hiernach klar. So wären also etwa

$$f(x,y,z,s)=\frac{16}{c\,c'\,c''\,c'''}\sum_{n=1}^{n=\infty}\sum_{n'=1}^{n'=\infty}\sum_{n''=1}^{n''=\infty}\sum_{n'''=1}^{n'''=\infty}\sin\frac{n\pi x}{c}\sin\frac{n'\pi y}{c'}\sin\frac{n''\pi z}{c''}$$

$$\sin\frac{n'''\pi s}{c'''}\int_0^c\partial u\int_0^{c'}\partial v\int_0^{c''}\partial w\int_0^{c'''}f(u,v,w,t)\sin\frac{n\pi u}{c}\sin\frac{n'\pi v}{c'}\sin\frac{n''\pi w}{c''}\sin\frac{n'''\pi t}{c'''}\partial t,$$

$$0<x<c,\ 0<y<c',\ 0<z<c'',\ 0<s<c''',$$

u. s. w.

§. 98.

Wir wollen in den Formeln (i) des §. 96 annehmen, es sey $\varphi(x)$ von $x=0$ bis $x=a$ gleich einer bestimmten Funktion $F(x)$, dagegen Null von $x=a$ bis $x=c$, wo $a>0$, $c>a$ sey; alsdann ist

$$\int_0^c\varphi(z)\cos\frac{\mu\pi z}{c}\partial z=\int_0^a F(z)\cos\frac{\mu\pi z}{c}\partial z+\int_a^c 0.\cos\frac{\mu\pi z}{c}\partial z=\int_0^a F(z)\cos\frac{\mu\pi z}{c}\partial z,$$

und es ist also

$$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{c}\int_0^a F(z)\partial z+\frac{2}{c}\sum_1^\infty\cos\frac{\mu\pi x}{c}\int_0^a F(z)\cos\frac{\mu\pi z}{c}\partial z=\begin{cases}F(x), & \text{wenn } 0\overline{\overline{<}}x<a,\\ \frac{1}{2}F(a), & \text{wenn } x=a,\\ 0, & \text{wenn } a<x\overline{\overline{<}}c,\end{cases}\\ \qquad\frac{2}{c}\sum_1^\infty\sin\frac{\mu\pi x}{c}\int_0^a F(z)\sin\frac{\mu\pi z}{c}\partial z=\begin{cases}F(x), & 0<x<a,\\ \frac{1}{2}F(a), & x=a,\\ 0, & a<x<c.\end{cases}\end{array}\right\}\ c>a>0.\quad\text{(n)}$$

Setzen wir eben so in der Formel (l) des §. 96 voraus, $f(x)$ sey gleich $F(x)$ von $x=-a$ bis $x=+a$, Null von $x=-c$ bis $x=-a$, und von $x=+a$ bis $x=+c$, so erhält man:

$$\frac{1}{2c}\int_{-a}^{+a}F(z)\partial z+\frac{1}{c}\sum_1^\infty\int_{-a}^{+a}F(z)\cos\frac{\mu\pi(z-x)}{c}\partial z=\begin{cases}F(x), & -a<x<+a,\\ \frac{1}{2}F(x), & x=\pm a,\\ 0, & -c<x<-a,\ +a<x<+c,\end{cases}\quad c>a>0.\quad\text{(n')}$$

Die Sätze (n) und (n') bestehen für jedes c, also auch noch, wenn c unbegränzt wächst. Setzt man nun $\frac{\pi}{c}=\varepsilon$, so wird ε mit unbegränzt wachsendem c unbegränzt abnehmen, und da hiernach $c=\frac{\pi}{\varepsilon}$, so ist, wenn Gr. sich auf ein unendliches Abnehmen von ε bezieht (§. 2):

$$\text{Gr.}\left[\frac{\varepsilon}{\pi}\int_0^a F(z)\partial z+\frac{2\varepsilon}{\pi}\sum_1^\infty\cos\mu\varepsilon x\int_0^a F(z)\cos\mu\varepsilon z\,\partial z\right]=F(x),\ 0\overline{\overline{<}}x<a \text{ u. s. w.}$$

Aber es ist die erste Seite gleich

$$\text{Gr.}\frac{2\varepsilon}{\pi}\int_0^a\left[\frac{1}{2}+\cos\varepsilon x\cos\varepsilon z+\cos 2\varepsilon x\cos 2\varepsilon z+\ldots\ldots\right]F(z)\partial z$$

$$=\text{Gr.}\frac{2\varepsilon}{\pi}\int_0^a[1+\cos\varepsilon x\cos\varepsilon z+\cos 2\varepsilon x\cos 2\varepsilon z+\ldots\ldots]F(z)\partial z,$$

indem Gr. $\frac{\varepsilon}{\pi}=0$, man also immer $\frac{\varepsilon}{\pi}$ in den Klammern zufügen kann. Diese Grösse ist aber (§. 48):

$$\frac{2}{\pi}\int_a^a \partial z \int_0^\infty \cos(ux)\cos(uz)F(z)\partial u,$$

so dass man aus den Gleichungen (n) und (n′) zieht

$$\left.\begin{array}{l}
\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \partial u \int_0^a \cos(ux)\cos(uz)F(z)\partial z = \begin{cases} F(x), & 0 \leqq x < a, \\ \frac{1}{2}F(x), & x=a, \\ 0, & a<x<\infty. \end{cases} \\
\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \partial u \int_0^a \sin(ux)\sin(uz)F(z)\partial z = \begin{cases} F(x), & 0<x<a, \\ \frac{1}{2}F(x), & x=a, \\ 0, & a<x<\infty. \end{cases} \\
\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \partial u \int_{-a}^{+a} \cos u(z-x)F(z)\partial z = \begin{cases} F(x), & -a<x<+a, \\ \frac{1}{2}F(x), & x=\pm a, \\ 0, & -\infty<x<-a,\ +a<x<+\infty. \end{cases}
\end{array}\right\} \quad (p)$$

In diesen Gleichungen ist a ganz beliebig. Lässt man nun a unbegränzt wachsen, so erhält man:

$$\left.\begin{array}{l}
\frac{2}{\pi}\overline{\int\int_0^{+\infty}}\cos(ux)\cos(uz)F(z)\partial u\,\partial z = F(x),\ 0 \leqq x<\infty; \\
\frac{2}{\pi}\overline{\int\int_0^{+\infty}}\sin(ux)\sin(uz)F(z)\partial u\,\partial z = F(x),\ 0<x<\infty; \\
\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \partial u \int_{-\infty}^{+\infty}\cos u(z-x)F(z)\partial z = F(x),\ -\infty<x<+\infty,
\end{array}\right\} \quad (q)$$

von welchen Formeln die letzte auch gibt (§. 49, VII):

$$\frac{1}{2\pi}\overline{\int\int_{-\infty}^{+\infty}}\cos u(z-x)F(z)\partial u\,\partial z = F(x),\ -\infty<x<+\infty. \quad (r)$$

Es versteht sich ganz von selbst, dass in all diesen Formeln F (z) innerhalb der Integrationsgränzen endlich seyn muss. Wir wollen diese Ergebnisse nun auf einige Beispiele anwenden.

1.) Sey in der Formel (q) $F(z)=e^{-z}$, so ist (§. 50, III): $\int_0^\infty e^{-z}\cos(uz)\partial z = \frac{1}{1+u^2}$, $\int_0^\infty e^{-z}\sin(uz)\partial z = \frac{u}{1+u^2}$, so dass

$$\int_0^\infty \frac{\cos(ux)}{1+u^2}\partial u = \frac{\pi}{2}e^{-x},\ 0 \leqq x<\infty;\ \int_0^\infty \frac{u\sin(ux)}{1+u^2}\partial u = \frac{\pi}{2}e^{-x},\ 0<x<\infty,$$

welche Formeln schon in §. 63, II gefunden wurden.

3.) Setzt man $F(z)=\int_a^b f(v)e^{-zv}\partial v$, so erhält man aus denselben Formeln (q):

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \partial u \int_0^\infty \partial z \int_a^b \cos(ux)\cos(uz)f(v)e^{-zv}\partial v = \int_a^b f(v)e^{-xv}\partial v,\ 0 \leqq x<\infty,$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \partial u \int_0^\infty \partial z \int_0^n \sin(ux)\sin(uz) f(v) e^{-zv} \partial v = \int_0^b f(v) e^{-xv} \partial v,\ 0 < x < \infty,$$

Nun ist aber (§. 50, III):

$$\int_0^\infty e^{-zv} \cos(uz)\,\partial z = \frac{v}{u^2+v^2},\quad \int_0^\infty e^{-zv} \sin(uz)\,\partial z = \frac{u}{u^2+v^2},$$

so dass also

$$\left.\begin{aligned}\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \partial u \int_a^b \frac{v\cos(ux)}{u^2+v^2} f(v)\,\partial v &= \int_a^b f(v) e^{-xv}\,\partial v,\\ \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \partial u \int_a^b \frac{u\sin(ux)}{u^2+v^2} f(v)\,\partial v &= \int_a^b f(v) e^{-xv}\,\partial v.\end{aligned}\right\}\quad (\alpha)$$

Beide Formeln verlangen, dass $x > 0$ sey; die erste gilt noch für $x = 0$, d. h. man hat:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \partial u \int_a^b \frac{v}{u^2+v^2} f(v)\,\partial v = \int_a^b f(v)\,\partial v. \qquad (\alpha')$$

Setzt man in der Formel (α') etwa $f(v) = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$, nimmt $a = 0$, $b = 1$, so ist wegen $\int_0^1 \frac{\partial v}{\sqrt{1-v^2}} = \frac{\pi}{2}$:

$$\int_0^\infty \partial u \int_0^1 \frac{v\,\partial v}{(u^2+v^2)\sqrt{1-v^2}} = \frac{\pi^2}{4}.$$

Aber
$$\int \frac{v\,\partial v}{(u^2+v^2)\sqrt{1-v^2}} = \frac{1}{2\sqrt{1+u^2}}\, l\left(\frac{\sqrt{1+u^2}-\sqrt{1-v^2}}{\sqrt{1+u^2}+\sqrt{1-v^2}}\right),$$
$$\int_0^1 \frac{v\,\partial v}{(u^2+v^2)\sqrt{1-v^2}} = \frac{1}{2\sqrt{1+u^2}}\, l\left(\frac{\sqrt{1+u^2}+1}{\sqrt{1+u^2}-1}\right),$$

so dass endlich

$$\int_0^\infty l\left(\frac{\sqrt{1+u^2}+1}{\sqrt{1+u^2}-1}\right)\frac{\partial u}{\sqrt{1+u^2}} = \frac{\pi^2}{2}.$$

Setzt man in diesem Integrale $u = tg\,x$, also $\sqrt{1+u^2} = \frac{1}{\cos x}$, $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\cos^2 x}$, so sind die Gränzen von x : 0 und $\frac{\pi}{2}$, so dass

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} l\left(\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\right)\frac{\partial x}{\cos x} = \frac{\pi^2}{2},\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} l\left(\cotg\frac{x}{2}\right)\frac{\partial x}{\cos x} = \frac{\pi^2}{4}.$$

3.) Aus der Gleichung

$$\int_0^\infty e^{-ax}\cos(bx)\,\partial x = \frac{a}{a^2+b^2},\ b>0,\ a>0,$$

indem Gr. $\frac{\delta}{\pi}=0$, man also immer $\frac{\delta}{\pi}$ in den Klammern zufügen kann. Diese Grösse ist aber (§. 48):

$$\frac{2}{\pi}\int_a^a \partial z \int_0^\infty \cos(ux)\cos(uz)F(z)\partial u,$$

so dass man aus den Gleichungen (n) und (n′) zieht

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \partial u \int_0^a \cos(ux)\cos(uz)F(z)\partial z = \begin{cases} F(x), & 0 \overset{=}{<} x < a, \\ \frac{1}{2}F(x), & x = a, \\ 0, & a < x < \infty. \end{cases}$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \partial u \int_0^a \sin(ux)\sin(uz)F(z)\partial z = \begin{cases} F(x), & 0 < x < a, \\ \frac{1}{2}F(x), & x = a, \\ 0, & a < x < \infty. \end{cases} \quad \text{(p)}$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \partial u \int_{-a}^{+a} \cos u(z-x)F(z)\partial z = \begin{cases} F(x), & -a < x < +a, \\ \frac{1}{2}F(x), & x = \pm a, \\ 0, & -\infty < x < -a,\ +a < x < +\infty. \end{cases}$$

In diesen Gleichungen ist a ganz beliebig. Lässt man nun a unbegränzt wachsen, so erhält man:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{2}{\pi}\int\int_0^{+\infty} \cos(ux)\cos(uz)F(z)\partial u\,\partial z = F(x), \quad 0 \overset{=}{<} x < \infty; \\ \frac{2}{\pi}\int\int_0^{+\infty} \sin(ux)\sin(uz)F(z)\partial u\,\partial z = F(x), \quad 0 < x < \infty; \\ \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \partial u \int_{-\infty}^{+\infty} \cos u(z-x)F(z)\partial z = F(x), \quad -\infty < x < +\infty, \end{array}\right\} \quad \text{(q)}$$

von welchen Formeln die letzte auch gibt (§. 49, VII):

$$\frac{1}{2\pi}\int\int_{-\infty}^{+\infty} \cos u(z-x)F(z)\partial u\,\partial z = F(x), \quad -\infty < x < +\infty. \quad \text{(r)}$$

Es versteht sich ganz von selbst, dass in all diesen Formeln F (z) innerhalb der Integrationsgränzen endlich seyn muss. Wir wollen diese Ergebnisse nun auf einige Beispiele anwenden.

1.) Sey in der Formel (q) $F(z)=e^{-z}$, so ist (§. 50, III): $\int_0^\infty e^{-z}\cos(uz)\partial z = \frac{1}{1+u^2}$, $\int_0^\infty e^{-z}\sin(uz)\partial z = \frac{u}{1+u^2}$, so dass

$$\int_0^\infty \frac{\cos(ux)}{1+u^2}\partial u = \frac{\pi}{2}e^{-x},\ 0 \overset{=}{<} x < \infty;\ \int_0^\infty \frac{u\sin(ux)}{1+u^2}\partial u = \frac{\pi}{2}e^{-x},\ 0 < x < \infty,$$

welche Formeln schon in §. 63, II gefunden wurden.

3.) Setzt man $F(z)=\int_a^b f(v)e^{-zv}\partial v$, so erhält man aus denselben Formeln (q):

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \partial u \int_0^\infty \partial z \int_a^b \cos(ux)\cos(uz)f(v)e^{-zv}\partial v = \int_a^b f(v)e^{-xv}\partial v,\ 0 \overset{=}{<} x < \infty,$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \partial u \int_0^\infty \partial z \int_0^a \sin(ux)\sin(uz)f(v)e^{-zv}\partial v = \int_0^b f(v)e^{-xv}\partial v,\ 0<x<\infty.$$

Nun ist aber (§. 50, III):

$$\int_0^\infty e^{-zv}\cos(uz)\,\partial z = \frac{v}{u^2+v^2},\quad \int_0^\infty e^{-zv}\sin(uz)\,\partial z = \frac{u}{u^2+v^2},$$

so dass also

$$\left.\begin{aligned}\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \partial u \int_a^b \frac{v\cos(ux)}{u^2+v^2}f(v)\partial v &= \int_a^b f(v)e^{-xv}\partial v,\\ \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \partial u \int_a^b \frac{u\sin(ux)}{u^2+v^2}f(v)\partial v &= \int_a^b f(v)e^{-xv}\partial v.\end{aligned}\right\}\quad (\alpha)$$

Beide Formeln verlangen, dass $x>0$ sey; die erste gilt noch für $x=0$, d. h. man hat:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \partial u \int_a^b \frac{v}{u^2+v^2}f(v)\partial v = \int_a^b f(v)\partial v. \quad (\alpha')$$

Setzt man in der Formel (α') etwa $f(v)=\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$, nimmt $a=0$, $b=1$, so ist wegen $\int_0^1 \frac{\partial v}{\sqrt{1-v^2}} = \frac{\pi}{2}$:

$$\int_0^\infty \partial u \int_0^1 \frac{v\,\partial v}{(u^2+v^2)\sqrt{1-v^2}} = \frac{\pi^2}{4}.$$

Aber
$$\int \frac{v\,\partial v}{(u^2+v^2)\sqrt{1-v^2}} = \frac{1}{2\sqrt{1+u^2}}\,l\left(\frac{\sqrt{1+u^2}-\sqrt{1-v^2}}{\sqrt{1+u^2}+\sqrt{1-v^2}}\right),$$
$$\int_0^1 \frac{v\,\partial v}{(u^2+v^2)\sqrt{1-v^2}} = \frac{1}{2\sqrt{1+u^2}}\,l\left(\frac{\sqrt{1+u^2}+1}{\sqrt{1+u^2}-1}\right),$$

so dass endlich

$$\int_0^\infty l\left(\frac{\sqrt{1+u^2}+1}{\sqrt{1+u^2}-1}\right)\frac{\partial u}{\sqrt{1+u^2}} = \frac{\pi^2}{2}.$$

Setzt man in diesem Integrale $u=\operatorname{tg} x$, also $\sqrt{1+u^2}=\frac{1}{\cos x}$, $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{\cos^2 x}$, so sind die Gränzen von x : 0 und $\frac{\pi}{2}$, so dass

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} l\left(\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\right)\frac{\partial x}{\cos x} = \frac{\pi^2}{2},\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} l\left(\operatorname{cotg}\frac{x}{2}\right)\frac{\partial x}{\cos x} = \frac{\pi^2}{4}.$$

3.) Aus der Gleichung

$$\int_0^\infty e^{-ax}\cos(bx)\,\partial x = \frac{a}{a^2+b^2},\ b>0,\ a>0,$$

in §. 50 folgt nach §. 61, wenn $z>0$:

$$\int_0^z \partial b \int_0^\infty e^{-ax}\cos(bx)\,\partial x = a\int_0^z \frac{\partial b}{a^2+b^2}.$$

Da aber $\int_0^z \cos(bx)\,\partial b = \frac{1}{x}\sin(xz)$, $\int_0^z \frac{\partial b}{a^2+b^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arc}\left(tg=\frac{z}{a}\right)$, so ist also

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax}\sin(xz)}{x}\partial x = \operatorname{arc}\left(tg=\frac{z}{a}\right),\ z>0,\ a\geqq 0,$$

wie schon aus der Formel (c) in §. 61 folgt, wenn man dort $\beta=\infty$, $x=a$, $b=z$ setzt und beachtet, dass dann die zweite Seite =

$$\operatorname{arc}(tg=\infty)-\operatorname{arc}\left(tg=\frac{a}{z}\right)=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arc}\left(tg=\frac{z}{a}\right)\text{ ist.}$$

Angenommen nun, man setze in (q) $F(z)=\int_0^\infty \frac{e^{-zv}\sin(av)}{v}\partial v = \operatorname{arc}\left(tg=\frac{a}{z}\right)$,

so ist

$$\frac{2}{\pi}\int\!\!\int\!\!\int_0^{+\infty} \frac{e^{-zv}\cos(ux)\cos(uz)\sin(av)}{v}\partial u\,\partial z\,\partial v = \operatorname{arc}\left(tg=\frac{a}{x}\right),\ 0\leqq x<\infty,$$

$$\frac{2}{\pi}\int\!\!\int\!\!\int_0^{+\infty} \frac{e^{-zv}\sin(ux)\sin(uz)\sin(av)}{v}\partial u\,\partial z\,\partial v = \operatorname{arc}\left(tg=\frac{a}{x}\right),\ 0<x<\infty.$$

Aber es ist

$$\int_0^\infty e^{-zv}\cos(uz)\,\partial z = \frac{v}{v^2+u^2},\ \int_0^\infty e^{-zv}\sin(uz)\,\partial z = \frac{u}{v^2+u^2},$$

so dass:

$$\left.\begin{aligned}\int\!\!\int_0^\infty \frac{\cos(ux)\sin(av)}{v^2+u^2}\partial u\,\partial v &= \frac{\pi}{2}\operatorname{arc}\left(tg=\frac{a}{x}\right),\ 0\leqq x<\infty,\\ \int\!\!\int_0^\infty \frac{\sin(ux)\sin(av)}{v^2+u^2}\cdot\frac{u}{v}\partial u\,\partial v &= \frac{\pi}{2}\operatorname{arc}\left(tg=\frac{a}{x}\right),\ 0<x<\infty.\end{aligned}\right\}(\beta)$$

4.) Will man diejenige Funktion $f(u)$ suchen, für welche von $x=0$ bis $x=\infty$:

$$\int_0^\infty \cos(ux)f(u)\,\partial u = F(x),$$

so ist dieselbe, gemäss (q):

$$f(u)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos(uz)F(z)\,\partial z.$$

Eben so, wenn von $x>0$ bis $x<\infty$:

$$\int_0^\infty \sin(ux)f(u)\,\partial u = F(x):\ f(u)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \sin(uz)F(z)\,\partial z.$$

Aus der Formel (r) folgt

$$F(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int\!\!\int F(u,y)\cos\alpha(u-x)\,\partial\alpha\,\partial u,$$

$$F(u,y)=\frac{1}{2\pi}\int\int F(u,v)\cos\beta(v-y)\,\partial\beta\,\partial v,$$

also
$$F(x,y)=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int\!\!\int\!\!\int F(u,v)\cos\alpha(u-x)\cos\beta(v-y)\,\partial u\,\partial v\,\partial\alpha\,\partial\beta. \qquad (r')$$

Eben so, wenn n die Anzahl der Veränderlichen:

$$F(x,y,z,\ldots)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int\ldots\int F(u_1,u_2,\ldots,u_n)\cos\alpha_1(u_1-x)\cos\alpha_2(u_2-y)\ldots\ldots\ldots$$
$$\partial u_1\,\partial u_2\ldots\partial u_n\,\partial\alpha_1\ldots\partial\alpha_n \qquad (r'')$$

da (§. 49)

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int \sin\alpha(u-x)\,\partial u\,\partial\alpha=0,$$

so ist
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int e^{\alpha(u-x)i}\,F(u)\,\partial u\,\partial\alpha=\int_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int\cos\alpha(u-x)F(u)\,\partial u\,\partial\alpha,$$

so dass auch
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int e^{(u-x)\alpha i}\,F(u)\,\partial\alpha\,\partial u=F(x), \qquad (s)$$

woraus

$$F(x,y,z,\ldots)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int\ldots\int e^{[\alpha_1(u_1-x)+\alpha_2(u_2-y)+\ldots]i}\,F(u_1,u_2,\ldots,u_n)\,\partial\alpha_1\ldots\partial\alpha_n$$
$$\partial u_1\ldots\partial u_n. \qquad (s')$$

Diese Formel kommt auf

$$F(x,y,z,\ldots)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{-\infty}^{+\infty}\!\!\int\ldots\int\cos[\alpha_1(u_1-x)+\alpha_2(u_2-y)+\ldots]F(u_1,\ldots,u_n)\,\partial\alpha_1\ldots\partial u_n \qquad (s'')$$

zurück, die jedoch mit (r″) übereinstimmt, wenn man $\cos[\alpha_1(u_1-x)+\alpha_2(u_2-y)+\ldots]$ entwickelt und beachtet, dass alle Glieder, die einen Sinus enthalten, von selbst wegfallen. Dass in allen diesen Formeln die Grösse unter den Integralzeichen innerhalb der Integrationsgränzen endlich seyn muss, versteht sich von selbst. Diese Formeln zeigen, in welcher Weise Funktionen durch bestimmte Integrale auszudrücken sind, und sind in den Anwendungen auf mathematische Physik von ausgedehnter Anwendung, wie wir diess an einem Beispiele erläutern wollen.

In §. 84, II haben wir für die Bewegung der Wärme in einem dünnen Stabe oder Ringe die Differentialgleichung:

$$\frac{\partial v}{\partial t}=\frac{k}{c\varrho}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\frac{w\gamma}{c\omega\varrho}v$$

gefunden. Setzt man zur Abkürzung $\frac{k}{c\varrho}=a$, $\frac{w\gamma}{c\omega\varrho}=b$, so ist sie: $\frac{\partial v}{\partial t}=a\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-bv$, und wenn dann $v=e^{-bt}u$ gesetzt wird, so ist $\frac{\partial v}{\partial t}=-be^{-bt}u+e^{-bt}\frac{\partial u}{\partial t}$, also:

$$-be^{-bt}u+e^{-bt}\frac{\partial u}{\partial t}=ae^{-bt}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-be^{-bt}u,\text{ d. h. }\frac{\partial u}{\partial t}=a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Diese Gleichung bestimmt nun u, d. h. v; somit muss u so beschaffen seyn, dass sein Werth dieser Gleichung genügt, und überdiess muss für $t=0$ dann durch u (d. h. v) der anfängliche, als gegeben anzusehende Zustand des Stabes dargestellt seyn. Wir wollen, um die Betrachtung zu erleichtern, annehmen, es handle sich um einen geschlossenen zylindrischen Ring, der dünn genug sey, damit dieselben Gleichungen für ihn gelten, wie für einen Stab. Derselbe ist anfänglich willkürlich erwärmt worden, und wurde dann sich selbst überlassen, indem er in einen Raum von der Temperatur 0^0 gebracht wurde. Sey x der Abstand eines Punktes des Ringes (seiner Mittellinie) von einem beliebig gewählten Anfangspunkte, f(x) die Temperatur zu Anfang der Zeit in diesem Punkte, λ die Länge des Ringes, v die Temperatur zur Zeit t in dem Punkte x. Man erhält aus der Differentialgleichung, wenn man $u=e^{mx+nt}$ setzt: $n=am^2$, so dass ihr also $u=e^{mx+am^2t}$ genügen wird. Natürlich genügt ihr eben so $u=Ae^{mx+am^2t}$, wenn A eine beliebige Konstante ist. Eben so wird ihr eine Summe ähnlicher Grössen genügen, so dass allgemein

$$u=A_1 e^{m_1x+am_1^2t}+A_2 e^{m_2x+am_2^2t}+\ldots.$$

seyn kann. Da $v=ue^{-bt}$, so kennt man v aus u. Wären die Grössen $m_1^2, m_2^2, \ldots$ positiv, so würde mit sehr grossem t die Grösse u sicher bedeutend gross werden; ferner muss für $x=0$ und $x=\lambda$ nothwendig, was auch t sey, derselbe Werth von u herauskomme, da ja auch derselbe Werth von v dann gilt. Dies ist aber nicht der Fall, wenn $m_1, m_2, \ldots$ reell, sondern nur, wenn sie imaginär sind. Man setze also $m_1 i, m_2 i, \ldots$ für $m_1, m_2, \ldots$, so ist

$$u=A_1 e^{-am_1^2t}[\cos m_1x+i\sin m_1x]+A_2 e^{-am_2^2t}[\cos m_2x+i\sin m_2x]+\ldots,$$

oder da $e^{-am_1^2t}\cos m_1x$, $e^{-am_1^2t}\cos m_1x$ für sich der Differentialgleichung genügen:

$$u=A+A_1 e^{-am_1^2t}\cos m_1x+A_2 e^{-am_2^2t}\cos m_2x+\ldots.$$
$$+B_1 e^{-am_1^2t}\sin m_1x+B_2 e^{-am_2^2t}\sin m_2x+\ldots.$$

Nun muss aber für $x=0$ und $x=\lambda$ derselbe Werth von u herauskommen; demnach müssen $m_1, m_2, \ldots$ Vielfache von $\frac{2\pi}{\lambda}$ seyn, so dass etwa $m_1=\frac{2\pi}{\lambda}$, $m_2=\frac{4\pi}{\lambda}$, $m_3=\frac{6\pi}{\lambda}, \ldots$. Ferner muss für $t=0: v=f(x)$, d. h. da für $t=0$ auch $v=u$: $u=f(x)$ seyn, so dass also

$$f(x)=A+A_1\cos m_1x+A_2\cos m_2x+\ldots+B_1\sin m_1x+B_2\sin m_2x+\ldots.$$

seyn wird. Vergleicht man dies mit den Formeln (m) in §. 96, d. h. mit

$$f(x)=\frac{1}{2c}\int_{-c}^{+c}f(z)\partial z+\frac{1}{c}\sum_1^{\infty}\int_{-c}^{+c}f(z)\left[\cos\frac{\mu\pi z}{c}\cos\frac{\mu\pi x}{c}+\sin\frac{\mu\pi z}{c}\sin\frac{\mu\pi x}{c}\right]\partial z,$$

so ist $c=\frac{1}{2}\lambda$, und dann

$$A=\frac{1}{\lambda}\int_{-\frac{1}{2}\lambda}^{+\frac{1}{2}\lambda}f(z)\partial z,\ A_1=\frac{2}{\lambda}\int_{-\frac{1}{2}\lambda}^{+\frac{1}{2}\lambda}f(z)\cos\frac{2\pi z}{\lambda}\partial z,\ldots,A_n=\frac{2}{\lambda}\int_{-\frac{1}{2}\lambda}^{+\frac{1}{2}\lambda}f(z)\cos\frac{2n\pi z}{\lambda}\partial z,\ldots,$$

$$B_1=\frac{2}{\lambda}\int_{-\frac{1}{2}\lambda}^{+\frac{1}{2}\lambda}f(z)\sin\frac{2\pi z}{\lambda}\partial z,\ldots,B_n=\frac{2}{\lambda}\int_{-\frac{1}{2}\lambda}^{+\frac{1}{2}\lambda}f(z)\sin\frac{2n\pi z}{\lambda}\partial z,\ldots.$$

Nun muss aber f(x) von $x=0$ bis $-\frac{1}{2}\lambda$ dieselben Werthe haben, wie von $x=\lambda$ bis $x=\frac{1}{2}\lambda$, so dass, wie man leicht sieht:

$$A=\frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda f(z)\,\partial z,\ A_n=\frac{2}{\lambda}\int_0^\lambda f(z)\cos\frac{2n\pi z}{\lambda}\partial z,\ B_n=\frac{2}{\lambda}\int_0^\lambda f(z)\sin\frac{2n\pi z}{\lambda}\partial z.$$

Demnach ist endlich

$$\lambda v = e^{-bt}\Big[\int_0^\lambda f(z)\,\partial x + 2e^{-a\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 t}\int_0^\lambda f(z)\cos\frac{2\pi(z-x)}{\lambda}\partial z$$
$$+2e^{-a\left(\frac{4\pi}{\lambda}\right)^2 t}\int_0^\lambda f(z)\cos\frac{4\pi(z-x)}{\lambda}\partial z + \ldots\Big].$$

Ist der Ring ein Kreis vom Halbmesser r, so ist $\lambda=2r\pi$. Diese Gleichung drückt nun den Zustand der Temperatur im Ringe zu der Zeit t aus. Sie genügt der Differentialgleichung und stellt auch für $t=0$ den anfänglichen Zustand dar. Sey etwa $f(x)=\tau\cos\frac{2\pi x}{\lambda}$, wo τ die Temperatur im Punkte $x=0$ zu Anfang der Zeit vorstellt, so ist $\int_0^\lambda f(z)\cos\frac{2n\pi z}{\lambda}\partial z=0$, wenn $n>1$, aber $=\frac{1}{2}\tau\lambda$, wenn $n=1$; $\int_0^\lambda f(z)\sin\frac{2n\pi z}{\lambda}\partial z=0$, so dass jetzt wegen $\int_0^\lambda f(z)\partial z=0$:

$$\lambda v=\tau\lambda e^{-bt}e^{-a\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 t}\cos\frac{2\pi x}{\lambda},\ \text{d. h. } v=\tau e^{-\left[b+\frac{4a\pi^2}{\lambda^2}\right]t}\cos\frac{2\pi x}{\lambda},$$

welche einfache Gleichung zu jeder Zeit den Zustand der Wärme im Ringe ausdrückt.

Siebzehnter Abschnitt.

Die elliptischen Integrale.

§. 99.

Wir haben in §. 40 gesehen, dass Integrale, in denen $\sqrt{a+bx+cx^2}$ vorkommt, bestimmt werden können; kömmt aber $\sqrt{a+bx+cx^2+dx^3+ex^4}$ vor, so kann in der dortigen Weise eine Bestimmung nicht durchgeführt werden. Wir werden nun aber sehen, dass alle solche Integrale auf eines der drei folgenden zurückgeführt werden können:

$$\int\frac{\partial x}{\sqrt{1-e^2\sin^2 x}},\ \int\sqrt{1-e^2\sin^2 x}\,\partial x,\ \int\frac{\partial x}{(1+a\sin^2 x)\sqrt{1-e^2\sin^2 x}},\tag{a}$$

welche drei wir nun zunächst weiter untersuchen wollen. Dabei setzen wir $e^2 \overline{\gtrless} 1$ voraus, und werden nicht nöthig haben, x über $\frac{\pi}{2}$ hinausgehen zu lassen. Ferner werden wir setzen

$$\int_0^\varphi \frac{\partial x}{\sqrt{1-e^2\sin^2 x}} = F(\varphi, e), \int_0^\varphi \sqrt{1-e^2\sin^2 x}\,\partial x = E(\varphi, e), \int_0^\varphi \frac{\partial x}{(1+a\sin^2 x)\sqrt{1-e^2\sin^2 x}} = \Pi(\varphi, a, e), \quad (b)$$

was man auch in folgender Form schreiben kann:

$$\int_0^\varphi \frac{\partial \varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2 \varphi}} = F(\varphi, e), \int_0^\varphi \sqrt{1-e^2\sin^2 \varphi}\,\partial \varphi = E(\varphi, e), \int_0^\varphi \frac{\partial \varphi}{(1+a\sin^2 \varphi)\sqrt{1-e^2\sin^2 \varphi}} = \Pi(\varphi, a, e), \quad (b')$$

so dass (§. 61)

$$\frac{\partial F(\varphi, e)}{\partial \varphi} = \frac{1}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}, \quad \frac{\partial E(\varphi, e)}{\partial \varphi} = \sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}.$$

$$\frac{\partial \Pi(\varphi, a, e)}{\partial \varphi} = \frac{1}{(1+a\sin^2\varphi)\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}. \quad (c)$$

Die allgemeinen Grössen in (a) sind nun offenbar (§. 49):

$$F(x, e)+C, \; E(x, e)+C, \; \Pi(x, a, e)+C,$$

wenn C eine willkürliche Konstante bedeutet.

Für den Fall, dass $e=0$ ist, folgt aus (b)

$$F(\varphi, 0)=\varphi, \; E(\varphi, 0)=\varphi, \; \Pi(\varphi, a, 0)=\frac{\operatorname{arc}(\operatorname{tg}=\sqrt{1+a}\operatorname{tg}\varphi)}{\sqrt{1+a}}, \quad (d)$$

von welchen Grössen die letzte aus §. 44 folgt, indem man $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ setzt, also

$$\int \frac{\partial x}{1+a\sin^2 x} = 2\int \frac{\partial x}{2+a-a\cos 2x} = -\frac{2}{\sqrt{(a+2)^2-a^2}}\operatorname{arc}\left(\operatorname{tg}=\operatorname{cotg} x\sqrt{\frac{2}{2+2a}}\right)$$
$$= -\frac{1}{\sqrt{1+a}}\operatorname{arc}\left(\operatorname{tg}=\frac{\operatorname{cotg} x}{\sqrt{1+a}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{1+a}}\left[\frac{\pi}{2}-\operatorname{arc}(\operatorname{tg}=\sqrt{1+a}\operatorname{tg} x)\right].$$

Eine näherungsweise Berechnung der Grössen (b) lässt sich immer mittelst unendlicher Reihen ausführen. Man hat nämlich

$$\left.\begin{aligned} F(\varphi, e) &= \int_0^\varphi \partial x + \frac{1}{2}e^2\int_0^\varphi \sin^2 x\,\partial x + \frac{1.3}{2.4}e^4\int_0^\varphi \sin^4 x\,\partial x + \ldots\ldots, \\ E(\varphi, e) &= \int_0^\varphi \partial x - \frac{1}{2}e^2\int_0^\varphi \sin^2 x\,\partial x - \frac{1}{3}\cdot\frac{1.3}{2.4}e^4\int_0^\varphi \sin^4 x\,\partial x - \ldots\ldots, \end{aligned}\right\} (e)$$

wo nun die Integrale nach §. 42 ermittelt werden können. Da dabei $e^2<1$, so konvergiren diese Reihen ziemlich rasch. Was die dritte Grösse in (b) anbelangt, so müssen wir in Bezug auf dieselbe noch das Folgende bemerken. Wir wollen nämlich in Bezug auf a folgende Voraussetzungen machen:

1) a zwischen $-\infty$ und -1.

Man setze

$$a = -\frac{1-e^2\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}, \; \sin^2\alpha = \frac{a+1}{a+e^2}, \; \alpha \text{ zwischen } 0 \text{ und } \frac{\pi}{2},$$

so wird wirklich, wenn α von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ geht, a von -1 bis $-\infty$ gehen.

Man hat aber für jedes a:

$$\left.\begin{aligned}
&\int_0^\varphi \frac{\sin^2 x\,\partial x}{(1+a\sin^2 x)\sqrt{1-e^2\sin^2 x}} = \frac{1}{a}\left[\int_0^\varphi \frac{\partial x}{\sqrt{1-e^2\sin^2 x}} - \int_0^\varphi \frac{\partial x}{(1+a\sin^2 x)\sqrt{1-e^2\sin^2 x}}\right] \\
&\qquad = \frac{F(\varphi, e) - \Pi(\varphi, a, e)}{a}, \\
&\int_0^\varphi \frac{\cos^2 x\,\partial x}{(1+a\sin^2 x)\sqrt{1-e^2\sin^2 x}} = \int_0^\varphi \frac{(1-\sin^2 x)\partial x}{(1+a\sin^2 x)\sqrt{1-e^2\sin^2 x}} = \frac{1+a}{a}\Pi(\varphi, a, e) \\
&\qquad\qquad - \frac{1}{a}F(\varphi, e), \\
&\int_0^\varphi \frac{(1-e^2\sin^2 x)\partial x}{(1+a\sin^2 x)\sqrt{1-e^2\sin^2 x}} = \frac{a+e^2}{a}\Pi(\varphi, a, e) - \frac{e^2}{a}F(\varphi, e).
\end{aligned}\right\}(f)$$

Ferner ist identisch

$$\frac{(1-e^2)\sin^2 x}{\cos^2\alpha - (1-e^2\sin^2\alpha)\sin^2 x} + \frac{1-e^2\sin^2 x}{1-e^2\sin^2\alpha\sin^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2\alpha[1-e^2\sin^2 x - e^2\sin^2 x\cos^2 x]}{\cos^2\alpha - \sin^2 x + e^2\sin^4\alpha\sin^2 x + e^2\sin^2\alpha\sin^4 x(1-e^2\sin^2\alpha)}$$

$$= \frac{\cos^2\alpha[1-e^2\sin^2 x - e^2\sin^2 x\cos^2 x]}{\cos^2\alpha\cos^2 x + \cos^2\alpha\sin^2 x - \sin^2 x + e^2\sin^4\alpha\sin^2 x + e^2\sin^2\alpha\sin^4 x(1-e^2\sin^2\alpha)}$$

$$= \frac{\cos^2\alpha(1-e^2\sin^2 x - e^2\sin^2 x\cos^2 x)}{\cos^2\alpha\cos^2 x - \sin^2\alpha\sin^2 x(1-e^2\sin^2\alpha)(1-e^2\sin^2 x)},$$

woraus unmittelbar folgt:

$$\frac{1-e^2}{\cos^2\alpha}\int_0^\varphi \frac{\sin^2 x\,\partial x}{\left[1-\frac{1-e^2\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\sin^2 x\right]\sqrt{1-e^2\sin^2 x}} + \int_0^\varphi \frac{(1-e^2\sin^2 x)\partial x}{(1-e^2\sin^2\alpha\sin^2 x)\sqrt{1-e^2\sin^2 x}}$$

$$= \int_0^\varphi \frac{1-e^2\sin^2 x - e^2\sin^2 x\cos^2 x}{\cos^2 x - \operatorname{tg}^2\alpha\sin^2 x(1-e^2\sin^2\alpha)(1-e^2\sin^2 x)} \frac{\partial x}{\sqrt{1-e^2\sin^2 x}}.$$

Die zwei ersten Integrale werden nach den Formeln (f) bestimmt; was das letzte anbelangt, so ist das unbestimmte Integral gleich

$$\int \frac{1-e^2\sin^2 x - e^2\sin^2 x\cos^2 x}{\cos^2 x\sqrt{1-e^2\sin^2 x}} \cdot \frac{\partial x}{1-\operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{tg}^2 x(1-e^2\sin^2 x)(1-e^2\sin^2\alpha)}$$

$$= \int\left(\frac{\sqrt{1-e^2\sin^2 x}}{\cos^2 x} - \frac{e^2\sin^2 x}{\sqrt{1-e^2\sin^2 x}}\right)\frac{\partial x}{1-\operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{tg}^2 x(1-e^2\sin^2 x)(1-e^2\sin^2\alpha)}$$

$$= \int \frac{\partial(\operatorname{tg} x\sqrt{1-e^2\sin^2 x})}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{1-\operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{tg}^2 x(1-e^2\sin^2 x)(1-e^2\sin^2\alpha)}.$$

Man setze also

$$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg} x\sqrt{(1-e^2\sin^2\alpha)(1-e^2\sin^2 x)} = u, \quad \frac{\partial(\operatorname{tg} x\sqrt{1-e^2\sin^2 x})}{\partial u} = \frac{\operatorname{cotg}\alpha}{\sqrt{1-e^2\sin^2\alpha}},$$

so ist dasselbe gleich (§. 36)

$$\int \frac{\frac{\partial(\operatorname{tg} x\sqrt{1-e^2\sin^2 x})}{\partial u}}{\frac{\partial x}{\partial u}} \frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{1-u^2} = \int \frac{\operatorname{cotg}\alpha}{\sqrt{1-e^2\sin^2\alpha}} \frac{\partial u}{1-u^2}$$

$$=\frac{\operatorname{cotg}\alpha}{2\sqrt{1-e^2\sin^2\alpha}}\,l\left(\frac{1+u}{1-u}\right),$$

mithin
$$\int_0^\varphi\frac{1-e^2\sin^2x-e^2\sin^2x\cos^2x}{\cos^2x-tg^2\alpha\sin^2x(1-e^2\sin^2\alpha)(1-e^2\sin^2x)}\cdot\frac{\partial x}{\sqrt{1-e^2\sin^2x}}$$
$$=\frac{\operatorname{cotg}\alpha}{2\sqrt{1-e^2\sin^2\alpha}}\,l\left(\frac{1+tg\alpha\, tg\varphi\sqrt{(1-e^2\sin^2\alpha)(1-e^2\sin^2\varphi)}}{1-tg\alpha\, tg\varphi\sqrt{(1-e^2\sin^2\alpha)(1-e^2\sin^2\varphi)}}\right).$$

Setzt man nun noch die Werthe aus (f) in die obige Gleichung ein, so ergibt sich leicht:

$$\Pi\left(\varphi,-\frac{1-e^2\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha},e\right)=\frac{1-e^2\sin^2\alpha}{1-e^2}\operatorname{cotg}^2\alpha\,\Pi(\varphi,-e^2\sin^2\alpha,e)-\frac{\operatorname{cotg}^2\alpha}{1-e^2}F(\varphi,e)$$
$$+\frac{\sqrt{1-e^2\sin^2\alpha}}{2(1-e^2)}\operatorname{cotg}\alpha\,l\left(\frac{1+tg\alpha\, tg\varphi\sqrt{(1-e^2\sin^2\alpha)(1-e^2\sin^2\varphi)}}{1-tg\alpha\, tg\varphi\sqrt{(1-e^2\sin^2\alpha)(1-e^2\sin^2\varphi)}}\right),\qquad (g)$$

vermittelst welcher Formel die Integrale $\Pi(\varphi, a, e)$, für welche a zwischen $-\infty$ und -1 liegt, auf solche zurückgeführt werden, für die a zwischen -1 und 0 liegt, da $e^2\sin^2\alpha$ zwischen 0 und 1 (genauer 0 und e^2).

2) a zwischen 0 und ∞.

Man setze
$$a=e^2tg^2\alpha,\quad tg^2\alpha=\frac{a}{e^2},$$
so wird α von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ gehen, wenn a von 0 bis ∞ geht. Man hat aber jetzt:

$$\frac{(1-e^2)\cos^2\alpha\sin^2x}{1-(\cos^2\alpha+e^2\sin^2\alpha)\sin^2x}+\frac{1-e^2\sin^2x}{1+e^2tg^2\alpha\sin^2x}$$
$$=\frac{1-e^2\sin^2x-e^2\sin^2x\cos^2x}{1-\cos^2\alpha\sin^2x+\sin^2\alpha\sin^2x\left[-e^2+\frac{e^2}{\cos^2\alpha}-e^2\sin^2x-e^4tg^2\alpha\sin^2x\right]}$$
$$=\frac{1-e^2\sin^2x-e^2\sin^2x\cos^2x}{\cos^2x+\sin^2\alpha\sin^2x\left[1+e^2tg^2\alpha-e^2\sin^2x-e^4tg^2\alpha\sin^2x\right]}$$
$$=\frac{1-e^2\sin^2x-e^2\sin^2x\cos^2x}{\cos^2x+\sin^2\alpha\sin^2x(1+e^2tg^2\alpha)(1-e^2\sin^2x)},$$

woraus, wenn man mit $\sqrt{1-e^2\sin^2x}$ beiderseitig dividirt und beachtet, dass
$$\int\frac{1-e^2\sin^2x-e^2\sin^2x\cos^2x}{\cos^2x+\sin^2\alpha\sin^2x(1+e^2tg^2\alpha)(1-e^2\sin^2x)}\cdot\frac{\partial x}{\sqrt{1-e^2\sin^2x}}$$
$$=\frac{1}{\sin\alpha\sqrt{1+e^2tg^2\alpha}}\operatorname{arc}\left(tg=\sin\alpha\, tg\, x\sqrt{(1+e^2tg^2\alpha)(1-e^2\sin^2x)}\right),$$

durch Integration zwischen den Gränzen 0 und φ folgt:
$$(1-e^2)\cos^2\alpha\left[\frac{F(\varphi,e)-\Pi[\varphi,-(\cos^2\alpha+e^2\sin^2\alpha),e]}{-(\cos^2\alpha+e^2\sin^2\alpha)}\right]+\frac{e^2tg^2\alpha+e^2}{e^2tg^2\alpha}\Pi(\varphi,e^2tg^2\alpha,e)$$
$$-\operatorname{cotg}^2\alpha\, F(\varphi,e)=\frac{1}{\sin\alpha\sqrt{1+e^2tg^2\alpha}}\operatorname{arc}\left(tg=\sin\alpha\, tg\varphi\sqrt{(1+e^2tg^2\alpha)(1-e^2\sin^2\varphi)}\right),$$

und hieraus:
$$\Pi(\varphi,e^2tg^2\alpha,e)=-\frac{(1-e^2)\sin^2\alpha}{1+e^2tg^2\alpha}\Pi[\varphi,-(\cos^2\alpha+e^2\sin^2\alpha),e]+\frac{F(\varphi,e)}{1+e^2tg^2\alpha}$$
$$+\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1+e^2tg^2\alpha}}\operatorname{arc}\left(tg=\sin\alpha\, tg\varphi\sqrt{(1+e^2tg^2\alpha)(1-e^2\sin^2\varphi)}\right),\qquad (h)$$

vermittelst welcher Formel man die Grössen $\Pi(\varphi, a, e)$, für welche a zwi-

schen 0 und ∞ liegt, ausdrücken kann durch solche, für die a wieder zwischen 0 und -1 liegt.

Daraus folgt nun, dass man in dem dritten Integrale (b) a als zwischen 0 und -1 liegend ansehen kann. Will man für diesen Fall nun Reihenentwicklungen haben, so hat man:

$$\left.\begin{aligned}
\Pi(\varphi, a, e) &= \int_0^\varphi \frac{(1+a\sin^2 x)^{-1}}{\sqrt{1-e^2\sin^2 x}}\partial x = \int_0^\varphi \frac{\partial x}{\sqrt{1-e^2\sin^2 x}} - a\int_0^\varphi \frac{\sin^2 x\,\partial x}{\sqrt{1-e^2\sin^2 x}} \\
&\quad + a^2\int_0^\varphi \frac{\sin^4 x\,\partial x}{\sqrt{1-e^2\sin^2 x}} - \cdots\cdots\cdots, \\
\Pi(\varphi, a, e) &= \int_0^\varphi \frac{(1-e^2\sin^2 x)^{-\frac{1}{2}}}{1+a\sin^2 x}\partial x = \int_0^\varphi \frac{\partial x}{1+a\sin^2 x} + \frac{1}{2}e^2\int_0^\varphi \frac{\sin^2 x\,\partial x}{1+a\sin^2 x} \\
&\quad + \frac{1.3}{2.4}e^4\int_0^\varphi \frac{\sin^4 x\,\partial x}{1+a\sin^2 x} + \cdots\cdots\cdots,
\end{aligned}\right\}\quad \text{(i)}$$

in welchen Formeln wir die Integrale der zweiten Seiten in §. 100 bestimmen werden.

Die bis jetzt dargestellten Formeln dienen dazu, die drei Grössen (b), welche elliptische Integrale, bezüglich der ersten, zweiten, dritten Art heissen, für ein gegebenes φ, das wir nicht über $\frac{\pi}{2}$ vorauszusetzen brauchen, zu berechnen. Für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ heissen sie gewöhnlich vollständige elliptische Integrale. Es lassen sich jedoch auch noch andere Wege finden, um diese Berechnung durchzuführen. Man setze nämlich

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin 2z}{e+\cos 2z},$$

woraus nach einander:

$$\frac{1}{\cos^2 x} = 1+\operatorname{tg}^2 x = \frac{1+2e\cos 2z+e^2}{(e+\cos 2z)^2},\quad \frac{1}{\cos^2 x}\frac{\partial x}{\partial z} = \frac{2(e\cos 2z+1)}{(e+\cos 2z)^2},\quad \frac{\partial x}{\partial z} = \frac{2(e\cos 2z+1)}{1+2e\cos 2z+e^2},$$

$$\sin x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{\sin^2 2z}{1+2e\cos 2z+e^2},\quad 1-e^2\sin^2 x = \frac{(1+e\cos 2z)^2}{1+2e\cos 2z+e^2},\quad \sqrt{1-e^2\sin^2 x}$$

$$= \frac{1+e\cos 2z}{\sqrt{1+2e\cos 2z+e^2}} = \frac{1+e\cos 2z}{\sqrt{1+e^2+2e(1-2\sin^2 z)}} = \frac{1+e\cos 2z}{\sqrt{(1+e)^2-4e\sin^2 z}}$$

$$= \frac{1+e\cos 2z}{(1+e)\sqrt{1-\frac{4e}{(1+e)^2}\sin^2 z}}.$$

Die Gränzen von z sind, wenn die von x Null und φ sind: 0 und φ_1, wo

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sin 2\varphi_1}{e+\cos 2\varphi_1},\quad \sin\varphi\,(e+\cos 2\varphi_1) = \sin 2\varphi_1\cos\varphi,$$

$$\sin\varphi\cos 2\varphi_1 - \sin 2\varphi_1\cos\varphi = -e\sin\varphi,\quad \sin(2\varphi_1-\varphi) = e\sin\varphi,$$

so dass $2\varphi_1 - \varphi < \varphi$, $\varphi_1 < \varphi$, und also

$$F(\varphi, e) = \int_0^{\varphi_1} \frac{2(1+e\cos 2z)}{1+2e\cos 2z+e^2}\cdot\frac{(1+e)\sqrt{1-\frac{4e}{(1+e)^2}\sin^2 z}}{1+e\cos 2z}\partial z$$

$$\frac{2}{1+e}\int_0^{\varphi_1}\frac{\partial z}{\sqrt{1-\frac{4e}{(1+e)^2}\sin^2 z}}=\frac{2}{1+e}F(\varphi_1, e_1),$$

wenn
$$e_1=\frac{2\sqrt{e}}{1+e}.$$

Man schliesst hieraus leicht das Folgende: Man bestimme die zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ liegenden Winkel $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, ferner $e_1, e_2, \ldots, e_n$ und $k, k_1, \ldots, k_{n-1}$, so dass

$$\sin(2\varphi_1-\varphi)=e\sin\varphi,\ \sin(2\varphi_2-\varphi_1)=e_1\sin\varphi_1, \ldots, \sin(2\varphi_n-\varphi_{n-1})=e_{n-1}\sin\varphi_{n-1};$$

$$e_1=\frac{2\sqrt{e}}{1+e},\quad e_2=\frac{2\sqrt{e_1}}{1+e_1}, \ldots\ldots, e_n=\frac{2\sqrt{e_{n-1}}}{1+e_{n-1}};$$

$$k=\frac{2}{1+e},\quad k_1=\frac{2}{1+e_1}, \ldots\ldots, k_{n-1}=\frac{2}{1+e_{n-1}},$$

so hat man

$$F(\varphi, e)=kF(\varphi_1, e_1),\ F(\varphi_1, e_1)=k_1F(\varphi_2, e_2), \ldots, F(\varphi_{n-1}, e_{n-1})=k_{n-1}F(\varphi_n, e_n).$$

$$F(\varphi, e)=k k_1 \ldots k_{n-1} F(\varphi_n, e_n).$$

Da $e<1$, so ist $e_1>e$,* $e_2>e_1, \ldots$, so dass wenn n ziemlich gross ist, e_n nahezu $=1$ seyn wird, da die $e_1, e_2, \ldots$ immer noch unter 1 sind; alsdann ist aber

$$F(\varphi_n, e_n)=\int_0^{\varphi_n}\frac{\partial z}{\sqrt{1-\sin^2 z}}=\int_0^{\varphi_n}\frac{\partial z}{\cos z}=l\,tg\left(\frac{1}{2}\varphi_n+\frac{\pi}{4}\right) \text{ (§. 42)},$$

so dass also

$$F(\varphi, e)=k k_1 \ldots k_{n-1}\, l\,tg\left(\frac{1}{2}\varphi_n+\frac{\pi}{4}\right),\ (e_n=1).$$

Vermittelst dieser Formel lässt sich $F(\varphi, e)$ nun ebenfalls berechnen. Ferner ist

$$e\cos x+\sqrt{1-e^2\sin^2 x}=\frac{e^2+2e\cos 2z+1}{\sqrt{e^2+2e\cos 2z+1}}=\sqrt{1+2e\cos 2z+e^2}$$
$$=(1+e)\sqrt{1-e_1^2\sin^2 z},\quad \frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1+2e\cos 2z+e^2}{2(1+e\cos 2z)},$$
$$(e\cos x+\sqrt{1-e^2\sin^2 x})\,\frac{1+2e\cos 2z+e^2}{2(1+e\cos 2z)}=(1+e)\sqrt{1-e_1^2\sin^2 z}\,\frac{\partial z}{\partial x},$$

d. h. da die erste Seite $=$

$$(e\cos x+\sqrt{1-e^2\sin^2 x})\sqrt{1+2e\cos 2z+e^2}.\frac{\sqrt{1+2e\cos 2z+e^2}}{2(1+e\cos 2z)}$$
$$=\frac{(e\cos x+\sqrt{1-e^2\sin^2 x})^2}{2\sqrt{1-e^2\sin^2 x}}=\frac{e^2\cos^2 x+2e\cos x\sqrt{1-e^2\sin^2 x}+1-e^2\sin^2 x}{2\sqrt{1-e^2\sin^2 x}}$$
$$=e\cos x+\frac{e^2+1-2e^2\sin^2 x}{2\sqrt{1-e^2\sin^2 x}}=e\cos x+\sqrt{1-e^2\sin^2 x}+\frac{e^2-1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{1-e^2\sin^2 x}}:$$
$$(1+e)\sqrt{1-e_1^2\sin^2 z}\,\frac{\partial z}{\partial x}=e\cos x+\sqrt{1-e^2\sin^2 x}+\frac{e^2-1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{1-e^2\sin^2 x}},$$

---

* Man hat $(1+e)e_1=2\sqrt{e}$, d. h. da $1+e<2$: $2e_1>2\sqrt{e}$, $e_1>\sqrt{e}$, und da $\sqrt{e}>e$, so ist $e_1>e$. Da ferner $(1-e)^2=1-2e+e^2$, so ist $1+e^2>2e$, also $1+2e+e^2>4e$, d. h. $(1+e)^2>4e$, $1+e>2\sqrt{e}$, also $e_1<1$.

$$(1+e)\int\sqrt{1-e_1{}^2\sin^2 z}\,\frac{\partial z}{\partial x}\partial x = e\sin x + \int\sqrt{1-e^2\sin^2 x}\,\partial x + \frac{e^2-1}{2}\int\frac{\partial x}{\sqrt{1-e^2\sin^2 x}} + C,$$

oder da die erste Seite $=(1+e)\int\sqrt{1-e_1{}^2\sin^2 z}\,\partial z$ (§. 36):

$$(1+e)\int_0^{\varphi_1}\sqrt{1-e_1{}^2\sin^2 z}\,\partial z = e\sin\varphi + \int_0^{\varphi}\sqrt{1-e^2\sin^2 x}\,\partial x + \frac{e^2-1}{2}\int_0^{\varphi}\frac{\partial x}{\sqrt{1-e^2\sin^2 x}},$$

d. h. $$(1+e)E(\varphi_1, e_1) = E(\varphi, e) + \frac{e^2-1}{2}F(\varphi, e) + e\sin\varphi,$$

so dass man hat:

$$E(\varphi, e) = (1+e)E(\varphi_1, e_1) + \frac{1-e^2}{2}F(\varphi, e) - e\sin\varphi,$$

$$E(\varphi_1, e_1) = (1+e_1)E(\varphi_2, e_2) + \frac{1-e_1{}^2}{2}F(\varphi_1, e_1) - e_1\sin\varphi_1,$$

$$E(\varphi_2, e_2) = (1+e_2)E(\varphi_3, e_3) + \frac{1-e_2{}^2}{2}F(\varphi_2, e_2) - e_2\sin\varphi_2,$$

und da für $e_n = 1$; $E(\varphi_n, e_n) = \int_0^{\varphi_n}\sqrt{1-\sin^2 z}\,\partial z = \int_0^{\varphi_n}\cos z\,\partial z = \sin\varphi_n$, so kann man hiernach $E(\varphi, e)$ ebenfalls berechnen.

Anm. Statt der Formeln (g) und (h), die zur Reduktion der elliptischen Integrale dritter Art dienen, kann man auch folgende Reduktionsformel aufstellen: Sey $z = \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1-e^2\sin^2 x}}$, so ist für $k = (1+a)\left(1+\frac{e^2}{a}\right)$, wie man leicht findet:

$$\frac{1}{1+kz^2}\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{(1+a\sin^2 x)\sqrt{1-e^2\sin^2 x}} + \frac{1}{\left(1+\frac{e^2}{a}\sin^2 x\right)\sqrt{1-e^2\sin^2 x}} - \frac{1}{\sqrt{1-e^2\sin^2 x}},$$

woraus $$\int_0^{\varphi}\frac{1}{1+kz^2}\frac{\partial z}{\partial x}\partial x = \Pi(\varphi, a, e) + \Pi\left(\varphi, \frac{e^2}{a}, e\right) - F(\varphi, e),$$

d. h. da $\int\frac{1}{1+kz^2}\frac{\partial z}{\partial x}\partial x = \int\frac{\partial z}{1+kz^2}$, es ist, wenn man ϱ aus der Gleichung $\varrho = \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}$ bestimmt:

$$\Pi(\varphi, a, e) + \Pi\left(\varphi, \frac{e^2}{a}, e\right) = F(\varphi, e) + \int_0^{\varrho}\frac{\partial z}{1+kz^2}.$$

Ist nun a, seinem Werthe nach, über e, so ist $\frac{e^2}{a}$ unter e; mithin ist das elliptische Integral der dritten Art auf ein anderes derselben Art reduzirt, in dem a zwischen $-e$ und $+e$ liegt. Das Integral $\int_0^{\varrho}\frac{\partial z}{1+kz^2}$ ist immer leicht zu bestimmen.

§. 100.

Wir wollen nun vorerst die Integrale, welche in den zweiten Seiten der Glei-

chungen (i) vorkommen, bestimmen. Zunächst lassen sich die der zweiten jener Formeln sehr leicht reduziren. Man hat dazu:

$$\int_0^\varphi \frac{\sin^{2n+2} x \partial x}{1+a \sin^2 x} = -\frac{1}{a} \int_0^\varphi \frac{\sin^{2n} x \partial x}{1+a \sin^2 x} + \frac{1}{a} \int_0^\varphi \sin^{2n} x \partial x,$$

welche Formel schliesslich auf $\int_0^\varphi \frac{\partial x}{1+a \sin^2 x}$ führt, welches Integral bereits in §. 99

bestimmt und gleich $\quad \frac{\operatorname{arc}(\operatorname{tg} = \sqrt{1+a} \operatorname{tg} \varphi)}{\sqrt{1+a}}$

gefunden wurde. Um nun aber auch die in der ersten Formel (i) vorkommenden Integrale, deren allgemeine Form ist

$$\int \frac{\sin^{2n} x \partial x}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 x}}$$

zu bestimmen, wollen wir etwas allgemeinere Reduktionsformeln aufstellen. Zu dem Ende bezeichnen wir durch ξ eine der drei Grössen $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ und behaupten, es sey immer:

$$\sqrt{1-e^2 \sin^2 x} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \pm \sqrt{a + b\xi^2 + c\xi^4},$$

wo a, b, c bestimmte Grössen sind. Um dies zu rechtfertigen, sey

1) $\xi = \sin x$, also $\sqrt{1-e^2 \sin^2 x} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \sqrt{1-e^2 \sin^2 x} \cos x = \sqrt{1-e^2 \sin^2 x} \sqrt{1-\sin^2 x} =$

$$\sqrt{1-(1+e^2)\sin^2 x + e^2 \sin^4 x},$$

$a = 1$, $b = -(1+e^2)$, $c = e^2$, und das obere Zeichen gilt;

2) $\xi = \cos x$, $\sqrt{1-e^2 \sin^2 x} \frac{\partial \xi}{\partial x} = -\sin x \sqrt{1-e^2 \sin^2 x} = -\sqrt{(1-\cos^2 x)(1-e^2+e^2\cos^2 x)}$

$$= -\sqrt{(1-e^2)-(1-2e^2)\cos^2 x - e^2 \cos^4 x},$$

$a = 1-e^2$, $b = -1+2e^2$, $c = -e^2$, das untere Zeichen gilt;

3) $\xi = \operatorname{tg} x$, $\sqrt{1-e^2 \sin^2 x} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\sqrt{1-e^2 \sin^2 x}}{\cos^2 x} = \left(\sqrt{1-\frac{e^2 \operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}}\right)(1+\operatorname{tg}^2 x)$

$$\sqrt{1+(2-e^2)\operatorname{tg}^2 x + (1-e^2)\operatorname{tg}^4 x},$$

$a = 1$, $b = 2-e^2$, $c = 1-e^2$, das obere Zeichen gilt.

Sey nun

$$y = \xi^{n-3} \sqrt{a + b\xi^2 + c\xi^4},$$

so ist

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial(\xi^{n-3}\sqrt{a+b\xi^2+c\xi^4})}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{(n-3)a\xi^{n-4} + (n-2)b\xi^{n-2} + (n-1)c\xi^n}{\sqrt{a+b\xi^2+c\xi^4}} \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

$$= \pm \left[\frac{(n-3)a\xi^{n-4} + (n-2)b\xi^{n-2} + (n-1)c\xi^n}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 x}}\right],$$

so dass also, wenn man nach x integrirt:

$$\pm \xi^{n-3}\sqrt{a+b\xi^2+c\xi^4} = (n-3)a \int \frac{\xi^{n-4} \partial x}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 x}} + (n-2)b \int \frac{\xi^{n-2} \partial x}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 x}}$$

$$+ (n-1)c \int \frac{\xi^n \partial x}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 x}}.$$

Setzt man hier $\xi = \sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ und beachtet die oben gefundenen Werthe von a, b, c, so hat man:

$$\left.\begin{aligned}
\int\frac{\sin^n x\,\partial x}{\sqrt{1-e^2\sin^2 x}}&=\frac{n-2}{n-1}\,\frac{1+e^2}{e^2}\int\frac{\sin^{n-2}x\,\partial x}{\sqrt{1-e^2\sin^2 x}}-\frac{n-3}{(n-1)e^2}\int\frac{\sin^{n-4}x\,\partial x}{\sqrt{1-e^2\sin^2 x}}\\
&\quad+\frac{\sin^{n-3}x}{(n-1)e^2}\sqrt{1-(1+e^2)\sin^2 x+e^2\sin^4 x},\\
\int\frac{\cos^n x\,\partial x}{\sqrt{1-e^2\sin^2 x}}&=\frac{n-2}{n-1}\,\frac{2e^2-1}{e^2}\int\frac{\cos^{n-2}x\,\partial x}{\sqrt{1-e^2\sin^2 x}}+\frac{n-3}{n-1}\,\frac{1-e^2}{e^2}\int\frac{\cos^{n-4}x\,\partial x}{\sqrt{1-e^2\sin^2 x}}\\
&\quad+\frac{\cos^{n-3}x}{(n-1)e^2}\sqrt{(1-e^2)-(1-2e^2)\cos^2 x-e^2\cos^4 x},\\
\int\frac{\operatorname{tg}^n x\,\partial x}{\sqrt{1-e^2\sin^2 x}}&=-\frac{n-2}{n-1}\,\frac{2-e^2}{1-e^2}\int\frac{\operatorname{tg}^{n-2}x\,\partial x}{\sqrt{1-e^2\sin^2 x}}-\frac{n-3}{n-1}\,\frac{1}{1-e^2}\int\frac{\operatorname{tg}^{n-4}x\,\partial x}{\sqrt{1-e^2\sin^2 x}}\\
&\quad+\frac{\operatorname{tg}^{n-3}x}{(n-1)(1-e^2)}\sqrt{1+(2-e^2)\operatorname{tg}^2 x+(1-e^2)\operatorname{tg}^4 x},
\end{aligned}\right\}\quad(k)$$

in welchen Formeln die letzten Glieder auch heissen:

$$\frac{\sin^{n-3}x\cos x\sqrt{1-e^2\sin^2 x}}{(n-1)e^2},\quad\frac{\cos^{n-3}x\sin x\sqrt{1-e^2\sin^2 x}}{(n-1)e^2},\quad\frac{\operatorname{tg}^{n-3}x\sqrt{1-e^2\sin^2 x}}{(n-1)(1-e^2)\cos^2 x}.$$

Dabei setzen wir nun n als positive ganze Zahl voraus, obgleich die Formeln unbedingt gelten. Alsdann führen dieselben schliesslich auf

$$\int\frac{\partial x}{\sqrt{1-e^2\sin^2 x}},\quad\int\frac{\xi\,\partial x}{\sqrt{1-e^2\sin^2 x}},\quad\int\frac{\xi^2\,\partial x}{\sqrt{1-e^2\sin^2 x}}.$$

Das erste dieser Integrale gehört zu den unmittelbaren elliptischen Integralen; das zweite lässt sich nach §. 40 bestimmen,* während für das dritte man hat:

$$\begin{aligned}
\int\frac{\sin^2 x\,\partial x}{\sqrt{1-e^2\sin^2 x}}&=\frac{1}{e^2}\int\frac{\partial x}{\sqrt{1-e^2\sin^2 x}}-\frac{1}{e^2}\int\sqrt{1-e^2\sin^2 x}\,\partial x,\\
\int\frac{\cos^2 x\,\partial x}{\sqrt{1-e^2\sin^2 x}}&=\int\frac{\partial x}{\sqrt{1-e^2\sin^2 x}}-\int\frac{\sin^2 x\,\partial x}{\sqrt{1-e^2\sin^2 x}},\\
\int\frac{\operatorname{tg}^2 x\,\partial x}{\sqrt{1-e^2\sin^2 x}}&=-\frac{1}{1-e^2}\int\sqrt{1-e^2\sin^2 x}\,\partial x+\frac{1}{1-e^2}\int\frac{(1-e^2\sin^2 x-e^2\sin^2 x\cos^2 x)}{\cos^2 x\sqrt{1-e^2\sin^2 x}}\,\partial x\\
&=-\frac{1}{1-e^2}\int\sqrt{1-e^2\sin^2 x}\,\partial x+\frac{1}{1-e^2}\operatorname{tg} x\sqrt{1-e^2\sin^2 x}.
\end{aligned}$$

Die Reduktionsformeln (k) gelten natürlich auch für ein negatives n. Setzt man, um dies klarer hervortreten zu lassen, $-n+4$ an die Stelle von n, so zieht man leicht aus denselben:

$$\left.\begin{aligned}
\int\frac{\partial x}{\sin^n x\sqrt{1-e^2\sin^2 x}}&=\frac{n-2}{n-1}(1+e^2)\int\frac{\partial x}{\sin^{n-2}x\sqrt{1-e^2\sin^2 x}}\\
&\quad-\frac{n-3}{n-1}e^2\int\frac{\partial x}{\sin^{n-4}x\sqrt{1-e^2\sin^2 x}}-\frac{\cos x\sqrt{1-e^2\sin^2 x}}{(n-1)\sin^{n-1}x},\\
\int\frac{\partial x}{\cos^n x\sqrt{1-e^2\sin^2 x}}&=-\frac{n-2}{n-1}\,\frac{2e^2-1}{1-e^2}\int\frac{\partial x}{\cos^{n-2}x\sqrt{1-e^2\sin^2 x}}\\
&\quad+\frac{n-3}{n-1}\,\frac{e^2}{1-e^2}\int\frac{\partial x}{\cos^{n-4}x\sqrt{1-e^2\sin^2 x}}+\frac{\sin x\sqrt{1-e^2\sin^2 x}}{(n-1)(1-e^2)\cos^{n-1}x},
\end{aligned}\right\}\quad(k')$$

---

* Man setze zu dem Ende für $\xi=\sin x$: $\cos x=z$, für $\xi=\cos x$: $\sin x=z$, für $\xi=\operatorname{tg} x$: $\cos x=z$.

$$\left.\begin{aligned}\int \frac{\partial x}{\operatorname{tg}^n x \sqrt{1-e^2\sin^2 x}} &= -\frac{n-2}{n-1}(2-e^2)\int \frac{\partial x}{\operatorname{tg}^{n-2} x\sqrt{1-e^2\sin^2 x}} \\ &- \frac{n-3}{n-1}(1-e^2)\int \frac{\partial x}{\operatorname{tg}^{n-4} x\sqrt{1-e^2\sin^2 x}} - \frac{\sqrt{1-e^2\sin^2 x}}{(n-1)\cos^2 x \operatorname{tg}^{n-1} x}.\end{aligned}\right\} (k')$$

Diese Formeln führen schliesslich auf

$$\int \frac{\partial x}{\xi^2\sqrt{1-e^2\sin^2 x}}, \quad \int \frac{\partial x}{\xi\sqrt{1-e^2\sin^2 x}}, \quad \int \frac{\partial x}{\sqrt{1-e^2\sin^2 x}},$$

von welchen Integralen das erste für $n=2$ noch durch (k') auf bekannte reduzirt, das zweite aber nach §. 40 bestimmt wird.

Man ersieht aus (k) und (k'), dass die Grösse $\int \frac{\xi^n \partial x}{\sqrt{1-e^2\sin^2 x}}$ nur für ein gerades n (positiv oder negativ) schliesslich auf elliptische Integrale führt.

Auch für den Fall, dass $\xi = \sqrt{1-e^2\sin^2 x}$, hat man

$$\sqrt{1-e^2\sin^2 x}\,\frac{\partial \xi}{\partial x} = -e^2\sin x\cos x = -e^2\sqrt{\frac{1-\xi^2}{e^2}}\sqrt{\frac{e^2-1+\xi^2}{e^2}} = -\sqrt{e^2-1-(e^2-2)\xi^2-\xi^4},$$

$a = e^2-1$, $b = 2-e^2$, $c = -1$, und es gilt das untere Zeichen, mithin:

$$\left.\begin{aligned}\int \frac{(1-e^2\sin^2 x)^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{1-e^2\sin^2 x}}\partial x &= \frac{n-2}{n-1}(2-e^2)\int \frac{(1-e^2\sin^2 x)^{\frac{n-2}{2}}}{\sqrt{1-e^2\sin^2 x}}\partial x \\ &- \frac{n-3}{n-1}(2-e^2)\int \frac{(1-e^2\sin^2 x)^{\frac{n-4}{2}}}{\sqrt{1-e^2\sin^2 x}}\partial x + \frac{e^2\sin x\cos x(1-e^2\sin^2 x)^{\frac{n-3}{2}}}{n-1}, \\ \int \frac{\partial x}{(1-e^2\sin^2 x)^{\frac{n}{2}}\sqrt{1-e^2\sin^2 x}} &= \frac{n-2}{n-1}\,\frac{2-e^2}{1-e^2}\int \frac{\partial x}{(1-e^2\sin^2 x)^{\frac{n-2}{2}}\sqrt{1-e^2\sin^2 x}} \\ &- \frac{n-3}{n-1}\,\frac{1}{1-e^2}\int \frac{\partial x}{(1-e^2\sin^2 x)^{\frac{n-4}{2}}\sqrt{1-e^2\sin^2 x}} - \frac{e^2\sin x\cos x}{(n-1)(1-e^2)(1-e^2\sin^2 x)^{\frac{n-1}{2}}}\end{aligned}\right\} (l)$$

So etwa wäre für $n=2$:

$$\int \frac{\partial x}{(1-e^2\sin^2 x)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{1-e^2}\int \frac{1-e^2\sin^2 x}{\sqrt{1-e^2\sin^2 x}}\partial x - \frac{e^2\sin x\cos x}{(1-e^2)\sqrt{1-e^2\sin^2 x}}$$
$$= \frac{1}{1-e^2}\int \sqrt{1-e^2\sin^2 x}\,\partial x - \frac{e^2}{1-e^2}\,\frac{\sin x\cos x}{\sqrt{1-e^2\sin^2 x}}.$$

Da $\sin^2 x = \frac{1-(1-e^2\sin^2 x)}{e^2}$, $\cos^2 x = \frac{e^2-1+(1-e^2\sin^2 x)}{e^2}$, so werden die Integrale

$$\int \frac{\sin^{2m} x\,\partial x}{(1-e^2\sin^2 x)^{\frac{n}{2}}\sqrt{1-e^2\sin^2 x}}, \quad \int \frac{\cos^{2m} x\,\partial x}{(1-e^2\sin^2 x)^{\frac{n}{2}}\sqrt{1-e^2\sin^2 x}}$$

leicht auf obige zurückgeführt werden können. Setzt man eben so

$$\int \frac{\xi^n \partial x}{(1\pm e\xi)\sqrt{1-e^2\sin^2 x}} = R_n, \quad \int \frac{\xi^n \partial x}{\sqrt{1-e^2\sin^2 x}} = P_n,$$

so ist

$$R_n \pm e R_{n+1} = P_n,$$

so dass also

$$R_0 \pm eR_1 = P_0,\ R_1 \pm eR_2 = P_1,\ R_2 \pm eR_3 = P_2, \ldots,$$

woraus, wenn $P_0, P_1, \ldots$ nach dem Obigen bekannt sind, dessgleichen R_0, dann $R_1, R_2, \ldots$ gefunden werden. Für $\xi = \sin x$ ist aber

$$\int\frac{\partial x}{(1\pm e\sin x)\sqrt{1-e^2\sin^2 x}} = \int\frac{(1\mp e\sin x)\partial x}{(\sqrt{1-e^2\sin^2 x})^3} = \int\frac{\partial x}{(1-e^2\sin^2 x)^{\frac{3}{2}}} \mp e\int\frac{\sin x\,\partial x}{(1-e^2\sin^2 x)^{\frac{3}{2}}},$$

welche beide Integrale bestimmt werden können. Aehnliche Integrale werden wir aber immer durch die nachfolgenden Methoden bestimmen können, so dass die Aufstellung weiterer besonderer Reduktionsformeln unterbleiben kann.

§. 101.

Das Integral

$$\int\frac{\partial x}{\sqrt{A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4}}$$

lässt sich immer auf die Form $\int\frac{\partial z}{\sqrt{(1\pm z^2)(1\pm e^2 z^2)}}$ bringen, eben so dasjenige, das man für $E=0$ aus dem vorigen erhält, wie sich im Nachstehenden zeigen wird.

E nicht $=0$, mithin gegeben $\int\frac{\partial x}{\sqrt{A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4}}$.

I. Die Gleichung $A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4=0$ habe vier reelle Wurzeln a, b, c, d so, dass $a<b<c<d$. Wir setzen diese Wurzeln als ungleich voraus, denn wären nur zwei einander gleich, so käme das vorgelegte Integral auf §. 40 zurück. Man hat also identisch

$$A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4 = E(x-a)(x-b)(x-c)(x-d).$$

Wir müssen nun, in Bezug auf die Gränzen von x, folgende Fälle unterscheiden.

1) x liegt unter a, oder über d. Da immer $A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4$ positiv seyn muss, $(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$ es aber ist, so muss nothwendig $E>0$ seyn, da sonst x nicht in der angegebenen Weise liegen darf. * Man setze nun

$$\frac{x-a}{x-d} = \alpha\frac{1-z}{1+z},\quad x = \frac{a(1+z)-\alpha d(1-z)}{1+z-\alpha(1-z)},\quad \frac{\partial x}{\partial z} = \frac{2\alpha(d-a)}{[1-\alpha+(1+\alpha)z]^2},$$

woraus

$$x-a = \frac{\alpha(a-d)(1-z)}{1-\alpha+(1+\alpha)z},\quad x-b = \frac{a-b+\alpha(b-d)+(a+\alpha d-b-\alpha b)z}{1-\alpha+(1+\alpha)z},$$

$$x-c = \frac{a-c+\alpha(c-d)+(a+\alpha d-c-\alpha c)z}{1-\alpha+(1+\alpha)z},\quad x-d = \frac{(a-d)(1+z)}{1-\alpha+(1+\alpha)z},$$

so dass

$$\frac{1}{E(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)}\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2$$

$$= \frac{4\alpha^2(d-a)^2}{E}\cdot\frac{1}{\alpha(a-d)^2(1-z^2)[(a-b)(1+z)+\alpha(b-d)(1-z)][(a-c)(1+z)+\alpha(c-d)(1-z)]}.$$

Die noch unbestimmte Grösse α wollen wir nun so bestimmen, dass das

---

* Für die Anwendungen nämlich wird immer $\sqrt{A+Bx+\ldots+Ex^4}$ reell seyn; analytisch wäre ein negatives E auch zulässig; man würde aber dann bloss $i=\sqrt{-1}$ als Faktor im Nenner herauszusetzen haben.

im Produkte der zwei letzten Faktoren enthaltene Glied mit z ausfalle, wozu nothwendig ist, dass

$$(a-b)(a-c)-\alpha^2(b-d)(c-d)=0,\ \alpha^2=\frac{(a-b)(a-c)}{(b-d)(c-d)};$$

dann ist jenes Produkt

$$(a-b)(a-c)(1+z^2)+\alpha[(c-d)(a-b)+(a-c)(b-d)](1-z^2)+\alpha^2(b-d)(c-d)(1+z^2) = 2(a-b)(a-c)(1+z^2)+\alpha[(c-d)(a-b)+(a-c)(b-d)](1-z^2) =$$
$$2(a-b)(a-c)+\alpha[(c-d)(a-b)+(a-c)(b-d)]+[2(a-b)(a-c) - \alpha\{(c-d)(a-b)+(a-c)(b-d)\}]z^2.$$

Die Grössen $(a-b)(a-c)$, $(c-d)(a-b)$, $(a-c)(b-d)$ sind alle positiv; setzt man also α auch positiv voraus, d. h. $=\sqrt{\frac{(a-b)(a-c)}{(b-d)(c-d)}}$, so ist

$$2(a-b)(a-c)+\alpha[(c-d)(a-b)+(a-c)(b-d)]=\alpha\left[\sqrt{(c-d)(a-b)}+\sqrt{(a-c)(b-d)}\right]^2,$$
$$2(a-b)(a-c)-\alpha[(c-d)(a-b)+(a-c)(b-d)]=-\alpha\left[-\sqrt{(c-d)(a-b)}+\sqrt{(a-c)(b-d)}\right]^2,$$

so dass, wenn zur Abkürzung

$$e=\frac{-\sqrt{(c-d)(a-b)}+\sqrt{(a-c)(b-d)}}{\sqrt{(c-d)(a-b)}+\sqrt{(a-c)(b-d)}}=\frac{(a-c)(b-d)-(c-d)(a-b)}{\left[\sqrt{(c-d)(a-b)}+\sqrt{(a-c)(b-d)}\right]^2}$$
$$=\frac{(a-d)(b-c)}{\left[\sqrt{(c-d)(a-b)}+\sqrt{(a-c)(b-d)}\right]^2}$$

gesetzt wird, wo also e positiv und <1, man hat:

$$\frac{1}{A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4}\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2=\frac{4}{E\left[\sqrt{(c-d)(a-b)}+\sqrt{(a-c)(b-d)}\right]^2}$$
$$\cdot\frac{1}{(1-z^2)(1-e^2z^2)}=\frac{4e}{E(a-d)(b-c)}\cdot\frac{1}{(1-z^2)(1-e^2z^2)},$$

und man hat daher das folgende Schema:

$$\frac{x-a}{x-d}=\alpha\frac{1-z}{1+z},\ \alpha=\sqrt{\frac{(b-a)(c-a)}{(d-b)(d-c)}},\ e=\frac{\sqrt{(c-a)(d-b)}-\sqrt{(d-c)(b-a)}}{\sqrt{(c-a)(d-b)}+\sqrt{(d-c)(b-a)}},$$
$$\int\frac{\partial x}{\sqrt{A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4}}=\frac{2\sqrt{e}}{\sqrt{E(d-a)(c-b)}}\int\frac{\partial z}{\sqrt{(1-z^2)(1-e^2z^2)}}.$$

Was die Gränzen von z anbelangt, so wird, wenn x geht von $-\infty$ bis a, z gehen von 0 bis 1, und wenn x geht von d bis $+\infty$, z von -1 bis 0.

2) x liege zwischen a und b. In diesem Falle ist $(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$ nothwendig negativ, also muss E negativ seyn. Man setze nun

$$\frac{b-x}{x-a}=\alpha\frac{1-z}{1-z},\ x=\frac{b+\alpha a+(b-a\alpha)z}{1+\alpha+(1-\alpha)z},\ \frac{\partial x}{\partial z}=\frac{2\alpha(b-a)}{[1+\alpha+(1-\alpha)z]^2}$$

woraus nun

$$x-a=\frac{(b-a)(1+z)}{(1+\alpha+(1-\alpha)z},\ x-b=-\frac{\alpha(b-a)(1-z)}{1+\alpha+(1-\alpha)z},$$
$$x-c=\frac{(b-c)(1+z)+\alpha(a-c)(1-z)}{1+\alpha+(1-\alpha)z},\ x-d=\frac{(b-d)(1+z)+\alpha(a-d)(1-z)}{1+\alpha+(1-\alpha)z},$$

so dass, wenn wieder α so bestimmt wird aus

$$(b-c)(b-d)-\alpha^2(a-c)(a-d)=0,\ \alpha=\sqrt{\frac{(c-b)(d-b)}{(c-a)(d-a)}},$$

man zugleich beachtet, dass dann

$$(b-c)(b-d)+\alpha[(a-c)(b-d)+(b-c)(a-d)]+\alpha^2(a-c)(a-d)$$
$$=\alpha\left[\sqrt{(a-c)(b-d)}+\sqrt{(b-c)(a-d)}\right]^2,$$
$$(b-c)(b-d)-\alpha[(a-c)(b-d)+(b-c)(a-d)]+\alpha^2(a-c)(a-d)=$$
$$-\alpha\left[\sqrt{(a-c)(b-d)}-\sqrt{(b-c)(a-d)}\right]^2,$$

und man setzt:

$$e=\frac{\sqrt{(a-c)(b-d)}-\sqrt{(b-c)(a-d)}}{\sqrt{(a-c)(b-d)}+\sqrt{(b-c)(a-d)}},$$

man haben wird:

$$(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)=-\alpha(b-a)^2(1-z^2)\alpha\left[\sqrt{(a-c)(b-d)}\right.$$
$$\left.+\sqrt{(b-c)(a-d)}\right]^2(1-e^2z^2),$$

und da auch

$$e=\frac{(d-c)(b-a)}{\left[\sqrt{(a-c)(b-d)}+\sqrt{(b-c)(a-d)}\right]^2},$$

so erhält man jetzt folgendes Schema:

$$\frac{b-x}{x-a}=\alpha\frac{1-z}{1+z},\quad \alpha=\sqrt{\frac{(c-b)(d-b)}{(c-a)(d-a)}},\quad e=\frac{\sqrt{(c-a)(d-b)}-\sqrt{(c-b)(d-a)}}{\sqrt{(c-a)(d-b)}+\sqrt{(c-b)(d-a)}},$$
$$\int\frac{\partial x}{\sqrt{A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4}}=\frac{2\sqrt{e}}{\sqrt{-E(d-c)(b-a)}}\int\frac{\partial z}{\sqrt{(1-z^2)(1-e^2z^2)}}.$$

Dabei liegt z immer zwischen -1 und $+1$, $e<1$.

3) x liege zwischen b und c. Jetzt muss E positiv seyn und man erhält ganz in derselben Weise:

$$\frac{c-x}{x-b}=\alpha\frac{1-z}{1+z},\quad \alpha=\sqrt{\frac{(d-c)(c-a)}{(d-b)(b-a)}},\quad e=\frac{\sqrt{(d-b)(c-a)}-\sqrt{(d-c)(b-a)}}{\sqrt{(d-b)(c-a)}+\sqrt{(d-c)(b-a)}},$$
$$\int\frac{\partial x}{\sqrt{A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4}}=\frac{2\sqrt{e}}{\sqrt{E(d-a)(c-b)}}\int\frac{\partial z}{\sqrt{(1-z^2)(1-e^2z^2)}},$$

z zwischen -1 und $+1$, $e<1$.

4) x liege zwischen c und d. Jetzt muss $E<0$ seyn und man hat:

$$\frac{d-x}{x-c}=\alpha\frac{1-z}{1-z},\quad \alpha=\sqrt{\frac{(d-a)(d-b)}{(c-a)(c-b)}},\quad e=\frac{\sqrt{(c-a)(d-b)}-\sqrt{(d-a)(c-b)}}{\sqrt{(c-a)(d-b)}+\sqrt{(d-a)(c-b)}},$$
$$\int\frac{\partial x}{\sqrt{A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4}}=\frac{2\sqrt{e}}{\sqrt{-E(b-a)(d-c)}}\int\frac{\partial z}{\sqrt{(1-z^2)(1-e^2z^2)}}.$$

II. Die Gleichung $A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4=0$ hat nur zwei reelle Wurzeln: $a<b$, und zwei imaginäre: $m\pm ni$, so dass

$$A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4=E(x-a)(x-b)[(x-m)^2+n^2],$$

wo natürlich $n^2>0$. Man hat nun folgende Fälle zu unterscheiden:

1) $x<a$ oder $>b$, so ist $E>0$, und man setze wieder

$$\frac{x-a}{x-b}=\alpha\frac{1-z}{1+z},\quad x=\frac{a-\alpha b+(a+\alpha b)z}{1-\alpha+(1+\alpha)z},\quad \frac{\partial x}{\partial z}=\frac{2\alpha(b-a)}{[1-\alpha+(1+\alpha)z]^2},$$

so ist

$$(x-m)^2+n^2=\frac{[a-\alpha b-m+m\alpha+(a+\alpha b-m-m\alpha)z]^2+n^2[1-\alpha+(1+\alpha)z]^2}{[1-\alpha+(1+\alpha)z]^2},$$

so dass wenn α aus der Gleichung

$$(a-\alpha b-m+m\alpha)(a+\alpha b-m-m\alpha)+n^2(1-\alpha^2)=0$$

bestimmt wird, aus der folgt

$$\alpha^2=\frac{(a-m)^2+n^2}{(b-m)^2+n^2},$$

und man zur Abkürzung setzt:

$$(a-\alpha b-m+m\alpha)^2+n^2(1-\alpha)^2=\beta^2,\ (a+\alpha b-m-m\alpha)^2+n^2(1+\alpha)^2=\gamma^2,$$

man hat

$$(x-a)(x-b)[(x-m)^2+n^2]=\frac{\alpha(b-a)^2(1-z^2)(\beta^2+\gamma^2 z^2)}{[1-\alpha+(1+\alpha)z]^4},$$

so dass also hier:

$$\frac{x-a}{x-b}=\alpha\frac{1-z}{1+z},\ \alpha=\sqrt{\frac{(a-m)^2+n^2}{(b-m)^2+n^2}},\ \int\frac{\partial x}{\sqrt{A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4}}$$
$$=\frac{2\sqrt{\alpha}}{\sqrt{E}}\int\frac{\partial z}{\sqrt{(1-z^2)(\beta^2+\gamma^2 z^2)}}.$$

z zwischen -1 und $+1$.

2) x liege zwischen a und b. Ganz wie so eben hat man, da jetzt $E<0$:

$$\frac{b-x}{x-a}=\alpha\frac{1-z}{1+z},\ \alpha=\sqrt{\frac{(b-m)^2+n^2}{(a-m)^2+n^2}},\ \beta^2=(b+\alpha a-m-m\alpha)^2+n^2(1+\alpha)^2,$$
$$\gamma^2=(b-\alpha a-m+m\alpha)^2+n^2(1-\alpha)^2,$$
$$\int\frac{\partial x}{\sqrt{A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4}}=\frac{2\sqrt{\alpha}}{\sqrt{-E}}\int\frac{\partial z}{\sqrt{(1-z^2)(\beta^2+\gamma^2 z^2)}}.$$

III. Die Gleichung $A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4=0$ habe die vier imaginären Wurzeln: $m\pm ni$, $m'\pm n'i$, so dass

$$A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4=E[(x-m)^2+n^2][(x-m')^2+n'^2],\ E>0.$$

Man setze

$$\frac{x-m}{n}=\frac{1+\alpha z}{\alpha-z},\ x=\frac{n(1+\alpha z)+m(\alpha-z)}{\alpha-z},\ \frac{\partial x}{\partial z}=\frac{n(1+\alpha^2)}{(\alpha-z)^2},$$

so ist

$$(x-m)^2+n^2=\frac{n^2[(\alpha-z)^2+(1+\alpha z)^2]}{(\alpha-z)^2}=\frac{n^2(1+\alpha^2)(1+z^2)}{(\alpha-z)^2},$$
$$(x-m')^2+n'^2=\frac{[n+m\alpha-m'\alpha+(m'+n\alpha-m)z]^2+n'^2(\alpha-z)^2}{(\alpha-z)^2},$$

so dass, wenn α aus der Gleichung

$$(n+m\alpha-m'\alpha)(m'+n\alpha-m)-n'^2\alpha=0$$

bestimmt wird, man hat

$$(x-m')^2+n'^2=\frac{\beta^2+\gamma^2 z^2}{(\alpha-z)^2},\ \beta^2=(n+m\alpha-m'\alpha)^2+n'^2\alpha^2,\ \gamma^2=(m'+n\alpha-m)^2+n'^2.$$

Was α anbelangt, so gibt obige Gleichung

$$\alpha=\frac{n'^2+(m-m')^2-n^2+\sqrt{4n^2(m-m')^2+[n'^2+(m-m')^2-n^2]^2}}{2n(m-m')}.$$

Setzt man nun die angeführten Werthe ein, so ergibt sich (wo die Wurzelgrösse positiv zu nehmen ist):

$$\int\frac{\partial x}{\sqrt{A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4}}=\sqrt{\frac{1+\alpha^2}{E}}\int\frac{\partial z}{\sqrt{(1+z^2)(\beta^2+\gamma^2 z^2)}}.$$

Was β^2 und γ^2 anbelangt, so ist

$$\beta^2-\gamma^2=[n^2-(m-m')^2-n'^2](1-\alpha^2)+4n(m-m')\alpha=[n^2-(m-m')^2-n'^2](1+\alpha^2)$$
$$+2[n'^2+(m-m')^2-n^2]\alpha^2+4n(m-m')\alpha=[n^2-(m-m')^2-n'^2](1+\alpha^2)+$$
$$2n(m-m')\alpha(\alpha^2-1)+4n(m-m')\alpha^{*}=[n^2-(m-m')^2-n'^2](1+\alpha^2)+2n(m-m')\alpha$$
$$(1+\alpha^2)=(1+\alpha^2)[n^2-(m-m')^2-n'^2+2n(m-m')\alpha].$$

---

* Die Gleichung, welche α bestimmt, ist

$$[n^2-(m-m')^2-n'^2]\alpha+n(m-m')\alpha^2-(m-m')n=0,$$

woraus folgt

$$[n'^2+(m-m')^2-n^2]\alpha=n(m-m')(\alpha^2-1),$$
$$[n'^2+(m-m')^2-n^2]\alpha^2=n(m-m')\alpha(\alpha^2-1).$$

Nun ist aber $1+\alpha^2>0$; ferner, wenn man obigen Werth von α einsetzt:

$$n^2-(m-m')-n^2+2n(m-m')\alpha=\sqrt{4n^2(m-m')^2+[n'^2+(m-m')^2-n^2]^2},$$

also auch positiv, mithin $\beta^2-\gamma^2>0$, d. h. $\beta^2>\gamma^2$.

$E=0$, mithin vorgelegt $\int\frac{\partial x}{\sqrt{A+Bx+Cx^2+Dx^3}}$.

Man wird leicht beachten, dass es im Vorstehenden in Wahrheit nur darauf ankam, die Integrale

$$\int\frac{\partial x}{\sqrt{\pm(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)}},\quad \int\frac{\partial x}{\sqrt{\pm(x-a)(x-b)[(x-m)^2+n^2]}},$$
$$\int\frac{\partial x}{\sqrt{[(x-m)^2+n^2][(x-m')^2+n'^2]}}$$

umzuformen. Ferner ist klar, dass wenn man in dem Ausdruck

$$E(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$$

setzt $E=\varepsilon$, $a=-\frac{1}{\varepsilon}$ und dann ε zu Null werden lässt, derselbe zu

$$(\varepsilon x+1)(x-b)(x-c)(x-d)=(x-b)(x-c)(x-d)$$

wird. Je nachdem nun die Wurzeln von $A+Bx+Cx^2+Dx^3=0$ beschaffen sind, wird man haben

$$A+Bx+Cx^2+Dx^3=D(x-b)(x-c)(x-d) \text{ oder } =D(x-b)[(x-m)^2+n^2],$$

und man wird für $E=\varepsilon$ und $a=-\frac{1}{\varepsilon}$ diese Grössen, in denen D weggelassen ist, unmittelbar aus dem Frühern enthalten, wenn man $\varepsilon=0$ setzt. Daraus folgt nun leicht:

IV. Die Gleichung $A+Bx+Cx^2+Dx^3=0$ habe drei reelle Wurzeln: $b<c<d$; so dass

$$A+Bx+Cx^2+Dx^3=D(x-b)(x-c)(x-d).$$

Dabei sind nun folgende Fälle zu unterscheiden:

1) x sey immer grösser als d, so dass $D>0$. Setzt man in I. 1): $E=\varepsilon$, $a=-\frac{1}{\varepsilon}$ und lässt dann $\varepsilon=0$ werden, so ergibt sich das folgende Schema, wenn man statt des Faktors $x-a$ geradezu 1 setzt, oder statt α: $\frac{\alpha}{\varepsilon}$:

$$\frac{1}{x-d}=\alpha\frac{1-z}{1+z},\ \alpha=\frac{1}{\sqrt{(d-b)(d-c)}},\ e=\frac{\sqrt{d-b}-\sqrt{d-c}}{\sqrt{d-b}+\sqrt{d-c}}=\frac{c-b}{[\sqrt{d-b}+\sqrt{d-c}]^2},$$
$$\int\frac{\partial x}{\sqrt{A+Bx+Cx^2+Dx^3}}=\frac{2\sqrt{e}}{\sqrt{D(c-b)}}\int\frac{\partial z}{\sqrt{(1-z^2)(1-e^2z^2)}}.$$

2) x sey kleiner als b, also $D<0$. In derselben Weise erhält man aus den Formeln in I. 2):

$$b-x=\alpha\frac{1-z}{1+z},\ \alpha=\sqrt{(c-b)(d-b)},\ e=\frac{\sqrt{d-b}-\sqrt{c-b}}{\sqrt{d-b}+\sqrt{c-b}}=\frac{d-c}{[\sqrt{d-b}+\sqrt{c-b}]^2}$$
$$\int\frac{\partial x}{\sqrt{A+Bx+Cx^2+Dx^3}}=\frac{2\sqrt{e}}{\sqrt{-D(d-c)}}\int\frac{\partial z}{\sqrt{(1-z^2)(1-e^2z^2)}}.$$

3) x liege zwischen b und c, also $D>0$. Aus den Formeln in I. 3) folgt:

$$\frac{c-x}{x-b}=\alpha\frac{1-z}{1+z},\ \alpha=\sqrt{\frac{d-c}{d-b}},\ e=\frac{\sqrt{d-b}-\sqrt{d-c}}{\sqrt{d-b}+\sqrt{d-c}}=\frac{c-b}{[\sqrt{d-b}+\sqrt{d-c}]^2},$$

$$\int\frac{\partial x}{\sqrt{A+Bx+Cx^2+Dx^3}}=\frac{2\sqrt{e}}{\sqrt{D(c-b)}}\int\frac{\partial z}{\sqrt{(1-z^2)(1\ \ e^2z^2)}}.$$

4) x liege zwischen c und d, also $D<0$. Aus I. 4) folgt:

$$\frac{d-x}{x-c}=\alpha\frac{1-z}{1+z},\ \alpha=\sqrt{\frac{d-b}{c-b}},\ e=\frac{\sqrt{d-b}-\sqrt{c-b}}{\sqrt{d-b}+\sqrt{c-b}},$$

$$\int\frac{\partial x}{\sqrt{A+Bx+Cx^2+Dx^3}}=\frac{2\sqrt{e}}{\sqrt{-D(d-c)}}\int\frac{\partial z}{\sqrt{(1-z^2)(1-e^2z^2)}}.$$

V. Die Gleichung $A+Bx+Cx^2+Dx^3=0$ habe nur eine reelle Wurzel b. Alsdann ist

$$A+Bx+Cx^2+Dx^3=D(x-b)[(x-m)^2+n^2].$$

1) Sey $x>b$, also $D>0$, so folgt aus II, 1):

$$\frac{1}{x-b}=\alpha\frac{1-z}{1+z},\ \alpha=\frac{1}{\sqrt{(b-m)^2+n^2}},\ \beta^2=2[1+\alpha(b-m)],\ \gamma^2=2[1-\alpha(b-m)],$$

$$\int\frac{\partial x}{\sqrt{A+Bx+Cx^2+Dx^3}}=\frac{2\sqrt{\alpha}}{\sqrt{D}}\int\frac{\partial z}{\sqrt{(1-z^2)(\beta^2+\gamma^2z^2)}}.$$

2) $x<b$, also $D<0$, wo nun aus II. 2) folgt:

$$b-x=\alpha\frac{1-z}{1+z},\ \alpha=\sqrt{(b-m)^2+n^2},\ \beta^2=2\alpha^2-2\alpha(b-m),\ \gamma^2=2\alpha^2+2\alpha(b-m),$$

$$\int\frac{\partial x}{\sqrt{A+Bx+Cx^2+Dx^3}}=\frac{2\sqrt{e}}{\sqrt{-D}}\int\frac{\partial z}{\sqrt{(1-z^2)(\beta^2+\gamma^2z^2)}}.$$

Anm. Man kann sich leicht überzeugen, dass die in IV. und V. behandelten Fälle richtig gelöst sind, wenn man direkt substituirt, und wir wollen dies, um keinerlei Unklarheit zu verursachen, doch noch kurz andeuten.

$$1)\ x=\frac{1+z}{\alpha(1-z)}+d,\ \frac{\partial x}{\partial z}=\frac{2}{\alpha(1-z)^2},\ \ x-b=\frac{1+z}{\alpha(1+z)}+d-b,\ x-c=\frac{1+z}{\alpha(1-z)}+d-c.$$

$$D(x-b)(x-c)(x-d)=D\frac{[1+\alpha(d-b)+(1-\alpha(d-b))z][1+\alpha(d-c)+(1-\alpha(d-c))z](1+z)}{\alpha^3(1-z)^3}$$

$$=\frac{\left\{\begin{matrix}D[\sqrt{d-c}+\sqrt{d-b}+(\sqrt{d-c}-\sqrt{d-b})z][\sqrt{d-b}+\sqrt{d-c}\\ +(\sqrt{d-b}-\sqrt{d-c})z](1-z^2)\end{matrix}\right\}}{\sqrt{d-c}\sqrt{d-b}\,.\,\alpha^3(1-z)^4}$$

$$=\frac{D(\sqrt{d-c}+\sqrt{d-b})^2(1-ez)(1+ez)(1-z^2)}{\sqrt{d-c}\sqrt{d-b}\,.\,\alpha^3(1-z)^4}=\frac{D(c-b)(1-e^2z^2)(1-z^2)}{\alpha^2e(1-z)^4}.$$

$$2)\ x=b-\frac{\alpha(1-z)}{1+z};\ D(x-b)(x-c)(x-d)$$

$$=-D\frac{\alpha(1-z)[b-c-\alpha+(b-c+\alpha)z]\,[b-d-\alpha+(b-d+\alpha)z]}{(1+z)^3}$$

$$=-\frac{\left\{\begin{matrix}D\alpha(1-z^2)\sqrt{c-b}\sqrt{d-b}[-\sqrt{c-b}-\sqrt{d-b}+(\sqrt{d-b}-\sqrt{c-b})z]\\ [-\sqrt{d-b}-\sqrt{c-b}+(\sqrt{c-b}-\sqrt{d-b})z]\end{matrix}\right\}}{(1+z)^4}$$

$$=-\frac{D\alpha^2(1-z^2)[\sqrt{c-b}+\sqrt{d-b}]^2(-1+ez)(-1-ez)}{(1+z)^4}$$

$$=-\frac{D\alpha^3(1-z^2)(1-e^2z^2)}{e(1+z)^4}(d-c),\ \ \frac{\partial x}{\partial z}=\frac{2\alpha}{(1+z)^2}.$$

$$3)\ x = \frac{c+\alpha b+(c-\alpha b)z}{1+\alpha+(1-\alpha)z},\ (x-b)(x-c)(x-d)$$

$$= -\frac{\alpha(c-b)^2(1-z^2)[c-d+\alpha(b-d)+\{c-d-\alpha(b-d)\}z]}{[1+\alpha+(1-\alpha)z]^3} =$$

$$\frac{\alpha(c-b)^2(1-z^2)[\alpha^2+\alpha+(\alpha^2-\alpha)z](d-b)}{[1+\alpha+(1-\alpha)z]^3} = \frac{\alpha^2(c-b)^2(d-b)(1-z^2)[(1+\alpha)^2-(1-\alpha)^2z^2]}{[1+\alpha+(1-\alpha)z]^4}$$

$$= \frac{\alpha^2(1+\alpha)^2(d-b)(c-b)^2(1-z^2)(1-e^2z^2)}{[1+\alpha+(1-\alpha)z]^4} = \frac{\alpha^2(c-b)^2(1-z^2)(1-e^2z^2)}{e[1+\alpha+(1-\alpha)z]^4},$$

$$\frac{\partial x}{\partial z} = \frac{2\alpha(c-b)}{[1+\alpha+(1-\alpha)z]^2}.$$

4) Wie unter Nr. 3.

$$5)\ x = \frac{1+z}{\alpha(1-z)}+b,\ (x-b)[(x-m)^2+n^2]$$

$$= \frac{(1+z)[(1+z+\alpha(b-m)(1-z))^2+n^2\alpha^2(1-z)^2]}{\alpha^3(1-z)^3}$$

$$= \frac{(1-z^2)[(1+z)^2+2\alpha(b-m)(1-z^2)+(1-z)^2]}{\alpha^3(1-z)^4} = \frac{(1-z^2)[\beta^2+\gamma^2z^2]}{\alpha^3(1-z)^4},\ \frac{\partial x}{\partial z} = \frac{2}{\alpha(1-z)^2}.$$

$$6)\ x = b-\frac{\alpha(1-z)}{1+z},\ (x-b)[(x-m)^2+n^2] = -\frac{\alpha(1-z^2)[\beta^2+\gamma^2z^2]}{(1+z)^4},\ \frac{\partial x}{\partial z} = \frac{2\alpha}{(1-z)^2}.$$

Hieraus ergibt sich, dass das Integral $\int \frac{\partial x}{\sqrt{A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4}}$, so wie $\int \frac{\partial x}{\sqrt{A+Bx+Cx^2+Dx^3}}$ immer auf eine der drei Formen

$$\int \frac{\partial z}{\sqrt{(1-z^2)(1-e^2z^2)}},\ e^2<1;\ \int \frac{\partial z}{\sqrt{(1-z^2)(\beta^2+\gamma^2z^2)}};\ \int \frac{\partial z}{\sqrt{(1+z^2)(\beta^2+\gamma^2z^2)}}$$
$$(\beta^2>\gamma^2),$$

zurückgeführt werden kann. Die zwei letzten kann man dadurch, dass man β^2 als gemeinschaftlichen Faktor heraussetzt, d. h. $\beta^2+\gamma^2z^2 = \beta^2\left(1+\frac{\gamma^2}{\beta^2}z^2\right)$ schreibt, noch etwas vereinfachen, so dass man schliesslich nur die Integrale

$$\int \frac{\partial z}{\sqrt{(1-z^2)(1-e^2z^2)}},\ \int \frac{\partial z}{\sqrt{(1-z^2)(1+k^2z^2)}},\ \int \frac{\partial z}{\sqrt{(1+z^2)(1+e^2z^2)}},$$

in denen $e^2<1$ ist, zu betrachten hat. Dabei liegt für die zwei ersten z zwischen -1 und $+1$, d. h. da dieselben nur z^2 enthalten, z zwischen 0 und 1 (§. 49, VII), für das letzte kann z alle möglichen Werthe haben. Um nun diese Integrale auf elliptische zu reduziren, setze man in denselben bezüglich

$$z = \sin\varphi,\ z = \cos\varphi,\ z = \operatorname{tg}\varphi$$

und hat

$$\int \frac{\partial z}{\sqrt{(1-z^2)(1-e^2z^2)}} = \int \frac{\cos\varphi\,\partial\varphi}{\cos\varphi\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}} = \int \frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}},$$

$$\int \frac{\partial z}{\sqrt{(1-z^2)(1+k^2z^2)}} = \int \frac{-\sin\varphi\,\partial\varphi}{\sin\varphi\sqrt{1+k^2\cos^2\varphi}} = -\int \frac{\partial\varphi}{\sqrt{1+k^2-k^2\sin^2\varphi}}$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{1+k^2}}\int \frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-\frac{k^2}{1+k^2}\sin^2\varphi}},$$

$$\int \frac{\partial z}{\sqrt{(1+z^2)(1+e^2z^2)}} = \int \frac{\partial \varphi}{\cos^2\varphi\sqrt{(1+tg^2\varphi)(1+e^2tg^2\varphi)}} = \int \frac{\partial \varphi}{\sqrt{\cos^2\varphi+e^2\sin^2\varphi}} =$$
$$\int \frac{\partial \varphi}{\sqrt{1-(1-e^2)\sin^2\varphi}},$$

welche drei Integrale, in denen φ zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ liegt, zu den elliptischen Integralen der ersten Art gehören, da e^2, $\frac{k^2}{1+k^2}$, $1-e^2$ kleiner als 1 und positiv sind.

§. 102.

Gesetzt nun, man habe das Integral

$$\int \frac{f(x)\partial x}{\sqrt{A+Bx+Cx^2+Dx^3+Ex^4}}, \qquad (a)$$

in welchem E auch $=0$ seyn kann, und wo $f(x)$ eine rationale Funktion von x ist von der Form der in §. 37 betrachteten Brüche, also

$$f(x) = \frac{a+bx+cx^2+\ldots.}{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\ldots.},$$

so ersetze man x durch z, wie es §. 101 verlangen würde, damit $\sqrt{A+..+Ex^4}$ auf die Form $\sqrt{(1\pm z^2)(1\pm e^2z^2)}$ reduzirt werde, so wird $f(x)$ immer noch eine rationale gebrochene Funktion von z seyn; alsdann ersetze man z durch $\sin\varphi$, $\cos\varphi$, $tg\varphi$, je nachdem es $\sqrt{(1\pm z^2)(1\pm e^2z^2)}$ verlangt, so wird das Integral (a) auf das folgende reduzirt seyn:

$$\int \frac{F\partial\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}, \qquad (a')$$

wo F eine rationale gebrochene Funktion von $\sin\varphi$, oder $\cos\varphi$, oder $tg\varphi$ ist. Zerfällt man dieselbe nach §. 37 in Partialbrüche, so wird man die Integrale

$$\int \frac{\sin^n\varphi\,\partial x}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}, \int \frac{\cos^n\varphi\,\partial\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}, \int \frac{tg^n\varphi\,\partial\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}, \int \frac{\partial\varphi}{(a+\sin\varphi)^n\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}},$$
$$\int \frac{\partial\varphi}{(a+\cos\varphi)^n\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}, \int \frac{\partial\varphi}{(a+tg\varphi)^n\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}, \int \frac{(A\sin\varphi+B)\partial\varphi}{[(\sin\varphi+a)^2+b^2]^n\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}},$$
$$\int \frac{(A\cos\varphi+B)\partial\varphi}{[(\cos\varphi+a)^2+b^2]^n\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}, \int \frac{(A\,tg\varphi+C)\partial\varphi}{[(tg\varphi+a)^2+b^2]^n\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}, \qquad (b)$$

zu ermitteln haben, und wenn man alle diese Integrale zu bestimmen im Stande ist, so darf offenbar die allgemeine Aufgabe, das Integral (a) zu bestimmen, als vollständig erledigt angesehen werden. Was nun diese Integrale anbelangt, in denen φ nur zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ liegt, so sind durch die Formeln (k) des §. 100 die ersten drei bereits bestimmt, während die Formeln (k') desselben §. die drei andern bestimmen würden, wenn $a=0$ wäre.

Um für den allgemeinen Fall, in dem a nicht $=0$ ist, Reduktionsformeln aufzustellen, beachten wir, dass

$$-\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[\frac{\cos\varphi\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}{(a+\sin\varphi)^{n-1}}\right] = \frac{1}{(a+\sin\varphi)^n\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}[n-1+a(1+e^2)\sin\varphi$$
$$-(n-2)(1+e^2)\sin^2\varphi - 2ae^2\sin^3\varphi + (n-3)e^2\sin^4\varphi].$$

Man setze nun

$$n-1+a(1+e^2)\sin\varphi-(n-2)(1+e^2)\sin^2\varphi-2ae^2\sin^3\varphi+(n-3)e^2\sin^4\varphi = A$$
$$+B(a+\sin\varphi)+C(a+\sin\varphi)^2+D(a+\sin\varphi)^3+E(a+\sin\varphi)^4,$$

so erhält man, indem man die Koeffizienten derselben Potenzen von φ einander gleich setzt:

$$(n-3)e^2 = E,\quad -2ae^2 = 4aE + D,\quad -(n-2)(1+e^2) = 6a^2E + 3aD + C,$$
$$a(1+e^2) = 4a^3E + 3a^2D + 2aC + B,\quad n-1 = Ea^4 + Da^3 + Ca^2 + Ba + A,$$

woraus

$$E = (n-3)e^2,\quad D = -(4n-10)ae^2,\quad C = (n-2)(6a^2e^2 - e^2 - 1),$$
$$B = (2n-3)[1+e^2-2a^2e^2]a,\quad A = (n-1)(1-a^2)(1-a^2e^2),$$

so dass also:

$$-\frac{\cos\varphi\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}{(a+\sin\varphi)^{n-1}} = (n-1)(1-a^2)(1-a^2e^2)\int\frac{\partial\varphi}{(a+\sin\varphi)^n\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}$$
$$+(2n-3)a(1+e^2-2a^2e^2)\int\frac{\partial\varphi}{(a+\sin\varphi)^{n-1}\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}$$
$$+(n-2)(6a^2e^2-e^2-1)\int\frac{\partial\varphi}{(a+\sin\varphi)^{n-2}\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}} \qquad \text{(c)}$$
$$+(10-4n)ae^2\int\frac{\partial\varphi}{(a+\sin\varphi)^{n-3}\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}} + (n-3)e^2\int\frac{\partial\varphi}{(a+\sin\varphi)^{n-4}\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}},$$

welche Formel eine Reduktionsformel für $\int\frac{\partial\varphi}{(a+\sin\varphi)^n\sqrt{1-e^2\sin^4\varphi}}$ darbietet. Sie führt bei fortgesetzter Anwendung (bis zu $n=2$) schliesslich auf

$$\int\frac{\partial\varphi}{(a+\sin\varphi)\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}},\ \int\frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}},\ \int\frac{(a+\sin\varphi)\partial\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}},\ \int\frac{(a+\sin\varphi)^2\partial\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}},$$

von welchen Integralen die drei letzten bereits in §. 100 behandelt sind. Das erste gibt

$$\int\frac{\partial\varphi}{(a+\sin\varphi)\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}} = \int\frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}\left[\frac{a-\sin\varphi}{a^2-\sin^2\varphi}\right] = a\int\frac{\partial\varphi}{(a^2-\sin^2\varphi)\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}$$
$$-\int\frac{\sin\varphi\,\partial\varphi}{(a^2-\sin^2\varphi)\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}},$$

von denen das erste zur dritten Gattung der elliptischen Integrale gehört, das zweite aber nach §. 40 integrirt werden kann ($\cos\varphi = x$ gesetzt).

Ganz in derselben Weise erhält man auch folgende Reduktionsformel:

$$\frac{\sin\varphi\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}{(a+\cos\varphi)^{n-1}} = -(n-3)e^2\int\frac{\partial\varphi}{(a+\cos\varphi)^{n-4}\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}$$
$$+(4n-10)ae^2\int\frac{\partial\varphi}{(a+\cos\varphi)^{n-3}\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}$$
$$+(n-2)(2e^2-1-6a^2e^2)\int\frac{\partial\varphi}{(a+\cos\varphi)^{n-2}\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}$$

$$+(2n-3)(1-2e^2+2a^2e^2)a\int\frac{\partial\varphi}{(a+\cos\varphi)^{n-1}\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}$$
$$+(n-1)(1-a^2)(1-e^2+a^2e^2)\int\frac{\partial\varphi}{(a+\cos\varphi)^{n}\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}. \qquad \text{(d)}$$

Diese Reduktionsformel, die noch für $n=2$ anwendbar ist, führt schliesslich auf die Integrale

$$\int\frac{\partial\varphi}{(a+\cos\varphi)\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}},\ \int\frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}},\ \int\frac{(a+\cos\varphi)\,\partial\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}},\ \int\frac{(a+\cos\varphi)^2\,\partial\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}},$$

von denen die drei letzten in §. 100 schon behandelt wurden, und

$$\int\frac{\partial\varphi}{(a+\cos\varphi)\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}=\int\frac{(a-\cos\varphi)\,\partial\varphi}{(a^2-\cos^2\varphi)\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}$$
$$=a\int\frac{\partial\varphi}{(a^2-1+\sin^2\varphi)\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}-\int\frac{\cos\varphi\,\partial\varphi}{(a^2-\cos^2\varphi)\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}},$$

wovon das erste zur dritten Gattung elliptischer Integrale gehört, das zweite nach §. 40 integrirt werden kann (wenn man $\sin\varphi=x$ setzt). Ferner hat man in derselben Weise:

$$\frac{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}{(a+tg\varphi)^{n-1}\cos^2\varphi}=-(n-3)(1-e^2)\int\frac{\partial\varphi}{(a+tg\varphi)^{n-4}\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}$$
$$+(4n-10)a(1-e^2)\int\frac{\partial\varphi}{(a+tg\varphi)^{n-3}\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}$$
$$-(n-2)[2-e^2+6a^2(1-e^2)]\int\frac{\partial\varphi}{(a+tg\varphi)^{n-2}\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}$$
$$+(2n-3)a[2-e^2+2a^2(1-e^2)]\int\frac{\partial\varphi}{(a+tg\varphi)^{n-1}\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}$$
$$-(n-1)[1+a^2(1-e^2)](1+a^2)\int\frac{\partial\varphi}{(a+tg\varphi)^{n}\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}, \qquad \text{(e)}$$

welche Formel (für $n=2$) schliesslich ausser den schon in §. 100 behandelten Integralen noch auf das Folgende führt:

$$\int\frac{\partial\varphi}{(a+tg\varphi)\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}=\int\frac{a-tg\varphi}{a^2-tg^2\varphi}\,\frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}$$
$$=\int\frac{a\cos^2\varphi-\sin\varphi\cos\varphi}{a^2\cos^2\varphi-\sin^2\varphi}\,\frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}=a\int\frac{\cos^2\varphi}{a^2-(1+a^2)\sin^2\varphi}\,\frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}$$
$$-\int\frac{\sin\varphi\cos\varphi\,\partial\varphi}{[a^2-(1+a^2)\sin^2\varphi]\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}},$$

von denen das letzte nach §. 40 integrirt werden kann ($\sin^2\varphi=x$), während

$$\int\frac{\cos^2\varphi\,\partial\varphi}{[a^2-(1+a^2)\sin^2\varphi]\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}=\int\frac{1-\sin^2\varphi}{a^2-(1+a^2)\sin^2\varphi}\,\frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}$$
$$=\frac{1}{1+a^2}\int\frac{\partial\varphi}{[a^2-(1+a^2)\sin^2\varphi]\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}+\frac{1}{1+a^2}\int\frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}},$$

und also auf elliptische Integrale der dritten und ersten Art zurückkommt.

Wir hätten nunmehr noch Reduktionsformeln für die drei letzten der Integrale in (b) aufzustellen. Wir können dies jedoch vermeiden, wenn wir in den drei vorhergehenden a auch imaginär seyn lassen, also bei der Zerfällung von f(x) in Par-

tialbrüche nur Nenner von der Form $(x+a)^n$ zulassen, wo a sowohl reell als imaginär seyn kann. Dann gelten natürlich dieselben Reduktionsformeln (c), (d), (e) noch, wenn auch a imaginär ist. Da die imaginären Wurzeln immer paarweise vorkommen, so wird schliesslich das Imaginäre immer wegfallen. Wendet man aber die Reduktionsformeln (c), (d), (e) an, so gelangt man zum Ende auf ein elliptisches Integral der dritten Art, in dem imaginäre Konstanten vorkommen, d. h. auf ein Integral der Form

$$\int \frac{\partial\varphi}{[1+(m+ni)\sin^2\varphi]\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}},$$

mit dessen Bestimmung wir uns im folgenden §. beschäftigen wollen.

§. 103.

Sey $m+ni = r(\cos\varepsilon + i\sin\varepsilon)$, und

$$\int_0^\varphi \frac{\partial\varphi}{[1+r(\cos\varepsilon+i\sin\varepsilon)\sin^2\varphi]\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}} = K - Li, \qquad \text{(a)}$$

so ist auch

$$\int_0^\varphi \frac{\partial\varphi}{[1+r(\cos\varepsilon - i\sin\varepsilon)\sin^2\varphi]\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}} = K + Li,$$

woraus durch Addition und Subtraktion unmittelbar folgt:

$$\left.\begin{aligned} K &= \int_0^\varphi \frac{(1+r\cos\varepsilon\sin^2\varphi)\,\partial\varphi}{[1+2r\cos\varepsilon\sin^2\varphi+r^2\sin^4\varphi]\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}, \\ L &= \int_0^\varphi \frac{r\sin\varepsilon\sin^2\varphi\,\partial\varphi}{[1+2r\cos\varepsilon\sin^2\varphi+r^2\sin^4\varphi]\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}, \end{aligned}\right\} \text{(b)}$$

so dass, wenn man diese beiden Integrale zu bestimmen im Stande ist, man auch das Integral (a) bestimmen kann. Die beiden Integrale (b) gehören zu der Form

$$\int_0^\varphi \frac{(M+N\sin^2\varphi)\,\partial\varphi}{[1+2r\cos\varepsilon\sin^2\varphi+r^2\sin^4\varphi]\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}, \qquad \text{(c)}$$

deren Bestimmung wir nun angeben wollen. Zu dem Ende müssen wir jedoch noch eine andere Formel ableiten. Man setze

$$x = \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{(1+\alpha\sin^2\varphi)\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}, \qquad \text{(d)}$$

so ist

$$\frac{\partial x}{\partial\varphi} = \frac{1}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}} \cdot \frac{1-(2+\alpha)\sin^2\varphi+(1+2\alpha)e^2\sin^4\varphi - \alpha e^2\sin^6\varphi}{(1+\alpha\sin^2\varphi)^2(1-e^2\sin^2\varphi)},$$

woraus, wenn β (wie α) eine beliebige Konstante:

$$\frac{1}{1+\beta x^2}\,\frac{\partial x}{\partial\varphi} = \frac{1-(2+\alpha)\sin^2\varphi+(1+2\alpha)e^2\sin^4\varphi-\alpha e^2\sin^6\varphi}{(1+\alpha\sin^2\varphi)^2(1-e^2\sin^2\varphi)+\beta\sin^2\varphi(1-\sin^2\varphi)}\,\frac{1}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}},$$

und hieraus, da $x=0$ für $\varphi=0$ (§. 65):

$$\int_0^\varphi \frac{1-(2+\alpha)\sin^2\varphi+(1+2\alpha)e^2\sin^4\varphi-\alpha e^2\sin^6\varphi}{(1+\alpha\sin^2\varphi)^2(1-e^2\sin^2\varphi)+\beta\sin^2\varphi(1-\sin^2\varphi)}\frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}=\int_0^x\frac{\partial x}{1+\beta x^2}, \tag{e}$$

wo das letzte Integral in allen Fällen leicht bestimmt werden kann, und x und φ durch die Gleichung (d) verbunden sind.

Wir wollen nun α, β, nebst der weitern Unbekannten γ so zu bestimmen suchen, dass identisch

$$(1+\alpha\sin^2\varphi)^2(1-e^2\sin^2\varphi)+\beta\sin^2\varphi(1-\sin^2\varphi)=(1+a\sin^2\varphi)(1+a'\sin^2\varphi)(1+\gamma\sin^2\varphi),$$

wo wir a und a' als bekannt (d. h. beliebig gewählt) ansehen. Hieraus folgt, indem man die Koeffizienten derselben Potenzen von $\sin^2\varphi$ gleich setzt:

$$aa'\gamma=-\alpha^2e^2,\ (a+a')\gamma+aa'=-\beta+\alpha^2-2\alpha e^2,$$
$$a+a'+\gamma=2\alpha-e^2+\beta.$$

Hieraus dann: $\gamma=-\frac{\alpha^2e^2}{aa'}$, $\beta=\alpha^2-2e^2\alpha-aa'+\alpha^2e^2\frac{(a+a')}{aa'}$, und wenn man diese Werthe in die dritte Gleichung einsetzt:

$$\alpha^2[aa'+(a+a')e^2+e^2]+2\alpha(1-e^2)aa'=aa'(a+a'+e^2+aa'),$$

woraus $$\alpha=\frac{-aa'(1-e^2)\pm\sqrt{aa'(1+a)(1+a')(a+e^2)(a'+e^2)}}{aa'+(a+a')e^2+e^2}$$

und dann $$\gamma=-\frac{e^2}{aa'}\alpha^2,\ \beta=a+a'+\gamma+e^2-2\alpha, \tag{f}$$

aus welchen Gleichungen zwei Werthe von α, und also auch von β und γ hervorgehen. Man setze nun

$$\frac{1-(2+\alpha)\sin^2\varphi+(1+2\alpha)e^2\sin^4\varphi-\alpha e^2\sin^6\varphi}{(1+\alpha\sin^2\varphi)^2(1-e^2\sin^2\varphi)+\beta\sin^2\varphi(1-\sin^2\varphi)}=\frac{1}{\alpha}+\frac{A}{1+a\sin^2\varphi}+\frac{B}{1+a'\sin^2\varphi}+\frac{C}{1+\gamma\sin^2\varphi},$$

so erhält man zur Bestimmung von A, B, C:

$$1+\alpha(A+B+C)=\alpha,\ a+a'+\gamma+A\alpha(a'+\gamma)+B\alpha(a+\gamma)+C\alpha(a+a')=-(2+\alpha)\alpha,$$
$$a\gamma+a'\gamma+aa'+A\alpha a'\gamma+B a\alpha\gamma+C\alpha aa'=(1+2\alpha)\alpha e^2,\ aa'\gamma=-\alpha^2e^2,$$

von welchen Gleichungen die letzte wegen (f) von selbst erfüllt ist; die andern aber sind:

$$A+B+C=\frac{\alpha-1}{\alpha},\ A(a'+\gamma)+B(a+\gamma)+C(a+a')=-\frac{2\alpha+\alpha^2+a+a'+\gamma}{\alpha},$$
$$Aa'\gamma+Ba\gamma+Caa'=\frac{(1+2\alpha)\alpha e^2-(aa'+a\gamma+a'\gamma)}{\alpha}, \tag{g}$$

woraus leicht A, B, C folgen. Setzt man nun endlich in (e) ein, so erhält man (§. 99):

$$\frac{1}{\alpha}F(\varphi,e)+A\Pi(\varphi,a,e)+B\Pi(\varphi,a',e)+C\Pi(\varphi,\gamma,e)=\int_0^x\frac{\partial x}{1+\beta x^2}, \tag{e'}$$

in welch wichtiger Formel die Grössen α, β, γ durch (f); A, B, C durch (g), und x durch (d) gegeben sind. Da die Konstanten alle doppelwerthig sind, so umfasst diese Formel eigentlich zwei.

Man setze nun in der Formel (e'):

$$a=r(\cos\varepsilon+i\sin\varepsilon),\ a'=r(\cos\varepsilon-i\sin\varepsilon),$$

so folgt daraus:

$$aa'=r^2,\ (1+a)(1+a')=1+2r\cos\varepsilon+r^2,\ (a+e^2)(a'+e^2)=e^4+2re^2\cos\varepsilon+r^2,$$
$$a+a'=2r\cos\varepsilon,$$

so dass in (f):

$$\alpha = \frac{-r^2(1-e^2) \pm r\sqrt{(1+2r\cos\varepsilon+r^2)(e^4+2re^2\cos\varepsilon+r^2)}}{r^2+2re^2\cos\varepsilon+e^2}, \quad \gamma = -\frac{e^2\alpha^2}{r^2},$$

$$\beta = 2r\cos\varepsilon + e^2 - 2\alpha - \frac{e^2\alpha^2}{r^2}.$$

Beachtet man ferner die Formeln (a) und (b), so ist

$$A\Pi(\varphi, a, e) + B\Pi(\varphi, a', e) = A(K-Li) + B(K+Li) = (A+B)K + (B-A)iL,$$

wo aber $(B-A)i = \frac{B r\sin\varepsilon - A r\sin\varepsilon}{r\sin\varepsilon} i = \frac{Ba+Aa'}{r\sin\varepsilon} - \frac{B+A}{r\sin\varepsilon} r\cos\varepsilon$, so dass also

$$A\Pi(\varphi, a, e) + B\Pi(\varphi, a', e) = (A+B)K + \frac{Ba+Aa'}{r\sin\varepsilon}L - \frac{A+B}{r\sin\varepsilon} r\cos\varepsilon \,.\, L$$

$$= (A+B)\int_0^\varphi \frac{(1+r\cos\varepsilon\sin^2\varphi)\,\partial\varphi}{[1+2r\cos\varepsilon\sin^2\varphi+r^2\sin^4\varphi]\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}$$

$$+ (Aa'+Ba)\int_0^\varphi \frac{\sin^2\varphi\,\partial\varphi}{(1+2r\cos\varepsilon\sin^2\varphi+r^2\sin^4\varphi]\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}$$

$$- (A+B)\int_0^\varphi \frac{r\cos\varepsilon\sin^2\varphi\,\partial\varphi}{[1+2r\cos\varepsilon\sin^2\varphi+r^2\sin^4\varphi]\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}},$$

wo nun das letzte Integral vom ersten sich abziehen lässt.

Setzt man zur Abkürzung $A+B=f$, $Aa'+Ba=g$, so erhält man, unter Berücksichtigung der beiden Werthe von α die folgenden zwei Sätze:

$$\frac{1}{\alpha}F(\varphi, e) + \int_0^\varphi \frac{(f+g\sin^2\varphi)\,\partial\varphi}{[1+2r\cos\varepsilon\sin^2\varphi+r^2\sin^4\varphi]\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}} + C\Pi(\varphi, \gamma, e)$$

$$= \int_0^x \frac{\partial x}{1+\beta x^2}, \qquad \text{(E)}$$

wo nun

$$\alpha = \frac{-r^2(1-e^2)+r\sqrt{(1+2r\cos\varepsilon+r^2)(e^4+2re^2\cos\varepsilon+r^2)}}{r^2+2re^2\cos\varepsilon+e^2}, \quad \gamma = -\frac{e^2\alpha^2}{r^2},$$

$$\beta = 2r\cos\varepsilon + e^2 - 2\alpha - \frac{\alpha^2 e^2}{r^2},$$

und f, g, C aus den Gleichungen:

$$f + C = \frac{\alpha-1}{\alpha}, \quad g + f\gamma + 2r\cos\varepsilon C = -\frac{2\alpha+\alpha^2+2r\cos\varepsilon+\gamma}{\alpha},$$

$$g\gamma + r^2 C = \frac{(1+2\alpha)\alpha e^2 - (r^2+2r\gamma\cos\varepsilon)}{\alpha}$$

zu bestimmen sind, und $x = \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{(1+\alpha\sin^2\varphi)\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}$ ist.

Eben so:

$$\frac{1}{\alpha'}F(\varphi, e) + \int_0^\varphi \frac{(f'+g'\sin^2\varphi)\,\partial\varphi}{[1+2r\cos\varepsilon\sin^2\varphi+r^2\sin^4\varphi]\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}} + C'\Pi(\varphi, \gamma', e)$$

$$= \int_0^z \frac{\partial z}{1+\beta' z^2}, \qquad \text{(E')}$$

wo $$\alpha' = \frac{-r^2(1-e^2) - r\sqrt{(1+2r\cos\varepsilon+r^2)(e^4+2re^2\cos\varepsilon+r^2)}}{r^2+2re^2\cos\varepsilon+e^2}, \quad \gamma' = -\frac{e^2\alpha'^2}{r^2},$$

$$\beta' = 2r\cos\varepsilon + e^2 - 2\alpha' - \frac{\alpha'^2 e^2}{r^2},$$

$$f' + C' = \frac{\alpha'-1}{\alpha'}, \quad g' + f'\gamma' + 2r\cos\varepsilon C' = -\frac{2\alpha' + \alpha'^2 + 2r\cos\varepsilon + \gamma'}{\alpha'},$$

$$g'\gamma' + r^2 C' = \frac{(1+2\alpha')e^2\alpha' - (r^2+2r\gamma'\cos\varepsilon)}{\alpha'},$$

$$z = \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{(1+\alpha'\sin^2\varphi)\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}.$$

Die Formeln (E) und (F′) geben die zwei Integrale

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^\varphi \frac{(f+g\sin^2\varphi)\,\partial\varphi}{[1+2r\cos\varepsilon\sin^2\varphi+r^2\sin^4\varphi]\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}, \\ &\int_0^\varphi \frac{(f'+g'\sin^2\varphi)\,\partial\varphi}{[1+2r\cos\varepsilon\sin^2\varphi+r^2\sin^4\varphi]\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}, \end{aligned}\right\} \text{(h)}$$

jedenfalls ganz unzweideutig. Will man dann das Integral (c) erhalten, so setze man

$$M + N\sin^2\varphi = m(f+g\sin^2\varphi) + n(f'+g'\sin^2\varphi),$$

d. h. bestimme m und n so, dass

$$mf + nf' = M, \quad mg + ng' = N,$$

was immer möglich ist, und es ist das Integral (c) auf die beiden (h) zurückgeführt, also auch die Integrale (b), d. h. (a).

Damit ist nun unsere Aufgabe vollständig erledigt. Ein jedes Integral von der Form (a) in §. 102 kann somit auf elliptische Integrale reduzirt werden.

Anm. Man sieht leicht, dass man hier auch einen etwas andern Weg hätte einschlagen können. Bildet man nämlich wieder die Gleichung (e′) und ersetzt a und a′ in der gleich darauf angegebenen Weise, wodurch α, β, γ reell werden, so erhält man, wenn A, B, C aus (g) für die zwei Werthe von α bestimmt werden, aus (e′) zwei Gleichungen, in denen die Grössen $\Pi[\varphi, r(\cos\varepsilon + i\sin\varepsilon), e]$, $\Pi[\varphi, r(\cos\varepsilon - i\sin\varepsilon), e]$ vorkommen, während $F(\varphi, e)$, $\Pi(\varphi, \gamma, e)$ reell sind. Aus diesen zwei Gleichungen lassen sich aber die genannten zwei Grössen bestimmen, wodurch die Werthe von K und L in (a) unmittelbar erhalten werden.

§. 104.

Zwischen den elliptischen Integralen der drei Arten bestehen Beziehungen, die wir schliesslich, ehe wir zu Anwendungen übergehen, noch ableiten wollen.

Zunächst aber wollen wir bemerken, dass man ganz in derselben Weise wie in §. 102 folgende Reduktionsformel beweisen kann:

$$\begin{aligned} \frac{\sin\varphi\cos\varphi\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}{(a+\sin^2\varphi)^{n-1}} &= (2n-2)[a+a^2(1+e^2)+a^3e^2]\int\frac{\partial\varphi}{(a+\sin^2\varphi)^n\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}} \\ &- (2n-3)[1+2a(1+e^2)+3a^2e^2]\int\frac{\partial\varphi}{(a+\sin^2\varphi)^{n-1}\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}} \\ &+ 2(n-2)(3ae^2+1+e^2)\int\frac{\partial\varphi}{(a+\sin^2\varphi)^{n-2}\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}} \end{aligned}$$

$$-(2n-5)e^2\int\frac{\partial\varphi}{(a+\sin^2\varphi)^{n-3}\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}. \qquad (a)$$

Setzt man hier $n=2$, $\frac{1}{a}$ für a und dividirt beiderseitig durch a, so erhält man:

$$\frac{\sin\varphi\cos\varphi\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}{1+a\sin^2\varphi}=2\left[\frac{a^2+a(1+e^2)+e^2}{a^2}\right]\int\frac{\partial\varphi}{(1+a\sin^2\varphi)^2\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}$$
$$-\left[\frac{a^2+2a(1+e^2)+3e^2}{a^2}\right]\int\frac{\partial\varphi}{(1+a\sin^2\varphi)\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}+\frac{e^2}{a^2}\int\frac{(1+a\sin^2\varphi)\partial\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}. \qquad (a')$$

Aus dieser Formel folgt nun, da die erste Seite Null ist für $\varphi=0$, dass man die Integrale als bestimmte innerhalb der Gränzen Null und φ ansehen kann, wodurch etwa für $a=-e^2\sin^2\alpha$:

$$\frac{\sin\varphi\cos\varphi\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}{1-e^2\sin^2\alpha\sin^2\varphi}=2\frac{\cos^2\alpha(1-e^2\sin^2\alpha)}{e^2\sin^4\alpha}\int_0^\varphi\frac{\partial\varphi}{(1-e^2\sin^2\alpha\sin^2\varphi)^2\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}$$
$$-\frac{(1+\cos^2\alpha)(1-e^2\sin^2\alpha)+\cos^2\alpha}{e^2\sin^4\alpha}\int_0^\varphi\frac{\partial\varphi}{(1-e^2\sin^2\alpha\sin^2\varphi)\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}$$
$$+\frac{1}{e^2\sin^4\alpha}\int\frac{1-e^2\sin^2\alpha\sin^2\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}\partial\varphi,$$

d. h. (§. 99, 100):

$$\frac{\sin\varphi\cos\varphi\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}{1-e^2\sin^2\alpha\sin^2\varphi}=\frac{2\cos^2\alpha(1-e^2\sin^2\alpha)}{e^2\sin^4\alpha}\int_0^\varphi\frac{\partial\varphi}{(1-e^2\sin^2\alpha\sin^2\varphi)^2\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}$$
$$-\frac{(1+\cos^2\alpha)(1-e^2\sin^2\alpha)+\cos^2\alpha}{e^2\sin^4\alpha}\Pi(\varphi,-e^2\sin^2\alpha,e)$$
$$+\frac{1}{e^2\sin^4\alpha}[F(\varphi,e)-\sin^2\alpha F(\varphi,e)+\sin^2\alpha E(\varphi,e)],$$

woraus

$$\int_0^\varphi\frac{\partial\varphi}{(1-e^2\sin^2\alpha\sin^2\varphi)^2\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}=\frac{e^2\sin^4\alpha\sin\varphi\cos\varphi\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}{2\cos^2\alpha(1-e^2\sin^2\alpha\sin^2\varphi)(1-e^2\sin^2\alpha)}$$
$$+\frac{(1+\cos^2\alpha)(1-e^2\sin^2\alpha)+\cos^2\alpha}{2\cos^2\alpha(1-e^2\sin^2\alpha)}\Pi(\varphi,-e^2\sin^2\alpha,e)-\frac{1}{2}\frac{F(\varphi,e)}{1-e^2\sin^2\alpha}$$
$$-\frac{1}{2}\frac{tg^2\alpha}{1-e^2\sin^2\alpha}E(\varphi,e).$$

Ferner ist

$$\int_0^\varphi\frac{\sin^2\varphi\,\partial\varphi}{(1-e^2\sin^2\alpha\sin^2\varphi)^2\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}=-\frac{1}{e^2\sin^2\alpha}\int_0^\varphi\frac{(1-e^2\sin^2\alpha\sin^2\varphi)\partial\varphi}{[1-e^2\sin^2\alpha\sin^2\varphi]^2\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}$$
$$+\frac{1}{e^2\sin^2\alpha}\int_0^\varphi\frac{\partial\varphi}{[1-e^2\sin^2\alpha\sin^2\varphi]^2\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}=-\frac{1}{e^2\sin^2\alpha}\Pi(\varphi,-e^2\sin^2\alpha,e)$$
$$+\frac{1}{e^2\sin^2\alpha}\int_0^\varphi\frac{\partial\varphi}{[1-e^2\sin^2\alpha\sin^2\varphi]^2\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}},$$

also, wenn man obigen Werth einsetzt:

$$\int_0^\varphi \frac{\sin^2\varphi\,\partial\varphi}{(1-e^2\sin^2\alpha\sin^2\varphi)^2\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}} = \frac{\sin^2\alpha\sin\varphi\cos\varphi\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}{2\cos^2\alpha(1-e^2\sin^2\alpha\sin^2\varphi)(1-e^2\sin^2\alpha)}$$

$$+\frac{1-e^2\sin^2\alpha+e^2\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{2e^2\sin^2\alpha\cos^2\alpha(1-e^2\sin^2\alpha)}\Pi(\varphi,-e^2\sin^2\alpha,e)-\frac{F(\varphi,e)+tg^2\alpha\,E(\varphi,e)}{2e^2\sin^2\alpha(1-e^2\sin^2\alpha)}.$$

Ferner

$$\int_0^\varphi \frac{e^2\sin^2\alpha\sin^2\varphi\,\partial\varphi}{(1-e^2\sin^2\alpha\sin^2\varphi)\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}} = -\int_0^\varphi \frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}$$

$$+\int_0^\varphi \frac{\partial\varphi}{(1-e^2\sin^2\alpha\sin^2\varphi)\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}} = -F(\varphi,e)+\Pi(\varphi,-e^2\sin^2\alpha,e),$$

woraus nun folgt

$$2e^2\cos^2\alpha\sqrt{1-e^2\sin^2\alpha}\int_0^\varphi \frac{\sin^2\varphi\,\partial\varphi}{[1-e^2\sin^2\alpha\sin^2\varphi]^2\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}$$

$$-\frac{1-e^2\sin^2\alpha+e^2\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha\sqrt{1-e^2\sin^2\alpha}}[\Pi(\varphi,-e^2\sin^2\alpha,e)-F(\varphi,e)]$$

$$=\frac{e^2\sin^2\alpha\sin\varphi\cos\varphi\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}{(1-e^2\sin^2\alpha\sin^2\varphi)\sqrt{1-e^2\sin^2\alpha}}+\sqrt{1-e^2\sin^2\alpha}\,F(\varphi,e)-\frac{E(\varphi,e)}{\sqrt{1-e^2\sin^2\alpha}},$$

d. h., wie leicht ersichtlich:

$$-\left(\frac{\sqrt{1-e^2\sin^2\alpha}}{\sin^2\alpha}+\frac{e^2\cos^2\alpha}{\sqrt{1-e^2\sin^2\alpha}}\right)[\Pi(\varphi,-e^2\sin^2\alpha,e)-F(\varphi,e)]$$

$$+\cotg\alpha\sqrt{1-e^2\sin^2\alpha}\,\frac{\partial}{\partial\alpha}\int_0^\varphi \frac{\partial\varphi}{[1-e^2\sin^2\alpha\sin^2\varphi]\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}$$

$$=\cotg\varphi\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}\left[\frac{1}{(1-e^2\sin^2\alpha\sin^2\varphi)\sqrt{1-e^2\sin^2\alpha}}-\frac{1}{\sqrt{1-e^2\sin^2\alpha}}\right]$$

$$+\sqrt{1-e^2\sin^2\alpha}\,F(\varphi,e)-\frac{E(\varphi,e)}{\sqrt{1-e^2\sin^2\alpha}}.$$

Die erste Seite ist aber =

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\cotg\alpha\sqrt{1-e^2\sin^2\alpha}\left\{\Pi(\varphi,-e^2\sin^2\alpha,e)-F(\varphi,e)\right\}\right],$$

so dass, wenn man nach α integrirt:

$$\cotg\alpha\sqrt{1-e^2\sin^2\alpha}\,[\Pi(\varphi,-e^2\sin^2\alpha,e)-F(\varphi,e)]$$

$$=\cotg\varphi\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}\left[\int\frac{\partial\alpha}{(1-e^2\sin^2\varphi\sin^2\alpha)\sqrt{1-e^2\sin^2\alpha}}-\int\frac{\partial\alpha}{\sqrt{1-e^2\sin^2\alpha}}\right]$$

$$+F(\varphi,e)\int\sqrt{1-e^2\sin^2\alpha}\,\partial\alpha-E(\varphi,e)\int\frac{\partial\alpha}{\sqrt{1-e^2\sin^2\alpha}}+C,$$

wo C von α unabhängig ist. Nun ist aber die erste Seite Null für $\alpha=0$, indem

$$\frac{1}{\sin\alpha}[\Pi(\varphi,-e^2\sin^2\alpha,e)-F(\varphi,e)]=e^2\sin\alpha\int_0^\varphi\frac{\sin^2\varphi\,\partial\varphi}{(1-e^2\sin^2\alpha\sin^2\varphi)\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}$$

ist, so dass wenn man die Integrale als bestimmte zwischen den Gränzen 0 und α nimmt (wo α bis $\frac{\pi}{2}$ gehen kann):

$$\cotg\alpha\sqrt{1-e^2\sin^2\alpha}\,[\Pi(\varphi,-e^2\sin^2\alpha,e)-F(\varphi,e)]=\cotg\varphi\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}\,[\Pi(\alpha,-e^2\sin^2\varphi,e)$$
$$-F(\alpha,e)]+F(\varphi,e)E(\alpha,e)-E(\varphi,e)F(\alpha,e). \qquad \text{(b)}$$

Diese interessante Formel lehrt die Grössen $\Pi(\varphi, -e^2\sin^2\alpha, e)$, $\Pi(\alpha, -e^2\sin^2\varphi, e)$ durch einander auszudrücken, und kann namentlich bei Berechnung der Integrale dritter Art von grossem Nutzen seyn.

Aus der Formel (a′) folgt für $a=-(\cos^2\alpha+e^2\sin^2\alpha)=-k$:

$$\int_0^\varphi\frac{\partial\varphi}{[1-k\sin^2\varphi]^2\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}=-\frac{k^2\sin\varphi\cos\varphi\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}{2(1-e^2)^2\sin^2\alpha\cos^2\alpha(1-k\sin^2\varphi)}$$
$$+\frac{(1-e^2)^2\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^2\alpha+e^4\sin^2\alpha-e^2}{2(1-e^2)\sin^2\alpha\cos^2\alpha}\Pi(\varphi,-k,e)$$
$$+\frac{e^2}{2(1-e^2)^2\sin^2\alpha\cos^2\alpha}\left[F(\varphi,e)-\frac{k}{e^2}F(\varphi,e)+\frac{k}{e^2}E(\varphi,e)\right].$$

Da aber

$$\int_0^\varphi\frac{\sin^2\varphi\,\partial\varphi}{(1-k\sin^2\varphi)^2\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}=-\frac{1}{k}\int_0^\varphi\frac{\partial\varphi}{(1-k\sin^2\varphi)\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}$$
$$+\frac{1}{k}\int_0^\varphi\frac{\partial\varphi}{(1-k\sin^2\varphi)^2\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}},$$

so ergibt sich:

$$\frac{2(1-e^2)^2\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{\sqrt{k}}\int_0^\varphi\frac{\sin^2\varphi\,\partial\varphi}{(1-k\sin^2\varphi)^2\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}=-\frac{F(\varphi,e)-E(\varphi,e)}{\sqrt{k}}$$
$$-\frac{\sqrt{k}.\sin\varphi\cos\varphi\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}{1-k\sin^2\varphi}-\frac{(1-e^2)(e^2\sin^4\alpha-\cos^4\alpha)}{k\sqrt{k}}[\Pi(\varphi,-k,e)-F(\varphi,e)]$$
$$+F(\varphi,e)\sqrt{k},$$

d. h.
$$\frac{(1-e^2)(\cos^4\alpha-e^2\sin^4\alpha)}{(\cos^2\alpha+e^2\sin^2\alpha)^{\frac{3}{2}}}[\Pi(\varphi,-k,e)-F(\varphi,e)]$$
$$-\frac{2(1-e^2)^2\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{[\cos^2\alpha+e^2\sin\alpha]^{\frac{1}{2}}}\int_0^\varphi\frac{\sin^2\varphi\,\partial\varphi}{(1-k\sin^2\varphi)^2\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}$$
$$=\frac{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}{\sin\varphi\cos\varphi}\left[\frac{1}{[1+(1-e^2)\operatorname{tg}^2\varphi\sin^2\alpha]\sqrt{1-(1-e^2)\sin^2\alpha}}-\frac{\cos^2\varphi}{\sqrt{1-(1-e^2)\sin^2\alpha}}\right]$$
$$+\frac{F(\varphi,e)-E(\varphi,e)}{\sqrt{1-(1-e^2)\sin^2\alpha}}-F(\varphi,e)\sqrt{1-(1-e^2)\sin^2\alpha},$$

oder
$$(1-e^2)\frac{\partial\cdot}{\partial\alpha}\left\{\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sqrt{\cos^2\alpha+e^2\sin^2\alpha}}\Big[\Pi(\varphi,-k,e)-F(\varphi,e)\Big]\right\}=\text{wie so eben,}$$

so dass, wenn man nach α (zwischen 0 und α) integrirt (also alle Grössen von $\alpha=0$ an endlich voraussetzt):

$$\frac{(1-e^2)\sin\alpha\cos\alpha}{\sqrt{k}}[\Pi(\varphi,-k,e)-F(\varphi,e)]=\frac{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}{\sin\varphi\cos\varphi}[\Pi(\alpha,(1-e^2)\operatorname{tg}^2\varphi,\sqrt{1-e^2})$$
$$-\cos^2\varphi F(\alpha,\sqrt{1-e^2})]+[F(\varphi,e)-E(\varphi,e)]F(\alpha,\sqrt{1-e^2})-F(\varphi,e)E(\alpha,\sqrt{1-e^2}), \qquad \text{(b′)}$$

wo $k = \cos^2\alpha + e^2\sin^2\alpha = 1 - (1-e^2)\sin^2\alpha$ ist. Für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ist diese Gleichung nicht anwendbar, da für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ und $\alpha = 0$ die erste Seite, so wie die zweite unter unbestimmten Formen erscheinen.

In der Formel (b) kann φ auch $\frac{\pi}{2}$ seyn, da von $\varphi = 0$ bis $\varphi = \frac{\pi}{2}$ und $\alpha = 0$ bis $\alpha = \frac{\pi}{2}$ die beiden Seiten bestimmte Werthe haben. Setzt man also $\varphi = \frac{\pi}{2}$, so erhält man:

$$\operatorname{cotg}\alpha\sqrt{1-e^2\sin^2\alpha}\left[\Pi\left(\frac{\pi}{2}, -e^2\sin^2\alpha, e\right) - F\left(\frac{\pi}{2}, e\right)\right]$$
$$= F\left(\frac{\pi}{2}, e\right) E(\alpha, e) - E\left(\frac{\pi}{2}, e\right) F(\alpha, e), \qquad \text{(c)}$$

welche Gleichung dann für $\alpha = \frac{\pi}{2}$ eine identische wird. Diese Gleichung drückt $\Pi\left(\frac{\pi}{2}, -e^2\sin^2\alpha, e\right)$ durch elliptische Integrale der zwei ersten Arten aus.

In der Formel (b′) kann man nicht kurzweg $\varphi = \frac{\pi}{2}$ setzen. Allein man hat sicher

$$(1-e^2)\frac{\partial}{\partial\alpha}\left\{\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sqrt{\cos^2\alpha + e^2\sin^2\alpha}}\left[\Pi\left(\frac{\pi}{2}, -k, e\right) - F\left(\frac{\pi}{2}, e\right)\right]\right\}$$
$$= \frac{F\left(\frac{\pi}{2}, e\right) - E\left(\frac{\pi}{2}, e\right)}{\sqrt{1-(1-e^2)\sin^2\alpha}} - F\left(\frac{\pi}{2}, e\right)\sqrt{1-(1-e^2)\sin^2\alpha},$$

also
$$(1-e^2)\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sqrt{\cos^2\alpha + e^2\sin^2\alpha}}\left[\Pi\left(\frac{\pi}{2}, -k, e\right) - F\left(\frac{\pi}{2}, e\right)\right]$$
$$= \left[F\left(\frac{\pi}{2}, e\right) - E\left(\frac{\pi}{2}, e\right)\right]\int\frac{\partial\alpha}{\sqrt{1-(1-e^2)\sin^2\alpha}} - F\left(\frac{\pi}{2}, e\right)\int\sqrt{1-(1-e^2)\sin^2\alpha}\,\partial\alpha$$
$$+ C,$$

wo C von α unabhängig ist. Setzt man hier $\alpha = \frac{\pi}{2}$, so ist $k = e^2$, also sicher die erste Seite Null, so dass

$$(1-e^2)\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sqrt{\cos^2\alpha + e^2\sin^2\alpha}}\left[\Pi\left(\frac{\pi}{2}, -k, e\right) - F\left(\frac{\pi}{2}, e\right)\right] = \left[F\left(\frac{\pi}{2}, e\right)\right.$$
$$\left. - E\left(\frac{\pi}{2}, e\right)\right]\int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha}\frac{\partial\alpha}{\sqrt{1-(1-e^2)\sin^2\alpha}} - F\left(\frac{\pi}{2}, e\right)\int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha}\sqrt{1-(1-e^2)\sin^2\alpha}\,\partial\alpha,$$

d. h. da

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha}\frac{\partial\alpha}{\sqrt{1-(1-e^2)\sin^2\alpha}} = -\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\partial\alpha}{\sqrt{1-(1-e^2)\sin^2\alpha}} + \int_0^{\alpha}\frac{\partial\alpha}{\sqrt{1-(1-e^2)\sin^2\alpha}}$$
$$= -F\left(\frac{\pi}{2}, \sqrt{1-e^2}\right) + F\left(\alpha, \sqrt{1-e^2}\right),$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha}\sqrt{1-(1-e^2)\sin^2\alpha}\,\partial\alpha = -E\left(\frac{\pi}{2}, \sqrt{1-e^2}\right) + E\left(\alpha, \sqrt{1-e^2}\right),$$

es ist, wenn man diese Werthe oben einsetzt:

$$(1-e^2)\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sqrt{\cos^2\alpha+e^2\sin^2\alpha}}\left[\Pi\left(\frac{\pi}{2},-k,e\right)-F\left(\frac{\pi}{2},e\right)\right]$$
$$=E\left(\frac{\pi}{2},e\right)\left[F\left(\frac{\pi}{2},\sqrt{1-e^2}\right)-F(\alpha,\sqrt{1-e^2})\right]$$
$$+F\left(\frac{\pi}{2},e\right)\left[E\left(\frac{\pi}{2},\sqrt{1-e^2}\right)-E(\alpha,\sqrt{1-e^2})+F(\alpha,\sqrt{1-e^2})\right.$$
$$\left.-F\left(\frac{\pi}{2},\sqrt{1-e^2}\right)\right]. \qquad (c')$$

Für $e_1=\sqrt{1-e^2}$ ist nun

$$E\left(\frac{\pi}{2},e\right)F\left(\frac{\pi}{2},e_1\right)+F\left(\frac{\pi}{2},e\right)E\left(\frac{\pi}{2},e_1\right)-F\left(\frac{\pi}{2},e\right)F\left(\frac{\pi}{2},e_1\right)$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-e_1^2\sin^2\varphi}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-e^2\sin^2\psi}\,\partial\psi+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\partial\psi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\psi}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-e_1^2\sin^2\varphi}\,\partial\varphi$$
$$-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\partial\psi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\psi}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-e_1^2\sin^2\varphi}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-e_1^2\sin^2\varphi}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-e^2\sin^2\psi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\psi}}\partial\psi$$
$$+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\partial\psi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\psi}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-e_1^2\sin^2\varphi}{\sqrt{1-e_1^2\sin^2\varphi}}\partial\varphi-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\partial\psi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\psi}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-e_1^2\sin^2\varphi}}$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-e^2\sin^2\psi-e_1^2\sin^2\varphi}{\sqrt{1-e_1^2\sin^2\varphi}\sqrt{1-e^2\sin^2\psi}}\partial\varphi\,\partial\psi$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{e_1^2\cos^2\varphi+e^2\cos^2\psi}{\sqrt{[e^2\cos^2\psi+e_1^2\cos^2\varphi+e^2e_1^2\sin^2\varphi\sin^2\psi]}}\partial\varphi\,\partial\psi.$$

Diese Grösse ist eine Funktion von e, die wir mit f(e) bezeichnen wollen, so dass

$$f(e)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}\,\partial\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-e_1^2\sin^2\varphi}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}$$
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-e_1^2\sin^2\varphi}\,\partial\varphi-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-e_1^2\sin^2\varphi}}.$$

Differenzirt man hier nach e, gemäss §. 61 und beachtet, dass (§. 100),

$$\frac{\partial}{\partial e}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}\,\partial\varphi=-e\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2\varphi\,\partial\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}=-\frac{1}{e}F\left(\frac{\pi}{2},e\right)+\frac{1}{e}E\left(\frac{\pi}{2},e\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial e}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}=e\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2\varphi\,\partial\varphi}{(1-e^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{e}{e^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}\right.$$
$$\left.-\frac{1}{(1-e^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}}\right]\partial\varphi=-\frac{1}{e}F\left(\frac{\pi}{2},e\right)+\frac{1}{e(1-e^2)}E\left(\frac{\pi}{2},e\right),$$

so ergibt sich $\left(\text{wegen } \frac{\partial e_1}{\partial e} = -\frac{e}{e_1}\right)$:

$$f'(e) = \frac{1}{e} F\left(\frac{\pi}{2}, e_1\right)\left[E\left(\frac{\pi}{2}, e\right) - F\left(\frac{\pi}{2}, e\right)\right] - \frac{e}{e_1^2} E\left(\frac{\pi}{2}, e\right)\left[\frac{1}{1-e_1^2} E\left(\frac{\pi}{2}, e_1\right)\right.$$
$$\left. - F\left(\frac{\pi}{2}, e_1\right)\right] + \frac{1}{e} E\left(\frac{\pi}{2}, e_1\right)\left[\frac{1}{1-e^2} E\left(\frac{\pi}{2}, e\right) - F\left(\frac{\pi}{2}, e\right)\right]$$
$$- \frac{e}{e_1^2} F\left(\frac{\pi}{2}, e\right)\left[E\left(\frac{\pi}{2}, e_1\right) - F\left(\frac{\pi}{2}, e_1\right)\right] + \frac{e}{e_1^2} F\left(\frac{\pi}{2}, e\right)\left[\frac{1}{1-e_1^2} E\left(\frac{\pi}{2}, e_1\right)\right.$$
$$\left. - F\left(\frac{\pi}{2}, e_1\right)\right] - \frac{1}{e} F\left(\frac{\pi}{2}, e_1\right)\left[\frac{1}{1-e^2} E\left(\frac{\pi}{2}, e\right) - F\left(\frac{\pi}{2}, e\right)\right],$$

d. h. wie man leicht findet $f'(e) = 0$, so dass $f(e)$ von e unabhängig ist. Für $e = 0$ ist aber $e_1 = 1$ also

$$f(0) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\varphi \, \partial\varphi \, \partial\psi}{\cos\varphi} = \frac{\pi}{2}, \text{ so dass } f(e) = \frac{\pi}{2},$$

d. h.

$$\left.\begin{aligned} &E\left(\frac{\pi}{2}, e\right) F\left(\frac{\pi}{2}, e_1\right) + F\left(\frac{\pi}{2}; e\right) E\left(\frac{\pi}{2}, e_1\right) - F\left(\frac{\pi}{2}, e\right) F\left(\frac{\pi}{2}, e_1\right) = \frac{\pi}{2}, \\ &(1-e^2)\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sqrt{k}}\left[\Pi\left(\frac{\pi}{2}, -k, e\right) - F\left(\frac{\pi}{2}, e\right)\right] = \frac{\pi}{2} - E\left(\frac{\pi}{2}, e\right) F(\alpha, e_1) \\ &\qquad + F\left(\frac{\pi}{2}, e\right)\left[F(\alpha, e_1) - E(\alpha, e_1)\right], \end{aligned}\right\} \quad (d)$$

wo $e_1 = \sqrt{1-e^2}$, $k = \cos^2\alpha + e^2\sin^2\alpha$ ist. Diese Theoreme hat, wie die meisten hieher gehörigen, Legendre gefunden.

§. 105.

I. In §. 55, II haben wir gesehen, dass $a\int_0^\varphi \sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}\,\partial\varphi$ die Länge eines elliptischen Bogens ausdrückt, wenn a, b die Halbaxen, $e^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2}$ und $\sin\varphi = \frac{x}{a}$ ist. Derselbe ist also $= aE(\varphi, e)$.

Für die Hyperbel war ebenfalls (§.55, III) $\frac{a}{e}\int_\varphi^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}{\sin^2\varphi}\,\partial\varphi$ die Länge des Bogens, wo $e^2 = \frac{a^2}{a^2+b^2}$, $\sin\varphi = \frac{a}{x}$. Nun ist aber

$$\int \frac{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}{\sin^2\varphi}\,\partial\varphi = \int \frac{1-e^2\sin^2\varphi}{\sin^2\varphi\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}\,\partial\varphi = \int \frac{\partial\varphi}{\sin^2\varphi\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}$$
$$-e^2\int\frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}} = e^2\int\frac{\sin^2\varphi\,\partial\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}} - \frac{\cos\varphi\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}{\sin\varphi} - e^2\int\frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}$$
$$(\text{§. 100, k}') = \int\frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}} - \int\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}\,\partial\varphi - e^2\int\frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}$$
$$-\frac{\cos\varphi\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}{\sin\varphi},$$

also

$$\int_\varphi^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}{\sin^2\varphi}\partial\varphi = (1-e^2)\left[F\left(\frac{\pi}{2}, e\right) - F(\varphi, e)\right] - E\left(\frac{\pi}{2}, e\right) + E(\varphi, e) + \frac{\cos\varphi\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}{\sin\varphi},$$

mithin der Hyperbelbogen:

$$\frac{a(1-e^2)}{e}\left[F\left(\frac{\pi}{2}, e\right) - F(\varphi, e)\right] - \frac{a}{e}\left[E\left(\frac{\pi}{2}, e\right) - E(\varphi, e)\right] + \frac{a\cos\varphi\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}{e\sin\varphi}.$$

Für den Lemniscatenbogen ergab §. 55, V als Bogen BM, für den BAM $=\varphi$:

$$s = a\int_0^\varphi \frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-2\sin^2\varphi}}.$$

Dieses Integral hat nun, da $2>1$, nicht die verlangte Normalform, lässt sich aber leicht auf dieselbe bringen. Man setze zu dem Ende

$$\sin\varphi = x, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{1}{\cos\varphi} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

so ist

$$\int \frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-2\sin^2\varphi}} = \int \frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^2)(1-2x^2)}},$$

verglichen mit §. 101, I sind die vier Wurzeln von $(1-x^2)(1-2x^2)=0$: $1, -1, \sqrt{\frac{1}{2}}, -\sqrt{\frac{1}{2}}$ und es liegt x hier immer zwischen $-\sqrt{\frac{1}{2}}$ und $+\sqrt{\frac{1}{2}}$ (φ zwischen -45^0 und $+45^0$). Also ist in §. 101, I, 3:

$$a=-1, \; b=-\sqrt{\tfrac{1}{2}}, \; c=\sqrt{\tfrac{1}{2}}, \; d=1, \; \frac{\sqrt{\frac{1}{2}}-x}{x+\sqrt{\frac{1}{2}}} = \alpha\frac{1-z}{1+z}, \; \alpha=1, \; e=\sqrt{\tfrac{1}{2}}, \; E=+2,$$

$$z = x\sqrt{2} = \sqrt{2}\sin\varphi,$$

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^2)(1-2x^2)}} = \sqrt{\tfrac{1}{2}}\int \frac{\partial z}{\sqrt{(1-z^2)(1-e^2z^2)}}, \quad e^2=\tfrac{1}{2}.$$

Man setze hier $z=\sin\alpha$, so ist dieses Integral $=\sqrt{\frac{1}{2}}\int \frac{\partial\alpha}{\sqrt{1-e^2\sin^2\alpha}}$ und gehört direkt zu den elliptischen Integralen. Man schliesst daraus, dass wenn (§. 55, V): $\cos 2\omega = \frac{r^2}{a^2}$, $\sin\alpha = \sqrt{2}.\sin\omega$, der dortige Bogen MB $= \frac{a}{\sqrt{2}}F(\alpha, \sqrt{\frac{1}{2}})$ sey.

Aehnliche Beispiele lassen sich in Menge angeben. Ich habe solche in Grunerts Archiv, IX, S. 438, X, S. 90, XI, S. 88 u. s. w. angegeben.

II. Man soll die Oberfläche des schiefen Kreiskegels bestimmen.

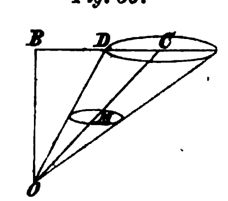


Fig. 56.

Es stelle OC einen schiefen Kreiskegel vor (Fig. 56), dessen Halbmesser CD $=r$, dessen Höhe OB $=h$, wenn OB senkrecht steht auf der Grundfläche. Ferner sey CB $=a$, und man nehme die Spitze O zum Anfangspunkt rechtwinkliche Koordinaten, OB zur Axe der x, eine Parallele mit BC, durch O, zur Axe der y, und sey M ein Punkt der Kegelfläche, dessen Koordinaten x, y, z sind. Durch M lege man einen Schnitt parallel mit der Grundfläche des Kegels, so ist die Entfernung desselben von der Spitze $=z$, also wenn ϱ sein Halbmesser

$$r:\varrho = h:x, \quad \varrho = \frac{rx}{h}.$$

Ferner liegt der Mittelpunkt dieses Kreises in der Ebene OCB, d. h. in der Ebene der yx, so dass seine Koordinaten sind $x, x\frac{a}{h}, 0$. Daraus folgt nun, dass, da M und der Mittelpunkt die Entfernung ϱ haben:

$$z^2+\left(y-\frac{ax}{h}\right)^2=\varrho^2,$$

$$hz=\pm\sqrt{r^2x^2-(hy-ax)^2},$$

in welcher Gleichung beide Zeichen zulässig sind. Daraus folgt

$$h\frac{\partial z}{\partial x}=\pm\frac{r^2x+a(hy-ax)}{\sqrt{r^2x^2-(hy-ax)^2}},\quad h\frac{\partial z}{\partial y}=\mp\frac{h(hy-ax)}{\sqrt{r^2x^2-(hy-ax)^2}},$$

$$1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=\frac{h^2[r^2x^2-(hy-ax)^2]+[r^2x+a(hy-ax)]^2+h^2(hy-ax)^2}{h^2[r^2x^2-(hy-ax)^2]}$$

$$=\frac{h^2r^2x^2+[r^2x+a(hy-ax)]^2}{h^2[r^2x^2-(hy-ax)^2]}=\frac{h^2r^2x^2+r^4x^2+2ar^2x(hy-ax)+a^2(hy-ax)^2}{h^2[r^2x^2-(hy-ax)^2]}$$

$$=\frac{(h^2+r^2)r^2x^2+2ar^2x(hy-ax)+a^2(hy-ax)^2}{h^2[r^2x^2-(hy-ax)^2]}.$$

Setzt man $h^2+r^2=\varrho^2$, $\frac{hy-ax}{rx}=M$, so ist dies $=$

$$\frac{\varrho^2+2arM+a^2M^2}{h^2(1-M^2)},$$

so dass (§. 38) das doppelte Integral

$$\frac{1}{h}\int\int\sqrt{\frac{\varrho^2+2arM+a^2M^2}{1-M^2}}\,\partial x\,\partial y$$

zu bestimmen ist. Die Ebene der xy theilt die ganze Kegelfläche in zwei Hälften: für jede sind die äussersten Gränzen von x : 0 und h, während einem beliebigen x für y die Gränzen $(a-r)\frac{x}{h}$, $(a+r)\frac{x}{h}$ zugehören. Demnach ist die Fläche

$$\frac{2}{h}\int_0^h\partial x\int_{(a-r)\frac{x}{h}}^{(a+r)\frac{x}{h}}\sqrt{\frac{\varrho^2+2arM+a^2M^2}{1-M^2}}\,\partial y.$$

Um dieses Integral zu bestimmen, führen wir für x und y zwei neue Veränderliche u und v ein, die mit den ersten durch die Gleichungen $x=u$, $y=uv$ zusammenhängen. Alsdann ist in §. 52, I die dortige Gleichung (d): $y-xv=0$, während die (d') sind: $(a-r)\frac{x}{h}-x\alpha'=0$, $(a+r)\frac{x}{h}-x\beta'=0$. Daraus folgt $\alpha'=\frac{a-r}{h}$, $\beta'=\frac{a+r}{h}$, beide von x unabhängig. Die dortigen Gleichungen (f) sind, da $\varphi(u,v)=u$, $a=0$, $b=h$: $0=a'$, $h=b'$, so dass also nach der dortigen Formel (A), in der $\frac{\partial\varphi}{\partial u}=1$, $\frac{\partial\varphi}{\partial v}=0$, $\frac{\partial\psi}{\partial v}=u$, die Fläche $=$

$$\frac{2}{h}\int_0^h\partial u\int_{\frac{a-r}{h}}^{\frac{a+r}{h}}u\sqrt{\frac{\varrho^2+2arM'+a^2M'^2}{1-M'^2}}\,\partial v,\quad M'=\frac{huv-au}{ru}=\frac{hv-a}{r},$$

so dass, wenn man die Integration nach u vollzieht (wovon M' unabhängig ist), man für den Inhalt der Kegelfläche erhält:

$$h\int_{\frac{a-r}{h}}^{\frac{a+r}{h}}\sqrt{\frac{\varrho^2+2arM'+a^2M'^2}{1-M'^2}}\,\partial u.$$

Setzt man endlich

$$M' = \frac{hv - a}{r} = \cos\varphi,\ \frac{\partial v}{\partial \varphi} = -\frac{r\sin\varphi}{h},$$

so sind die Gränzen von φ: π und 0, somit die Kegelfläche gleich

$$r\int_0^\pi \sqrt{\varrho^2 + 2ar\cos\varphi + a^2\cos^2\varphi}\,\partial\varphi,\ \varrho^2 = r^2 + h^2,$$

und wenn man noch $\cos\varphi = x$ setzt:

$$r\int_{-1}^{+1} \frac{\sqrt{\varrho^2 + 2arx + a^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,\partial x,$$

welches Integral nun zu den elliptischen gehört und nach §. 101, II, 2 behandelt werden muss. Da die Wurzeln der Gleichung $a^2x^2 + 2arx + \varrho^2 = 0$ sind $-\frac{r}{a} \pm \frac{h}{a}i$, so ist dort $a = -1$, $b = +1$, $m = -\frac{r}{a}$, $n = \frac{h}{a}$, also

$$\frac{1-x}{x+1} = \alpha\frac{1-z}{1+z},\quad \alpha = \sqrt{\frac{(a+r)^2+h^2}{(a-r)^2+h^2}},\ x = \frac{1-\alpha+z(1+\alpha)}{1+\alpha+z(1-\alpha)},\ \frac{\partial x}{\partial z} = \frac{4\alpha}{[1+\alpha+z(1-\alpha)]^2},$$

$$1-x^2 = \frac{4\alpha(1-z^2)}{[1+\alpha+z(1-\alpha)]^2},\ \varrho^2 + 2arx + a^2x^2 = a^2\left[\left(x+\frac{r}{a}\right)^2 + \frac{h^2}{a^2}\right]$$

$$= \frac{a^2[\beta^2+\gamma^2z^2]}{[1+\alpha+z(1-\alpha)]^2},\ \text{wenn } \beta^2 = \left[1-\alpha+\frac{r}{a}(1+\alpha)\right]^2 + \frac{h^2}{a^2}(1+\alpha)^2,$$

$$\gamma^2 = \left[1+\alpha+\frac{r}{a}(1-\alpha)\right]^2 + \frac{h^2}{a^2}(1-\alpha)^2,$$

also endlich

$$r\int_{-1}^{+1} \frac{\sqrt{\varrho^2+2arx+a^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\,\partial x = r\int_{-1}^{+1} \frac{a\sqrt{\beta^2+\gamma^2z^2}}{2\sqrt{\alpha}\sqrt{1-z^2}} \cdot \frac{4\alpha\,\partial z}{[1+\alpha+z(1-\alpha)]^2},$$

und wenn man wieder $z = \cos\varphi$, $\frac{\alpha-1}{\alpha+1} = m$, $\frac{\gamma^2}{\beta^2+\gamma^2} = e^2$ setzt:

$$= \frac{2a\sqrt{\alpha}\,.\,r\sqrt{\beta^2+\gamma^2}}{(1+\alpha)^2}\int_0^\pi \frac{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}{(1-m\cos\varphi)^2}\,\partial\varphi.$$

Aber es ist

$$\beta^2+\gamma^2 = \frac{4[(a+r)^2+h^2]}{a^2},\ a\sqrt{\beta^2+\gamma^2}\sqrt{\alpha} = \frac{2[(a+r)^2+h^2]^{\frac{3}{4}}}{[(a-r)^2+h^2]^{\frac{1}{4}}},\ \frac{a\sqrt{\beta^2+\gamma^2}\sqrt{\alpha}}{(1+\alpha)^2}$$

$$= \frac{2[(a+r)^2+h^2]^{\frac{3}{4}}[(a-r)^2+h^2]^{\frac{3}{4}}}{\left[\sqrt{(a+r)^2+h^2}+\sqrt{(a-r)^2+h^2}\right]^2} = n,$$

so dass also die Kegelfläche =

$$2nr\int_0^\pi \frac{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}{(1-m\cos\varphi)^2}\,\partial\varphi = 2nr\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}{(1-m\cos\varphi)^2}\,\partial\varphi + 2nr\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}{(1+m\cos\varphi)^2}\,\partial\varphi.$$

Nun ist

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}{(1-m\cos\varphi)^2}\,\partial\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-e^2\sin^2\varphi}{(1-m\cos\varphi)^2}\,\frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{e^2}{m^2} - \frac{2e^2}{m^2}\cdot\frac{1}{1-m\cos\varphi}\right.$$

$$+\left(1-e^2+\frac{e^2}{m^2}\right)\frac{1}{(1-m\cos\varphi)^2}\Bigg]\frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}=\frac{e^2}{m^2}F\left(\frac{\pi}{2},e\right)$$

$$-\frac{2e^2}{m^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1-m\cos\varphi}\frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}+\left(1-e^2+\frac{e^2}{m^2}\right)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\partial\varphi}{(1-m\cos\varphi)^2\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}.$$

Eben so

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}{(1+m\cos\varphi)^2}\partial\varphi=\frac{e^2}{m^2}F\left(\frac{\pi}{2},e\right)-\frac{2e^2}{m^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+m\cos\varphi}\frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}$$

$$+\left(1-e^2+\frac{e^2}{m^2}\right)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\partial\varphi}{(1+m\cos\varphi)^2\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}},$$

so dass die Summe =

$$\frac{2e^2}{m^2}F\left(\frac{\pi}{2},e\right)-\frac{4e^2}{m^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1-m^2\cos^2\varphi}\frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}$$

$$+\left(1-e^2+\frac{e^2}{m^2}\right)\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\partial\varphi}{(1-m\cos\varphi)^2\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\partial\varphi}{(1+m\cos\varphi)^2\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}\right].$$

Nach §. 99 ist

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1-m^2\cos^2\varphi}\frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}=\frac{1}{1-m^2}\Pi\left(\frac{\pi}{2},\frac{m^2}{1-m^2},e\right);$$

ferner, wenn man in der Formel (d) des §. 102 $a=\frac{1}{m}$, $n=2$ setzt:

$$\frac{\sin\varphi\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}{\frac{1}{m}+\cos\varphi}=e^2\int\frac{\left(\frac{1}{m}+\cos\varphi\right)^2\partial\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}-\frac{2e^2}{m}\int\frac{\left(\frac{1}{m}+\cos\varphi\right)\partial\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}$$

$$+\left(1-2e^2+\frac{2e^2}{m^2}\right)\frac{1}{m}\int\frac{\partial\varphi}{\left(\frac{1}{m}+\cos\varphi\right)\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}$$

$$+\left(1-\frac{1}{m^2}\right)\left(1-e^2+\frac{e^2}{m^2}\right)\int\frac{\partial\varphi}{\left(\frac{1}{m}+\cos\varphi\right)^2\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}};$$

integrirt man hier zwischen den Gränzen 0 und $\frac{\pi}{2}$, so erhält man:

$$(1-m^2)\left(1-e^2+\frac{e^2}{m^2}\right)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\partial\varphi}{(1+m\cos\varphi)^2\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}=e^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\left(-\frac{1}{m^2}+\cos^2\varphi\right)\partial\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}$$

$$+\left(1-2e^2+\frac{2e^2}{m^2}\right)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\partial\varphi}{(1+m\cos\varphi)\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}-m\sqrt{1-e^2},$$

und eben so

$$(1-m^2)\left(1-e^2+\frac{e^2}{m^2}\right)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\partial\varphi}{(1-m\cos\varphi)^2\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}=e^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\left(-\frac{1}{m^2}+\cos^2\varphi\right)\partial\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}$$

$$+\left(1-2e^2+\frac{2e^2}{m^2}\right)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\partial\varphi}{(1-m\cos\varphi)\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}+m\sqrt{1-e^2},$$

woraus nun, indem man früher Gesagtes beachtet:

$$(1-m^2)\left(1-e^2+\frac{e^2}{m^2}\right)\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\partial\varphi}{(1-m\cos\varphi)^2\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\partial\varphi}{(1+m\cos\varphi)^2\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}\right]$$

$$=-\frac{2e^2}{m^2}F\left(\frac{\pi}{2},e\right)+2e^2F\left(\frac{\pi}{2},e\right)-2F\left(\frac{\pi}{2},e\right)+2E\left(\frac{\pi}{2},e\right)$$

$$+\frac{2\left(1-2e^2+\frac{2e^2}{m^2}\right)}{1-m^2}\Pi\left(\frac{\pi}{2},\frac{m^2}{1-m^2},e\right),$$

so dass also die Kegelfläche:

$$2nr\left[\frac{2e^2}{m^2}F\left(\frac{\pi}{2},e\right)-\frac{4e^2}{m^2(1-m^2)}\Pi\left(\frac{\pi}{2},\frac{m^2}{1-m^2},e\right)-\frac{2e^2}{m^2}F\left(\frac{\pi}{2},e\right)\right.$$

$$\left.-\frac{2}{1-m^2}F\left(\frac{\pi}{2},e\right)+\frac{2}{1-m^2}E\left(\frac{\pi}{2},e\right)+\frac{2\left(1-2e^2+\frac{2e^2}{m^2}\right)}{(1-m^2)^2}\Pi\left(\frac{\pi}{2},\frac{m^2}{1-m^2},e\right)\right]$$

$$=\frac{4nr}{1-m^2}E\left(\frac{\pi}{2},e\right)-\frac{4nr}{1-m^2}F\left(\frac{\pi}{2},e\right)+\frac{4nr}{(1-m^2)^2}\Pi\left(\frac{\pi}{2},\frac{m^2}{1-m^2},e\right),$$

in welcher Formel

$$n=\frac{2[(a+r)^2+h^2]^{\frac{3}{4}}[(a-r)^2+h^2]^{\frac{3}{4}}}{\left[\sqrt{(a+r)^2+h^2}+\sqrt{(a-r)^2+h^2}\right]^2},\quad \alpha=\sqrt{\frac{(a+r)^2+h^2}{(a-r)^2+h^2}},\quad m=\frac{\alpha-1}{\alpha+1},$$

$$e^2=\frac{[a(1+\alpha)+r(1-\alpha)]^2+h^2(1-\alpha)^2}{4[(a+r)^2+h^2]}.$$

Für den besondern Fall, dass $a=0$ ist $\alpha=1$, $m=0$, $e=0$, $n=\frac{1}{2}\sqrt{r^2+h^2}$, $E\left(\frac{\pi}{2},e\right)=F\left(\frac{\pi}{2},e\right)=\Pi\left(\frac{\pi}{2},\frac{m^2}{1-m^2},e\right)=\frac{\pi}{2}$, so dass obige Formel gibt $2\sqrt{r^2+h^2}\,.\,r\frac{\pi}{2}=r\sqrt{r^2+h^2}\,\pi$, die bekannte Formel für den senkrechten Kegel.

Würde man die Formeln (h) des §. 99, so wie (c) des §. 104 zu Rathe ziehen, so liesse sich die gefundene Formel bloss durch elliptische Integrale der zwei ersten Arten ausdrücken.

Diese Beispiele mögen hier genügen, da wir ohnehin im nächsten Abschnitte weitere geben werden.

Achtzehnter Abschnitt.

Die Euler'schen Integrale oder die Gamma-Funktionen. Reduktionen vielfacher Integrale nach verschiedenen Methoden.

§. 106.

Wir wollen das bestimmte Integral

$$\int_0^\infty x^{a-1} e^{-x} \partial x$$

durch $\Gamma(a)$ bezeichnen, und dasselbe das Euler'sche Integral oder auch die Gammafunktion nennen, so dass also

$$\int_0^\infty x^{a-1} e^{-x} \partial x = \Gamma(a). \qquad \text{(a)}$$

Setzt man in (a): $x = -l(z)$, also $\frac{\partial x}{\partial z} = -\frac{1}{z}$, $e^{-x} = z$, so sind die Gränzen von z: 1 und 0, und mithin

$$\int_0^1 [-l(z)]^{a-1} \partial z = \Gamma(a), \int_0^1 \left[l\left(\frac{1}{z}\right)\right]^{a-1} \partial z = \Gamma(a). \qquad \text{(b)}$$

Vor Allem wollen wir nun eine wichtige Eigenschaft der Grösse $\Gamma(a)$ nachweisen. Es ist nämlich (§. 36):

$$\int x^a e^{-x} \partial x = -x^a e^{-x} + a \int x^{a-1} e^{-x} \partial x;$$

ist aber $a > 0$, so ist $x^a e^{-x}$ Null für $x = 0$ und $x = \infty$ (§. 22), also ist

$$\int_0^\infty x^a e^{-x} \partial x = a \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x} \partial x,$$

d. h.

$$\Gamma(a+1) = a\Gamma(a), \quad a > 0, \qquad \text{(c)}$$

welche Gleichung nun eine Fundamentaleigenschaft der Gamma-Funktion ausdrückt. Aus ihr schliesst man, dass auch $\Gamma(a)$, wenn a zwischen 0 und 1 liegt, einen bestimmten Werth hat, da dann $\Gamma(a+1)$ in dieser Lage ist. Für ein negatives a folgt aus obiger Gleichung, dass $\Gamma(a)$ unzulässig ist. Für $a = 1$ ist übrigens

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x} \partial x = 1,$$

also $\Gamma(2) = 1\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(3) = 2\Gamma(2) = 2 \,.\, 1, \ldots, \Gamma(n) = (n-1)(n-2) \ldots 1$, (d)

wenn n eine positive ganze Zahl ist. Eben so

$$\Gamma(a+n) = (a+n-1)\Gamma(a+n-1) = (a+n-1)(a+n-2)\Gamma(a+n-2) = \ldots .$$
$$= (a+n-1)(a+n-2) \ldots a\Gamma(a), \qquad \text{(e)}$$

wenn n eben so beschaffen ist.

Für $a=\frac{1}{2}$ ist

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\partial x;$$

setzt man hier $x=z^2$, $\frac{\partial x}{\partial z}=2z$, so sind die Gränzen von z wieder 0 und ∞, also (§. 62)

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=2\int_0^\infty e^{-z^2}\partial z=\sqrt{\pi}. \qquad \text{(f)}$$

Hieraus folgt nach (e):

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right)=\frac{(2n-1)(2n-3)\dots 1}{2^n}\sqrt{\pi}. \qquad \text{(f')}$$

Setzt man in (a): $x=mz$, wo $m>0$, so ist

$$\Gamma(a)=\int_0^\infty x^{a-1}e^{-x}\partial x=\int_0^\infty m^a e^{-mz} z^{a-1}\partial z=m^a\int_0^\infty z^{a-1}e^{-mz}\partial z,$$

so dass
$$\int_0^\infty x^{a-1}e^{-mx}\partial x=\frac{\Gamma(a)}{m^a},\ m>0. \qquad \text{(g)}$$

Hieraus folgt, wenn $m=1+z$ (wo also $z>-1$) und $a+b$ für a gesetzt wird:

$$\int_0^\infty x^{a+b-1}e^{-(1+z)x}\partial x=\frac{\Gamma(a+b)}{(1+z)^{a+b}},$$

mithin, da bloss $z>-1$ zu seyn braucht:

$$\int_0^\infty \partial z\int_0^\infty z^{a-1}x^{a+b-1}e^{-(1+z)x}\partial x=\Gamma(a+b)\int_0^\infty \frac{z^{a-1}\partial z}{(1+z)^{a+b}}.$$

Aber die erste Seite ist auch (§. 51)

$$\int_0^\infty x^{a+b-1}e^{-x}\partial x\int_0^\infty z^{a-1}e^{-zx}\partial z=\int_0^\infty x^{a+b-1}e^{-x}\partial x.\frac{\Gamma(a)}{x^a}\ \text{(nach (g))}$$

$$=\Gamma(a)\int_0^\infty x^{b-1}e^{-x}\partial x=\Gamma(a)\,.\,\Gamma(b),$$

so dass
$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}\partial x}{(1+x)^{a+b}}=\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}. \qquad \text{(h)}$$

Setzt man hier $a+b=1$, d. h. $b=1-a$, so ist

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}\partial x}{1+x}=\Gamma(a)\,.\,\Gamma(1-a). \qquad \text{(h')}$$

Die Grösse zweiter Seite dieser Gleichung lässt sich noch in anderer Weise ausdrücken. Gemäss §. 22 wird die Grösse $\frac{x^\alpha-1}{\alpha}$ für ein unendlich

abnehmendes α zu $l(x)$, so dass also auch, wenn Gr. sich auf ein unendlich zunehmendes n bezieht:

$$\text{Gr.}\left[\frac{x^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}\right]=l(x),\ \text{Gr.}\left(\frac{1-x^{\frac{1}{n}}}{\frac{1}{n}}\right)=-l(x)=l\left(\frac{1}{x}\right),$$

$$\text{Gr.}\left[\frac{\left(1-x^{\frac{1}{n}}\right)^{a-1}}{\frac{1}{n^{a-1}}}\right]=\left[l\left(\frac{1}{x}\right)\right]^{a-1}\ (\S.2),$$

so dass also gesetzt werden darf

$$\frac{\left(1-x^{\frac{1}{n}}\right)^{a-1}}{\frac{1}{n^{a-1}}}=l\left(\frac{1}{x}\right)^{a-1}+k,$$

wenn k eine Grösse ist, die mit unendlich wachsendem n sich der Null unbegränzt nähert. Daraus folgt:

$$n^{a-1}\int_0^1\left(1-x^{\frac{1}{n}}\right)^{a-1}\partial x=\int_0^1 l\left(\frac{1}{x}\right)^{a-1}\partial x+\int_0^1 k\,\partial x=\Gamma(a)+k',$$

wenn k' ein Mittelwerth ist zwischen den Werthen, die k erlangt, wenn x von 0 bis 1 geht (§. 48, Formel (44)). Da aber k mit unbegränzt wachsendem n zu Null wird, was auch x sey, so wird also auch k' in derselben Lage seyn. In dem Integrale erster Seite wollen wir $x=z^n$ setzen, wo wir $n>0$ ja voraussetzen, so ist $\frac{\partial x}{\partial z}=n z^{n-1}$, $x^{\frac{1}{n}}=z$, also

$$n^{a-1}\int_0^1\left(1-x^{\frac{1}{n}}\right)^{a-1}\partial x=n^a\int_0^1(1-z)^{a-1}z^{n-1}\partial z;$$

setzt man aber in der Formel (h): $x=\frac{1}{1-z}-1$, so sind die Gränzen von $z:0,1$; $\frac{\partial x}{\partial z}=\frac{1}{(1-z)^2}$, $1+x=\frac{1}{1-z}$, $x=\frac{z}{1-z}$, so dass dann

$$\int_0^1\frac{z^{a-1}}{(1-z)^{a-1}}\cdot\frac{(1-z)^{a+b}}{(1-z)^2}\partial z=\frac{\Gamma(a).\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)},\ \text{d. h.}\int_0^1 z^{a-1}(1-z)^{b-1}\partial z=\frac{\Gamma(a).\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)},\quad (i)$$

aus welcher Formel nun unmittelbar folgt, dass

$$n^a\int_0^1(1-z)^{a-1}z^{n-1}\partial z=\frac{n^a\,\Gamma(a).\Gamma(n)}{\Gamma(a+n)},$$

so dass also

$$\Gamma(a)+k'=\frac{n^a\,\Gamma(a).\Gamma(n)}{\Gamma(a+n)},$$

und mithin

$$\text{Gr.}\left[\frac{n^a\,\Gamma(a).\Gamma(n)}{\Gamma(a+n)}\right]=\Gamma(a).\quad (k)$$

Setzt man hier n als ganze Zahl voraus, so ist nach (e) also

$$\text{Gr.}\left[\frac{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots(n-1)\,.\,n^{a}}{a(a+1)(a+2)\ldots(a+n-1)}\right]=\Gamma(a),$$

und wenn man $1-a$ für a setzt, also $a<1$ annimmt:

$$\text{Gr.}\left[\frac{1\,.\,2\ldots(n-1)\,n^{1-a}}{(1-a)(2-a)\ldots(n-a)}\right]=\Gamma(1-a),$$

mithin auch (§. 2):

$$\text{Gr.}\left(\frac{1\,.\,2\ldots(n-1)n^{a}}{a(a+1)\ldots(a+n-1)}\cdot\frac{1\,.\,2\ldots(n-1)\,n^{1-a}}{(1-a)(2-a)\ldots(n-a)}\right)=\Gamma(a)\,.\,\Gamma(1-a),$$

oder
$$\text{Gr.}\left(\frac{1^2\,.\,2^2\ldots\ldots(n-1)^2 n}{a(1^2-a^2)(2^2-a^2)\ldots[(n-1)^2-a^2](n-a)}\right)=\Gamma(a)\,.\,\Gamma(1-a)$$

$$=\text{Gr.}\left(\frac{1}{a\left(1-\frac{a^2}{1^2}\right)\left(1-\frac{a^2}{2^2}\right)\ldots\ldots\left(1-\frac{a^2}{(n-1)^2}\right)\left(1-\frac{a}{n}\right)}\right)=\frac{\pi}{\sin a\pi},$$

wie man aus „Grundzüge" S. 64, Formel (18) leicht findet, indem man dort $\alpha=a\pi$ setzt. (Vergl. auch §. 27). Also endlich

$$\Gamma(a)\,.\,\Gamma(1-a)=\int_0^\infty\frac{x^{a-1}}{1+x}\partial x=\frac{\pi}{\sin a\pi},\quad a\gtrless{}^{0}_{1}, \tag{l}$$

aus welcher Gleichung für $a=\frac{1}{2}$ nochmals die (f) folgt.

Da ferner nach (g) für ein positives x:

$$\frac{1}{\Gamma(a)}\int_0^\infty z^{a-1}e^{-xz}\partial z=\frac{1}{x^a},$$

so ist

$$\int_0^\infty\frac{\cos\alpha x}{x^a}\partial x=\frac{1}{\Gamma(a)}\int_0^\infty\cos\alpha x\,\partial x\int_0^\infty z^{a-1}\cdot e^{-xz}\partial z=\frac{1}{\Gamma(a)}\int_0^\infty z^{a-1}\partial z\int_0^\infty e^{-xz}\cos\alpha x\,\partial x$$

$$=\frac{1}{\Gamma(a)}\int_0^\infty z^{a-1}\partial z\,.\,\frac{z}{\alpha^2+z^2}\ (\S.\ 50)=\frac{1}{\Gamma(a)}\int_0^\infty\frac{z^a\partial z}{\alpha^2+z^2}.$$

Ist nun $\alpha>0$, und man setzt hier $z=\alpha\sqrt{u}$, so sind die Gränzen von u wieder 0 und ∞, $\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\alpha}{2\sqrt{u}}$, mithin

$$\int_0^\infty\frac{\cos\alpha x}{x^a}\partial x=\frac{1}{\Gamma(a)}\cdot\frac{\alpha^{a+1}}{2\alpha^2}\int_0^\infty\frac{u^{\frac{a}{2}}\partial u}{(1+u)\,u^{\frac{1}{2}}}=\frac{\alpha^{a-1}}{2\Gamma(a)}\int_0^\infty\frac{u^{\frac{a-1}{2}}\partial u}{1+u}=\frac{\alpha^{a-1}}{2\Gamma(a)}\cdot\frac{\pi}{\sin\left(\frac{a+1}{2}\pi\right)},$$

$$\frac{a+1}{2}\gtrless{}^{0}_{1},$$

so dass

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^\infty\frac{\cos\alpha x}{x^a}\partial x=\frac{\alpha^{a-1}\pi}{2\Gamma(a)\cos\frac{a\pi}{2}},\quad\alpha>0,\ a\gtrless{}^{0}_{1}\\ &\int_0^\infty\frac{\sin\alpha x}{x^a}\partial x=\frac{\alpha^{a-1}\pi}{2\Gamma(a)\sin\frac{a\pi}{2}},\quad\alpha>0,\ a\gtrless{}^{0}_{2}\end{aligned}\right\}\tag{m}$$

und eben so (second formula above).

Setzt man hier $a = 1 - m$, so ist, da

$$\Gamma(m)\Gamma(1-m) = \frac{\pi}{\sin m\pi},\ \Gamma(1-m) = \frac{\pi}{\Gamma(m)\sin m\pi} = \frac{\pi}{2\Gamma(m)\sin\frac{m\pi}{2}\cos\frac{m\pi}{2}}:$$

$$\left.\begin{aligned}\int_0^\infty x^{m-1}\cos\alpha x\,\partial x &= \frac{\Gamma(m)\cos\frac{1}{2}m\pi}{\alpha^m},\\ \int_0^\infty x^{m-1}\sin\alpha x\,\partial x &= \frac{\Gamma(m)\sin\frac{1}{2}m\pi}{\alpha^m}.\end{aligned}\quad \alpha > 0,\ m \gtrless {0 \atop 1}\right\} \quad (n)$$

Setzt man in diesen Formeln $m = \frac{1}{2}$, $\alpha = r^2$, so ist

$$\int_0^\infty \frac{\cos(r^2 x)}{\sqrt{x}}\partial x = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\cos\frac{1}{4}\pi}{r},\quad \int_0^\infty \frac{\sin(r^2 x)}{\sqrt{x}}\partial x = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\sin\frac{1}{4}\pi}{r}.$$

Multiplizirt man die zweite dieser Gleichungen mit i und addirt sie zur ersten, so erhält man (§. 17, IV):

$$\int_0^\infty \frac{e^{r^2 x i}}{\sqrt{x}}\partial x = \frac{\sqrt{\pi}.e^{\frac{\pi}{4}i}}{r},$$

woraus auch

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-\frac{\pi}{4}i}\int_0^\infty \frac{e^{r^2 x i}}{\sqrt{x}}\partial x. \qquad (n')$$

Man setze in der Formel (n′) $x = z^2$, so sind die Gränzen von z auch 0 und ∞, und es ist

$$\frac{1}{r} = \frac{2e^{-\frac{\pi}{4}i}}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{r^2 z^2 i}\partial z,\ \text{also}\int_0^\infty e^{r^2 z^2 i}\partial z = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{e^{\frac{\pi}{4}i}}{r},$$

und (§. 49, VII):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{r z^2 i}\partial z = \frac{\sqrt{\pi}e^{\frac{\pi}{4}i}}{\sqrt{r}}.$$

Setzt man endlich hier noch $z = x + \frac{a}{r}$, wo a beliebig, so ergibt sich

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\left(rx^2+2ax+\frac{a^2}{r}\right)i}\partial x = \sqrt{\frac{\pi}{r}}e^{\frac{\pi}{4}i},\quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(rx^2+2ax)i}\partial x = \sqrt{\frac{\pi}{r}}e^{\frac{\pi}{4}i-\frac{a^2}{r}i}. \qquad (n'')$$

Es versteht sich von selbst, dass diese Formel zwei andere umfasst, indem aus ihr unmittelbar folgt:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\cos(rx^2+2ax)\partial x = \sqrt{\frac{\pi}{r}}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{a^2}{r}\right),\ \int_{-\infty}^{+\infty}\sin(rx^2+2ax)\partial x = \sqrt{\frac{\pi}{r}}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{a^2}{r}\right).$$

Da nach (e) der Werth von $\Gamma(a+n)$ durch den von $\Gamma(a)$ gefunden wird, so wird man, wenn man $\Gamma(x)$ kennt von $x = 0$ bis $x = 1$, auch $\Gamma(x)$ für alle möglichen positiven x kennen; ja wenn man $\Gamma(x)$ nur kennt von $x = 0$ bis $x = \frac{1}{2}$, so kann man nach (l) auch die Werthe von $x = \frac{1}{2}$ bis $x = 1$ erhalten, so dass es also genügt, $\Gamma(x)$ von $x + 0$ bis $x = \frac{1}{2}$ zu berechnen. Nun ist aber

$$\Gamma(a) = \text{Gr.}\left(\frac{1.2\ldots(n-1)n^a}{a(a+1)\ldots(a+n-1)}\right),\ \Gamma(1+a) = \text{Gr.}\left(\frac{1.2\ldots n.n^a}{(a+1)(a+2)\ldots(a+n)}\right),$$

und folglich

$$1.\Gamma(1+a) = \text{Gr.}\left[a\,l(n) - l(1+a) - l\left(1+\frac{a}{2}\right)\ldots\ldots - l\left(1+\frac{a}{n}\right)\right],$$

$$= \text{Gr.}\left[a\,l(n) - \left(\frac{a}{1} - \frac{1}{2}\frac{a^2}{1^2} + \frac{1}{3}\frac{a^3}{1^3} - \ldots\right)\right.$$
$$-\left(\frac{a}{2} - \frac{1}{2}\frac{a^2}{2^2} + \frac{1}{3}\frac{a^3}{2^3} - \ldots\right)$$
$$\vdots$$
$$\left.-\left(\frac{a}{n} - \frac{1}{2}\frac{a^2}{n^2} + \frac{1}{3}\frac{a^3}{n^3} - \ldots\right)\right] \text{ (§. 17)}$$

$$= \text{Gr.}\left[a\left\{l(n) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right)\right\} + \frac{1}{2}a^2\left(1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}\right)\right.$$
$$\left.- \frac{1}{3}a^3\left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \ldots + \frac{1}{n^3}\right) + \ldots\ldots\right].$$

Was nun zunächst die Grösse

$$\text{Gr.}\left[l(n) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right)\right]$$

anbelangt, so lässt sich leicht beweisen, dass sie einen bestimmten endlichen Werth habe. Denn sey

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - l(n) = f(n), \text{ also } f(n+1) - f(n) = \frac{1}{n+1} - l\left(\frac{n+1}{n}\right)$$
$$= \frac{1}{n+1} + l\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = -\left[\frac{1}{2}\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(n+1)^3} + \ldots\right] \text{ (§. 17)},$$

so dass $f(n+1) - f(n) < 0$, mithin $f(n)$ abnimmt mit wachsendem n.

Nun ist aber, wenn $a < 1$: $l(1+a) < a$ (§. 17), also $a > l(1+a)$, d. h.

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} > 1 + l\left(1 + \frac{1}{2}\right) + l\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \ldots + l\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$
$$> 1 + l\left(\frac{3}{2}\right) + l\left(\frac{4}{3}\right) + \ldots + l\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

oder

$$1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} > 1 + l\left(\frac{n+1}{2}\right),\ 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - l(n) > 1 + l\left(1 + \frac{1}{n}\right) - l(2),$$

mithin, was auch n sey: $f(n) > 1 + l\left(1 + \frac{1}{n}\right) - l(2)$, Gr. $f(n) > 1 - l(2)$. Da nun $f(n)$ mit wachsenden n abnimmt, für $n = 1$ aber 1 ist, so liegt mithin $f(n)$ immer zwischen $1 - l(2)$ und 1; bezeichnen wir also den Werth von Gr. $f(n)$ mit k, setzen ferner:

$$\text{Gr.}\left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}\right) = S_2, \ldots, \text{Gr.}\left(\frac{1}{2^m} + \frac{1}{3^m} + \ldots + \frac{1}{n^m}\right) = S_m,$$

beachten, dass $l(1+a) = a - \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{3}a^3 - \ldots$, so ist

$$l[\Gamma(1+a)] = -ka + a - l(1+a) + \frac{1}{2}S_2 a^2 - \frac{1}{3}S_3 a^3 + \ldots, \tag{p}$$

welche Formel zur Bestimmung von k selbst dient. Setzt man nämlich $a = 1$, so ist $\Gamma(1+a) = 1$, also

$$0 = -k + 1 - l(2) + \frac{1}{2}S_2 - \frac{1}{3}S_3 + \ldots,\ k = 1 - l(2) + \frac{1}{2}S_2 - \frac{1}{3}S_3 + \ldots \tag{q}$$

Was die Grössen $S_2, S_3, \ldots$ betrifft, so hat sie Euler, und später wieder Legendre berechnet, * und hat letzterer dann Tafeln für $\Gamma(x)$ gegeben. k findet sich hiernach $=0{\cdot}57721566$, während a in der Formel (p) nur von -1 bis $-\frac{1}{2}$ zu gehen braucht.

Aus (p) folgt übrigens auch, dass $\frac{\partial l[\Gamma(1+a)]}{\partial a}$ für $a=0$ gleich $-k$ ist, d.h. da

$$\frac{\partial l[\Gamma(1+a)]}{\partial a}=\frac{1}{\Gamma(1+a)}\frac{\partial \Gamma(1+a)}{\partial a},$$

es ist $\frac{\partial \Gamma(1+a)}{\partial a}=-k$ für $a=0$.

§. 107.

Angenommen, man soll das vielfache bestimmte Integral ermitteln:

$$\iiint \ldots x^{a-1} y^{b-1} z^{c-1} \ldots f(x+y+z+\ldots)\, \partial x\, \partial y\, \partial z \ldots, \qquad \text{(a)}$$

in dem die Gränzen von $x, y, z, \ldots$ so gewählt werden müssen, dass $x, y, z, \ldots$ alle positiven Werthe erhalten, für die

$$x+y+z+\ldots\ldots \leqq k, \qquad \text{(b)}$$

wo k eine positive Grösse ist. Um hier zum Ziele zu gelangen, wollen wir zuerst nur zwei Veränderliche annehmen, d.h. das Integral

$$\iint x^{a-1} y^{b-1} f(x+y)\, \partial x\, \partial y,\ x+y \leqq k \qquad \text{(c)}$$

zu bestimmen suchen. Es ist klar, dass man hier den Gränzbedingungen entsprechen wird, wenn man y von 0 bis $k-x$, und zugleich x von 0 bis k gehen lässt, so dass man also das Integral

$$\int_0^k x^{a-1} \partial x \int_0^{k-x} y^{b-1} f(x+y)\, \partial y \qquad \text{(d)}$$

zu bestimmen hat. Gemäss §. 51 (g) ist dasselbe gleich

$$\int_0^k x^{a-1} (k-x)^b \partial x \int_0^1 y^{b-1} f[x+(k-x)y]\, \partial y.$$

Führt man nun zwei neue Veränderliche u, v ein, so dass

$$x=uv,\quad y(k-uv)=u-uv,$$

so ist in §. 52, II die Gleichung (d): $y(k-x)=\frac{x}{v}-x$, d. h. $vy(k-x)=x-xv$; ist nun $x=0$, so genügt dieser Gleichung $v=0$, ist $x=k$, so genügt ihr $v=1$, welche Werthe unabhängig von y sind; die Grösse $\psi(u,v)$ ist $\frac{u(1-v)}{k-uv}$; ist nun $y=0$, so genügt ihr $u=0$, für $y=1$ genügt ihr $u=k$, beide unabhängig von v. Demnach sind die Gränzen von u: 0 und k, von v: 0 und 1. Ferner ist $x+(k-x)y=uv+\frac{k-uv}{k-uv}(u-uv)=u$; weiter da $\varphi(u,v)=uv$:

* So ist $S_2=0{\cdot}64493406$, $S_3=0{\cdot}20205690$, $S_4=0{\cdot}08232323$, $S_5=0{\cdot}03602775$, $S_6=0{\cdot}01734306$, $S_7=0{\cdot}00834927$, $S_8=0{\cdot}00407735$, $S_9=0{\cdot}00200839$, $S_{10}=0{\cdot}00099457$, $S_{11}=0{\cdot}00049418$, u. s. w.

$$\frac{\partial\varphi}{\partial v}=u,\ \frac{\partial\psi}{\partial u}=\frac{k(1-v)}{(k-uv)^2},\ \frac{\partial\varphi}{\partial u}=v,\ \frac{\partial\psi}{\partial v}=-\frac{u(k-u)}{(k-uv)^2},\ \frac{\partial\varphi}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial u}-\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial v}=\frac{u}{k-uv},$$

so dass nach §. 52 (B):

$$\int_0^k x^{a-1}\partial x\int_0^{k-x} y^{b-1} f(x+y)\,\partial y=\int_0^1 \partial v\int_0^k (uv)^{a-1}(k-uv)^b\frac{(u-uv)^{b-1}}{(k-uv)^{b-1}}f(u)\,.\,\frac{u}{k-uv}\partial u$$

$$=\int_0^1 \partial v\int_0^k u^{a+b-1}(1-v)^{b-1}v^{a-1}f(u)\,\partial u$$

$$=\int_0^k u^{a+b-1}f(u)\,\partial u\int_0^b v^{a-1}(1-v)^{b-1}\partial v, \text{*}$$

d. h. wenn man die Formel (i) in §. 106 beachtet:

$$\int\int x^{a-1}y^{b-1}f(x+y)\,\partial x\,\partial y=\frac{\Gamma(a)\,.\,\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}\int_0^k u^{a+b-1}f(u)\,\partial u. \qquad (c')$$

Geht man nun zu dem Falle dreier Veränderlichen über, so dass dann $x+y+z \overline{\gtrless} k$ seyn soll, so wird wieder x von 0 bis k gehen, während $y+z \overline{\gtrless} k-x$ ist. Setzt man also $k-x=k'$, so ist $y+z \overline{\gtrless} k'$, d.h. y geht von 0 bis k', z von 0 bis $k'-y$, mithin ist

$$\int\int\int x^{a-1}y^{b-1}z^{c-1}f(x+y+z)\,\partial x\,\partial y\,\partial z=\int_0^k x^{a-1}\partial x\int_0^{k'} y^{b-1}\partial y\int_0^{k'-y} z^{c-1}f(x+y+z)\,\partial z.$$

Nach (c′) ist aber:

$$\int_0^{k'} y^{b-1}\partial y\int_0^{k'-y} z^{c-1}f(x+y+z)\,\partial z=\frac{\Gamma(b)\,.\,\Gamma(c)}{\Gamma(b+c)}\int_0^{k'} u^{b+c-1}f(x+u)\,\partial u,$$

so dass

$$\int\int\int x^{a-1}y^{b-1}z^{c-1}f(x+y+z)\,\partial x\,\partial y\,\partial z=\frac{\Gamma(b)\Gamma(c)}{\Gamma(b+c)}\int_0^k x^{a-1}\partial x\int_0^{k-x} u^{b+c-1}f(x+u)\,\partial u,$$

---

* Hätte man einigen Zweifel in Bezug auf die Richtigkeit der Umformung, ob nämlich nicht etwa (vergl. §. 49, IV, §. 50, VIII) eine Theilung des Integrals stattfinden müsse, so lassen sich dieselben einfach dadurch heben, dass man für f(u) eine spezielle Form wählt. Setzt man $f(u)=1$, so ist auch $f(x+y)=1$, also $\int_0^k x^{a-1}\partial x\int_0^{k-x} y^{b-1}\partial y=\int_0^k \frac{x^{a-1}(k-x)^b\partial x}{b}$, und es muss demnach

$$\frac{1}{b}\int_0^k x^{a-1}(k-x)^b\,\partial x=\frac{\Gamma(a)\,.\,\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}\int_0^k u^{a+b-1}\partial u=\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{(a+b)\Gamma(a+b)}k^{a+b}$$

seyn. Setzt man $x=kz$, so muss also

$$\frac{k^{a+b}}{b}\int_0^1 z^{a-1}(1-z)^b\,\partial z=\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{(a+b)\Gamma(a+b)}k^{a+b}$$

seyn, welche Gleichung leicht aus (i) in §. 106 folgt. Da dieselbe also richtig ist, so muss unsere Umformung ebenfalls richtig seyn.

woraus nun, unter Anwendung derselben Formel:

$$\iiint x^{a-1} y^{b-1} z^{c-1} f(x+y+z)\,\partial x\,\partial y\,\partial z = \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)\,\Gamma(c)}{\Gamma(a+b+c)} \int_0^k u^{a+b+c-1} f(u)\,\partial u,$$

und mithin allgemein

$$\iiint \ldots x^{a-1} y^{b-1} z^{c-1} \ldots f(x+y+z+\ldots)\,\partial x\,\partial y\,\partial z \ldots$$

$$= \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)\,\Gamma(c)\ldots}{\Gamma(a+b+c+\ldots)} \int_0^k u^{a+b+c+\ldots-1} f(u)\,\partial u, \qquad (A)$$

wo $x, y, z, \ldots$ alle positiven Werthe haben, für welche $x+y+z+\ldots \overline{\underline{<}}\, k$.

Für $f(x+y+z+\ldots)=1$, folgt hieraus

$$\iiint \ldots x^{a-1} y^{b-1} z^{c-1} \ldots \partial x\,\partial y\,\partial z \ldots = \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)\,\Gamma(c)\ldots}{\Gamma(a+b+c+\ldots)} \cdot \frac{k^{a+b+c+\ldots}}{a+b+c+\ldots}$$

$$= \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)\,\Gamma(c)\ldots k^{a+b+c+\ldots}}{\Gamma(1+a+b+c+\ldots)}. \qquad (A')$$

Setzt man in der Formel (A) $x=\left(\frac{x'}{m}\right)^{\alpha}$, $y=\left(\frac{y'}{n}\right)^{\beta}$, $z=\left(\frac{z'}{r}\right)^{\gamma}$, ..., wo $m, n, r, \ldots, \alpha, \beta, \gamma, \ldots$ bestimmte Konstanten sind, und formt das bestimmte Integral nach §. 52 um, was hier geradezu nach §. 49, IV geschehen kann, indem jede der frühern Veränderlichen durch eine einzige neue ersetzt ist, so erhält man statt des Integrals in (A):

$$\iiint \ldots \left(\frac{x'}{m}\right)^{a\alpha-\alpha} \left(\frac{y'}{n}\right)^{b\beta-\beta} \left(\frac{z'}{r}\right)^{c\gamma-\gamma} \ldots f\left[\left(\frac{x'}{m}\right)^{\alpha}+\left(\frac{y'}{n}\right)^{\beta}+\left(\frac{z'}{r}\right)^{\gamma}+\ldots\right]$$

$$\alpha\left(\frac{x'}{m}\right)^{\alpha-1} \beta\left(\frac{y'}{n}\right)^{\beta-1} \gamma\left(\frac{z'}{r}\right)^{\gamma-1} \ldots \frac{\partial x'}{m}\,\frac{\partial y'}{n}\,\frac{\partial z'}{r} \ldots,$$

so dass also, wenn man die Accènte weglässt:

$$\iiint \ldots \left(\frac{x}{m}\right)^{a\alpha-1} \left(\frac{y}{n}\right)^{b\beta-1} \left(\frac{z}{r}\right)^{c\gamma-1} \ldots$$

$$f\left[\left(\frac{x}{m}\right)^{\alpha}+\left(\frac{y}{n}\right)^{\beta}+\left(\frac{z}{r}\right)^{\gamma}+\ldots\right] \frac{\alpha\beta\gamma\ldots}{mnr\ldots}\,\partial x\,\partial y\,\partial z \ldots =$$

$$\frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)\,\Gamma(c)\ldots}{\Gamma(a+b+c+\ldots)} \int_0^k u^{a+b+c+\ldots-1} f(u)\,\partial u,$$

oder endlich, wenn man $\frac{a}{\alpha}, \frac{b}{\beta}, \frac{c}{\gamma}, \ldots$ an die Stelle von $a, b, c, \ldots$ setzt:

$$\iiint \ldots x^{a-1} y^{b-1} z^{c-1} \ldots f\left[\left(\frac{x}{m}\right)^{\alpha}+\left(\frac{y}{n}\right)^{\beta}+\left(\frac{z}{r}\right)^{\gamma}+\ldots\right] \partial x\,\partial y\,\partial z \ldots$$

$$= \frac{m^a n^b r^c \ldots}{\alpha\beta\gamma\ldots} \frac{\Gamma\left(\frac{a}{\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{b}{\beta}\right)\Gamma\left(\frac{c}{\gamma}\right)\ldots}{\Gamma\left(\frac{a}{\alpha}+\frac{b}{\beta}+\frac{c}{\gamma}+\ldots\right)} \int_0^k u^{\frac{a}{\alpha}+\frac{b}{\beta}+\frac{c}{\gamma}\ldots-1} f(u)\,\partial u,$$

$$\left(\frac{x}{m}\right)^{\alpha}+\left(\frac{y}{n}\right)^{\beta}+\left(\frac{z}{r}\right)^{\gamma}+\ldots \overline{\underline{<}}\, k,\; x \geqq 0,\; y \geqq 0,\; z \geqq 0, \ldots \qquad (B)$$

Spezialisirt man in den wichtigen Formeln (A) und (B) die Funktion f(u), so kann man leicht eine Menge weiterer Formeln daraus ableiten.

So folgt aus (B) für $f(u)=\frac{1}{\sqrt{1-u}}$, $\alpha=\beta=\gamma=..=2$, $m=n=r=..=1$, $a=b=c=..=1$:

$$\int\int\int\ldots\frac{\partial x\,\partial y\,\partial z\ldots}{\sqrt{1-(x^2+y^2+z^2+\ldots)}}=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^n}{2^n\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^1\frac{u^{\frac{n}{2}-1}}{\sqrt{1-u}}\partial u,\ x^2+y^2+z^2+\ldots\overline{\gtrless}1,$$

wenn n die Anzahl der Veränderlichen ist.

Das hier noch vorkommende Integral wird für $u=v^2$ geben

$$\int_0^1\frac{u^{\frac{n}{2}-1}\partial u}{\sqrt{1-u}}=2\int_0^1\frac{v^{n-1}\partial v}{\sqrt{1-v^2}}=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}\varphi\,\partial\varphi$$

und kann nach §. 50 unmittelbar bestimmt werden.

Es lassen sich weiter sehr leicht geometrische Anwendungen derselben Sätze machen. So wird (§. 58) das Integral $\int\int\partial x\,\partial y$, ausgedehnt auf alle positiven x und y, welche für $\frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{n^2}\overline{\gtrless}1$, den vierten Theil der Fläche der Ellipse $\frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{n^2}=1$ ausdrücken. Nach (B) ist aber, wenn $a=b=1$, $f(u)=1$, $m=n=1$, $\alpha=\beta=2$, $k=1$:

$$\int\int\partial x\,\partial y=\frac{mn\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2}{4\Gamma(1)}\int_0^1\partial u=\frac{mn}{4\Gamma(2)}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{mn\pi}{4},$$

was wirklich die betreffende Fläche ausdrückt (§. 54. II). Eben so ist

$$\int\int\int\partial x\,\partial y\,\partial z,\ \left(\frac{x}{m}\right)^2+\left(\frac{y^2}{n}\right)^2+\left(\frac{z}{r}\right)^2\overline{\gtrless}1,$$

der 8. Theil des von dem Ellipsoid $\left(\frac{x}{m}\right)^2+\left(\frac{y}{n}\right)^2+\left(\frac{z}{r}\right)^2=1$ umschlossenen Körpers. Nach derselben Formel ist er also:

$$\frac{mnr\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^3}{8\Gamma\left(1+\frac{1}{2}\right)}\int_0^1 u^{\frac{1}{2}}\partial u=\frac{mnr\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^3}{12\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}=\frac{mnr\pi\sqrt{\pi}}{12\sqrt{\pi}}2=\frac{mnr\pi}{6}\ \text{(§. 57, I)}.$$

§. 108.

Angenommen, das nfache bestimmte Integral

$$\int\int\int\ldots F(x,y,z,\ldots)\,f[\varphi(x,y,z,\ldots)]\,\partial x\,\partial y\,\partial z\ldots,\qquad\text{(a)}$$

in welchem x, y, z, ... alle positiven Werthe annehmen sollen, für welche

$$\psi(x,y,z,\ldots)\overline{\gtrless}0\qquad\text{(a')}$$

ist, sey zu bestimmen. Dabei setzen wir voraus, es nehme $\varphi(x,y,z,\ldots)$ den bestimmten Werth φ_0 an, wenn x, y, z, ... sämmtlich Null sind; eben so sey φ_1 der bestimmte Werth von $\varphi(x,y,z,\ldots)$, wenn $\psi(x,y,z,\ldots)=0$ (natürlich die Stetigkeit aller vorkommenden Funktionen vorausgesetzt). Angenommen ferner, $\Psi(\varrho)$ sey der Werth von

$$\int\int\int \ldots F(x,y,z,\ldots)\, \partial x\, \partial y\, \partial z \ldots, \qquad \text{(b)}$$

wenn x, y, z,... alle positiven Werthe annehmen, für die

$$\varphi(x,y,z,\ldots) \overset{=}{<} \varrho, \qquad \text{(b')}$$

so ist der Werth des Integrals (a) gleich

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} f(\varrho) \frac{\partial \Psi(\varrho)}{\partial \varrho} \partial \varrho \qquad \text{(c)}$$

unter folgenden Voraussetzungen: 1) es darf die Bedingung (b′) nicht im Widerspruch stehen mit (a′), wenn ϱ zwischen φ_0 und φ_1 liegt; 2) muss man, wenn ϱ sich stetig ändert von φ_0 bis φ_1, mittelst der Bedingung (b′) alle Systeme von Werthen von x, y, z,... erhalten, die man mittelst (a′) erhält. Diese letztere Bedingung ist so zu verstehen: Legt man in der Gleichung

$$\varphi(x,y,z,\ldots) = \varrho \qquad \text{(c')}$$

der Grösse ϱ alle Werthe von φ_0 an bei, indem man (durch unendlich kleine Unterschiede) stetig fortschreitet bis φ_1, so müssen die Werthsysteme von x, y, z,..., die diesen Gleichungen genügen (x, y, z,... positiv) genau dieselben seyn, welche die Bedingung (a′) liefert.

Gesetzt es seyen ϱ, $\varrho + \Delta\varrho$ zwei verschiedene Werthe von ϱ, so wird für dieselben das Integral (b) auch verschiedene Werthe haben, die wir durch $\Psi(\varrho)$ und $\Psi(\varrho+\Delta\varrho) = \Psi(\varrho) + \Delta\Psi(\varrho)$ anzudeuten haben. Lässt man in

$$F(x,y,z,\ldots)\, \Delta x\, \Delta y\, \Delta z \ldots \qquad \text{(d)}$$

die Grössen x, y, z.... durch die (unendlich kleinen) Unterschiede Δx, Δy, Δz,... stetig von 0 an fortschreiten, so stellt $\Psi(\varrho)$ die Summe der Werthe (d) vor, wenn x, y, z,... bis zu den Werthen gehen, die (c′) genügen (§. 51), während $\Psi(\varrho) + \Delta\Psi(\varrho)$ die Summe der Werthe (d) vorstellt, wenn x, y, z,... von 0 bis zu den Werthen fortgehen, die

$$\varphi(x,y,z,\ldots) = \varrho + \Delta\varrho$$

genügen. Daraus folgt, dass $\Delta\Psi(\varrho)$ die Summe der Elemente des bestimmten Integrals (b) ist, wenn man für x, y, z,... diejenigen Werthe wählt, welche aus (c′) folgen, indem ϱ stetig von ϱ bis $\varrho + \Delta\varrho$ fortgeht. Je kleiner $\Delta\varrho$ ist, desto weniger sind die Werthe von $\varphi(x, y, z,\ldots)$, für alle diese Werthe von x, y, z,... von einander verschieden, so dass man sagen kann, $f[\varphi(x,y,z,\ldots)]$ bleibe für alle diese Werthe nahezu gleich $f(\varrho)$, und dies desto genauer, je kleiner $\Delta\varrho$ ist. Also ist $f[\varphi(x,y,z,\ldots)] = f(\varrho) + k$, wo k eine Grösse ist, die mit $\Delta\varrho$ verschwindet. Legt man also in

$$F(x,y,z,\ldots) f[\varphi(x,y,z,\ldots)]\, \Delta x\, \Delta y\, \Delta z, \ldots \qquad \text{(e)}$$

den x, y, z,... dieselben Werthe bei, wie so eben in (d), so wird die Summe derselben aus zwei Theilen bestehen, wovon der erste $= \Delta\Psi(\varrho) f(\varrho)$ ist, während der andere die Summe der Elemente (d), jedes multiplizirt mit einem Faktor k ist, der um so kleiner ist, je kleiner $\Delta\varrho$ ist. Diese Summe ist also, einem vielgebrauchten Schlusse nach (vergl. etwa §. 13, III), gleich $k' \Delta\Psi(\varrho) f(\varrho)$, wo k′ mit $\Delta\varrho$ verschwindet. Aber es ist (§. 11)

$\Delta\Psi(\varrho)=\frac{\partial\Psi(\varrho)}{\partial\varrho}\Delta\varrho+\alpha\Delta\varrho$, wo α mit $\Delta\varrho$ verschwindet, so dass die Summe der Elemente (e) ist

$$\frac{\partial\Psi(\varrho)}{\partial\varrho}f(\varrho)\Delta\varrho+\alpha f(\varrho)\Delta\varrho+k'\frac{\partial\Psi(\varrho)}{\partial\varrho}f(\varrho)\Delta\varrho+\alpha k' f(\varrho)\Delta\varrho. \qquad (f)$$

Legt man nun in der Gleichung (c′) der Grösse ϱ nach einander die Werthe $\varphi_0, \varphi_0+\Delta\varrho, \ldots, \varphi_1-\Delta\varrho$ bei, und nimmt die diesen Abtheilungen entsprechenden Summen (f), so wird die Summe all dieser Summen um so genauer dem Integrale (a) gleich seyn, je kleiner $\Delta\varrho$ ist. Daraus folgt, gemäss den ersten Grundsätzen über die Lehre von den bestimmten Integralen, und wenn man beachtet, dass die Summen der drei letzten Grössen in (f) zu

$$\alpha_1\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}f(\varrho)\,\partial\varrho,\quad k_1\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}\frac{\partial\Psi(\varrho)}{\partial\varrho}f(\varrho)\,\partial\varrho,\quad \beta\int_{\varphi_0}^{\varphi_1}f(\varrho)\,\partial\varrho$$

werden, wo α_1, k_1, β mit $\Delta\varrho$ verschwinden, also diese Grössen Null sind, dass das bestimmte Integral (a) der Grösse (c) gleich sey. — Man wird leicht übersehen, dass dieser Schluss nur unter den oben gemachten Voraussetzungen gerechtfertigt ist, die denn natürlich wesentlich zu berücksichtigen sind. Die nachfolgenden Beispiele werden zur weiteren Erläuterung beitragen.

I. Sey $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ die Gleichung eines dreiaxigen Ellipsoids (§. 60, I), so folgt aus derselben:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{c^2}{a^2}\frac{x}{z},\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{c^2}{b^2}\frac{y}{z},\quad 1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2=1+\frac{c^4x^2}{a^4z^2}+\frac{c^4y^2}{b^4z^2}$$

$$=\frac{\frac{z^2}{c^2}+\frac{c^2x^2}{a^4}+\frac{c^2y^2}{b^4}}{\frac{z^2}{c^2}}=\frac{1-\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)\frac{x^2}{a^2}-\left(1-\frac{c^2}{b^2}\right)\frac{y^2}{b^2}}{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}.$$

Daraus folgt, dass der achte Theil der Oberfläche desselben (§. 58) gleich ist

$$\int\int\sqrt{\frac{1-\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)\frac{x^2}{a^2}-\left(1-\frac{c^2}{b^2}\right)\frac{y^2}{b^2}}{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}\,\partial x\,\partial y,$$

wenn das Integral auf alle diejenigen positiven Werthe ausgedehnt wird, für welche $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\overset{=}{<}1$. Wir wollen annehmen, es sey $a>b>c$, so sind $1-\frac{c^2}{a^2}$, $1-\frac{c^2}{b^2}$ positiv und kleiner als 1, so dass wenn $1-\frac{c^2}{a^2}=\alpha^2$, $1-\frac{c^2}{b^2}=\beta^2$, man hat $\alpha<1$, $\beta<1$; ferner wollen wir in dem vorstehenden Integral ax, by für x und y setzen, wodurch es (§§. 52, 49) zu

$$ab\int\int\sqrt{\frac{1-\alpha^2x^2-\beta^2y^2}{1-x^2-y^2}}\,\partial x\,\partial y,\quad x^2+y^2\overset{=}{<}1,$$

wird, so dass es sich um die Bestimmung dieses letztern handeln wird. Vergleichen wir dasselbe mit (a), so ist

$$\varphi(x,y) = \frac{1-\alpha^2x^2-\beta^2y^2}{1-x^2-y^2},\ F(x,y)=1,\ f(u)=\sqrt{u},\ \psi(x,y)=x^2+y^2-1,\ \varphi_0=1,\ \varphi_1=\infty\,.$$

Ferner ist (c'):

$$\frac{1-\alpha^2x^2-\beta^2y^2}{1-x^2-y^2}=\varrho,\ 1=\frac{\varrho-\alpha^2}{\varrho-1}x^2+\frac{\varrho-\beta^2}{\varrho-1}y^2,$$

und wenn hier ϱ geht von 1 bis ∞, so wird man für jeden Werth von ϱ gewisse Werthe von x und y erhalten können, die nothwendig so beschaffen sind, dass $x^2+y^2<1$, indem ja $\frac{\varrho-\alpha^2}{\varrho-1}$; $\frac{\varrho-\beta^2}{\varrho-1}$ grösser als 1 sind; auch werden alle diese Systeme von einander verschieden seyn, und keines, für das $x^2+y^2<1$ wird davon ausgeschlossen seyn, so dass also die Bedingungen (a') und (b') sich nicht nur nicht widersprechen, sondern dieselben Werthe liefern, wenn ϱ von 1 bis ∞ stetig wächst. Demnach ist, wenn

$$\int\!\!\int \partial x\,\partial y=\Psi(\varrho),\ \text{wo}\ \frac{1-\alpha^2x^2-\beta^2y^2}{1-x^2-y^2}\overset{=}{<}\varrho:$$

$$\int\!\!\int\sqrt{\frac{1-\alpha^2x^2-\beta^2y^2}{1-x^2-y^2}}\,\partial x\,\partial y=\int_1^\infty\sqrt{\varrho}\,\frac{\partial\Psi(\varrho)}{\partial\varrho}\partial\varrho.$$

Die Bedingung $\frac{1-\alpha^2x^2-\beta^2y^2}{1-x^2-y^2}\overset{=}{<}\varrho$ ist auch $\frac{\varrho-\alpha^2}{\varrho-1}x^2+\frac{\varrho-\beta^2}{\varrho-1}y^2\overset{=}{<}1$, so dass, wenn man in der Formel (B) des §. 107 setzt:

$$\alpha=\beta=2,\ m=\sqrt{\frac{\varrho-1}{\varrho-\alpha^2}},\ n=\sqrt{\frac{\varrho-1}{\varrho-\beta^2}},\ f(u)=1,\ a=b=1,\ k=1,$$

man hat

$$\Psi(\varrho)=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{(\varrho-1)(\varrho-1)}{(\varrho-\alpha^2)(\varrho-\beta^2)}}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2}{\Gamma(1)}\int_0^1\partial u=\frac{\pi}{2}\,\frac{\varrho-1}{\sqrt{(\varrho-\alpha^2)(\varrho-\beta^2)}},$$

$$\int\sqrt{\varrho}\,\frac{\partial\Psi(\varrho)}{\partial\varrho}\partial\varrho=\Psi(\varrho)\sqrt{\varrho}-\frac{1}{2}\int\frac{\Psi(\varrho)}{\sqrt{\varrho}}\partial\varrho\ \ (\S.\ 36)=\frac{\pi}{4}\,\frac{(\varrho-1)\sqrt{\varrho}}{\sqrt{(\varrho-\alpha^2)(\varrho-\beta^2)}}$$
$$-\frac{\pi}{8}\int\frac{(\varrho-1)\partial\varrho}{\sqrt{\varrho(\varrho-\alpha^2)(\varrho-\beta^2)}}.$$

Setzt man $\varrho=u^2$, so ist diese Grösse $=$

$$\frac{\pi}{4}\left[\frac{(u^2-1)u}{\sqrt{(u^2-\alpha^2)(u^2-\beta^2)}}-\int\frac{(u^2-1)\partial u}{\sqrt{(u^2-\alpha^2)(u^2-\beta^2)}}\right]$$

und wenn $u=\frac{\alpha}{\sin\varphi}$:

$$\frac{\pi}{4}\left[\frac{\alpha^2-\sin^2\varphi}{\sqrt{\alpha^2-\beta^2\sin^2\varphi}\sin\varphi\cos\varphi}+\int\frac{(\alpha^2-\sin^2\varphi)\partial\varphi}{\sqrt{\alpha^2-\beta^2\sin^2\varphi}\sin^2\varphi}\right]=\frac{\pi}{4}\left[\frac{\alpha^2-\sin^2\varphi}{\sin\varphi\cos\varphi\sqrt{a^2-\beta^2\sin^2\varphi}}\right.$$
$$\left.+\alpha^2\int\frac{\partial\varphi}{\sin^2\varphi\sqrt{\alpha^2-\beta^2\sin^2\varphi}}-\int\frac{\partial\varphi}{\sqrt{\alpha^2-\beta^2\sin^2\varphi}}\right]=\frac{\pi}{4}\left[\frac{\alpha^2-\sin^2\varphi}{\sin\varphi\cos\varphi\sqrt{\alpha^2-\beta^2\sin^2\varphi}}\right.$$
$$\left.+\beta^2\int\frac{\sin^2\varphi\,\partial\varphi}{\sqrt{\alpha^2-\beta^2\sin^2\varphi}}-\frac{\cos\varphi\sqrt{\alpha^2-\beta^2\sin^2\varphi}}{\sin\varphi}-\int\frac{\partial\varphi}{\sqrt{\alpha^2-\beta^2\sin^2\varphi}}\right]\ (\S.\ 100,\ (k'))$$
$$=\frac{\pi}{4}\left[\frac{(\alpha^2-1+\beta^2\cos^2\varphi)\sin\varphi}{\cos\varphi\sqrt{\alpha^2-\beta^2\sin^2\varphi}}+\beta^2\int\frac{\sin\varphi\,\partial\varphi}{\sqrt{\alpha^2-\beta^2\sin^2\varphi}}-\int\frac{\partial\varphi}{\sqrt{\alpha^2-\beta^2\sin^2\varphi}}\right].$$

Da $\beta^2>\alpha^2$, so sey $\frac{\beta^2}{\alpha^2}=e^2$, und es ist, da die Gränzen von u ebenfalls 1 und ∞, also von φ : ω und 0 sind, wenn $\sin\omega=\alpha$, die fragliche Fläche:

$$ab\int_1^\infty V\varrho\frac{\partial\Psi(\varrho)}{\partial\varrho}\partial\varrho=\frac{ab\pi}{4}\left[-\frac{(\alpha^2-1+\beta^2\cos^2\omega)\sin\omega}{\cos\omega\sqrt{\alpha^2-\beta^2\sin^2\omega}}+\frac{\beta^2}{\alpha}\int_\omega^0\frac{\sin^2\varphi\,\partial\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\alpha}\int_\omega^0\frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}\right],$$

d. h. da $\sin\omega=\alpha$, $\cos\omega=\sqrt{1-\alpha^2}$, sie ist (§. 100):

$$\frac{ab\pi}{4}\left[\sqrt{(1-\alpha^2)(1-\beta^2)}-\alpha F(\omega,e)+\alpha E(\omega,e)+\frac{1}{\alpha}F(\omega,e)\right],$$

d. h. endlich gleich:

$$\frac{\pi c^2}{4}+\frac{\pi b}{4\sqrt{a^2-c^2}}[(a^2-c^2)E(\omega,e)+c^2F(\omega,e)],\ \sin\omega=\sqrt{\frac{a^2-c^2}{a^2}},\ \cos\omega=\frac{c}{a},$$

$$e=\frac{a}{b}\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}}.$$

Nimmt man diese Grösse achtfach, so erhält man die ganze Oberfläche des Ellipsoids.

II. Legt man das Integral

$$\iiint\ldots x^{p-1}y^{q-1}z^{r-1}\ldots\sqrt[m]{\frac{1-ax^\alpha-by^\beta-cz^\gamma-\ldots}{1-x^\alpha-y^\beta-z^\gamma-\ldots}}\,\partial x\,\partial y\,\partial z\ldots$$

zur Bestimmung vor, ausgedehnt auf alle positiven Werthe, für die

$$x^\alpha+y^\beta+z^\gamma+\ldots\overline{\overline{<}}1,$$

wo a, b, c, ... positiv und kleiner als 1, $\alpha,\beta,\gamma,\ldots$ positiv sind, so hat man

$$F(x,y,z,\ldots)=x^{p-1}y^{q-1}z^{r-1}\ldots,\ \varphi(x,y,z,\ldots)=\frac{1-ax^\alpha-by^\beta-cz^\gamma-\ldots}{1-x^\alpha-y^\beta-z^\gamma-\ldots},$$

$$f(u)=u^{\frac{1}{m}},\ \psi(x,y,z,\ldots)=x^\alpha+y^\beta+z^\gamma+\ldots-1,$$

$$\varphi_0=1,\ \varphi_1=\infty;\ \frac{1-ax^\alpha-by^\beta-cz^\gamma-\ldots}{1-x^\alpha-y^\beta-z^\gamma-\ldots}\overline{\overline{<}}\varrho \text{ oder } \frac{\varrho-a}{\varrho-1}x^\alpha+\frac{\varrho-b}{\varrho-1}y^\beta+\frac{\varrho-c}{\varrho-1}z^\gamma+$$

$$\ldots\overline{\overline{<}}1;$$

$$\Psi(\varrho)=\iiint\ldots x^{p-1}y^{q-1}z^{r-1}\ldots\partial x\,\partial y\,\partial z\ldots,$$

ausgedehnt auf alle positiven Werthe von x, y, z, ..., für welche die eben gegebene Bedingung erfüllt ist, gibt nach (B) in §. 107:

$$\Psi(\varrho)=\frac{\left(\sqrt[\alpha]{\frac{\varrho-1}{\varrho-a}}\right)^p\left(\sqrt[\beta]{\frac{\varrho-1}{\varrho-b}}\right)^q\left(\sqrt[\gamma]{\frac{\varrho-1}{\varrho-c}}\right)^r\ldots\Gamma\left(\frac{p}{\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{q}{\beta}\right)\Gamma\left(\frac{r}{\gamma}\right)\ldots}{\alpha\beta\gamma\ldots\Gamma\left(\frac{p}{\alpha}+\frac{q}{\beta}+\frac{r}{\gamma}+\ldots\right)}$$

$$\int_0^1 u^{\frac{p}{\alpha}+\frac{q}{\beta}+\frac{r}{\gamma}+\ldots-1}\partial u,$$

d. h. wenn $\frac{p}{\alpha}+\frac{q}{\beta}+\frac{r}{\gamma}+\ldots=k$:

$$\Psi(\varrho)=\frac{(\varrho-1)^k\,\Gamma\left(\frac{p}{\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{q}{\beta}\right)\Gamma\left(\frac{r}{\gamma}\right)\ldots}{(\varrho-a)^{\frac{p}{\alpha}}(\varrho-b)^{\frac{q}{\beta}}(\varrho-c)^{\frac{r}{\gamma}}\ldots\alpha\beta\gamma\ldots\Gamma(1+k)},$$

so dass also das vorgelegte Integral =

$$\frac{\Gamma\left(\frac{p}{\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{q}{\beta}\right)\Gamma\left(\frac{r}{\gamma}\right)\ldots}{\alpha\beta\gamma\ldots\Gamma(1+k)}\int_1^\infty\frac{\partial}{\partial\varrho}\left[\frac{(\varrho-1)^k}{(\varrho-a)^{\frac{p}{\alpha}}(\varrho-b)^{\frac{q}{\beta}}\ldots}\right].\,\varrho^{\frac{1}{m}}\,\partial\varrho.$$

Für $a=b=c=\ldots=0$ ist

$$\iiint\frac{\ldots x^{p-1}y^{q-1}z^{r-1}\ldots}{\sqrt[m]{(1-x^\alpha-y^\beta-z^\gamma-\ldots)}}\partial x\,\partial y\,\partial z\ldots$$

$$=\frac{\Gamma\left(\frac{p}{\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{q}{\beta}\right)\ldots}{\alpha\beta\gamma\ldots\Gamma(1+k)}\int_1^\infty\frac{\partial}{\partial\varrho}\left[\frac{(\varrho-1)^k}{\varrho^k}\right]\varrho^{\frac{1}{m}}\partial\varrho,$$

oder da $\frac{\partial}{\partial\varrho}\left[\frac{(\varrho-1)^k}{\varrho^k}\right]=\frac{\partial}{\partial\varrho}\left(1-\frac{1}{\varrho}\right)^k=\frac{k\left(1-\frac{1}{\varrho}\right)^{k-1}}{\varrho^2}$, $\frac{\partial}{\partial\varrho}\left[\frac{(\varrho-1)^k}{\varrho^k}\right]\varrho^{\frac{1}{m}}=$ $k(\varrho-1)^{k-1}\varrho^{\frac{1}{m}-k-1}$, so wird wenn $\varrho=\frac{1}{u}$,

$$\int_1^\infty\frac{\partial}{\partial\varrho}\left[\left(\frac{\varrho-1}{\varrho}\right)^k\right]\varrho^{\frac{1}{m}}\partial\varrho=-k\int_1^0\left(\frac{1}{u}-1\right)^{k-1}u^{k+1-\frac{1}{m}}\frac{\partial u}{u^2}$$

$$=k\int_0^1(1-u)^{k-1}u^{-\frac{1}{m}}\partial u=\frac{k\,\Gamma(k)\,\Gamma\left(1-\frac{1}{m}\right)}{\Gamma\left(k+1-\frac{1}{m}\right)}\ (\text{§. }106),$$

also

$$\iiint\ldots\frac{x^{p-1}y^{q-1}z^{r-1}\partial x\,\partial y\,\partial z\ldots}{\sqrt[m]{(1-x^\alpha-y^\beta-z^\gamma-\ldots)}}=\frac{\Gamma\left(1-\frac{1}{m}\right)\Gamma\left(\frac{p}{\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{q}{\beta}\right)\ldots}{\alpha\beta\gamma\ldots\Gamma\left(1+\frac{p}{\alpha}+\frac{q}{\beta}+\ldots-\frac{1}{m}\right)}.$$

III. Wir wollen uns endlich noch das bestimmte Integral vorlegen:

$$\iiint\ldots x^{p-1}y^{q-1}z^{r-1}\ldots\sqrt[m]{\frac{1-(x^\alpha+y^\beta+z^\gamma+\ldots)}{1+x^\alpha+y^\beta+z^\gamma+\ldots}}\,\partial x\,\partial y\,\partial z\ldots,$$

ausgedehnt auf alle positiven Werthe von $x, y, z, \ldots$, für die

$$x^\alpha+y^\beta+z^\gamma+\ldots\leqq 1,$$

wo wir $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ als positive Grössen annehmen.

Hier ist $F(x,y,z,..)=x^{p-1}y^{q-1}z^{r-1}\ldots$, $\varphi(x,y,z,..)=x^\alpha+y^\beta+z^\gamma+\ldots$, $f(u)=\sqrt[m]{\frac{1-u}{1+u}}$, demnach $\varphi_0=0$, $\varphi_1=1$, und die Bedingungen $x^\alpha+y^\beta+z^\gamma+\ldots\leqq 1$, $x^\alpha+y^\beta+z^\gamma+\ldots\leqq\varrho$ stehen nicht im Widerspruch, so wie sie offenbar dieselben Systeme von Werthen für $x, y, \ldots$ geben.

Jetzt ist

$$\Psi(\varrho)=\iiint\ldots x^{p-1}y^{q-1}z^{r-1}\partial x\,\partial y\,\partial z\ldots,\quad x^\alpha+y^\beta+z^\gamma+\ldots \overline{\gtrless}\,\varrho,\ \left(\frac{x}{\sqrt[\alpha]{\varrho}}\right)^\alpha+\left(\frac{y}{\sqrt[\beta]{\varrho}}\right)^\beta+\ldots \overline{\gtrless}\,1,$$

d. h (§. 107):

$$\Psi(\varrho)=\frac{\varrho^{\frac{p}{\alpha}+\frac{q}{\beta}+\frac{r}{\gamma}+\ldots}\,\Gamma\left(\frac{p}{\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{q}{\beta}\right)\ldots\ldots}{\alpha\beta\gamma\ldots\Gamma\left(\frac{p}{\alpha}+\frac{q}{\beta}+\ldots\right)}\int_0^1 u^{\frac{p}{\alpha}+\frac{q}{\beta}+\ldots-1}\partial u,$$

d. h. wenn $\frac{p}{\alpha}+\frac{q}{\beta}+\frac{r}{\gamma}+\ldots=k$:

$$\Psi(\varrho)=\frac{\varrho^k\,\Gamma\left(\frac{p}{\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{q}{\beta}\right)\ldots}{\alpha\beta\gamma\ldots\Gamma(1+k)},$$

$$\iiint\ldots x^{p-1}y^{q-1}z^{r-1}\ldots\sqrt[m]{\frac{1-(x^\alpha+y^\beta+z^\gamma+\ldots)}{1+x^\alpha+y^\beta+z^\gamma+\ldots}}\,\partial x\,\partial y\,\partial z\ldots$$

$$=\frac{\Gamma\left(\frac{p}{\alpha}\right)\Gamma\left(\frac{q}{\beta}\right)\ldots}{\alpha\beta\gamma\ldots\Gamma(k)}\int_0^1\varrho^{k-1}\sqrt[m]{\frac{1-\varrho}{1+\varrho}}\,\partial\varrho.$$

Für $m=2$ kommt das letzte Integral auf die Formel (i) in §. 106 zurück. Es ist nämlich dasselbe

$$\int_0^1\frac{\varrho^{k-1}(1-\varrho)}{\sqrt{1-\varrho^2}}\partial\varrho=\int_0^1\frac{\varrho^{k-1}\partial\varrho}{\sqrt{1-\varrho^2}}-\int_0^1\frac{\varrho^k\,\partial\varrho}{\sqrt{1-\varrho^2}},$$

und wenn $\varrho=\sqrt{u}$:

$$\int_0^1\frac{\varrho^{k-1}(1-\varrho)}{\sqrt{1-\varrho^2}}\partial\varrho=\frac{1}{2}\int_0^1 u^{\frac{k}{2}-1}(1-u)^{-\frac{1}{2}}\partial u-\frac{1}{2}\int_0^1 u^{\frac{1}{2}k-\frac{1}{2}}(1-u)^{-\frac{1}{2}}\partial u$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}-\frac{1}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right)}$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left[\frac{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}-\frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+2}{2}\right)}\right].$$

§. 109.

I. Es sey das Doppelintegral

$$\int_0^\alpha\partial x\int_0^{\varphi(x)}f(ax+by)\,\partial y\qquad\text{(a)}$$

zur Bestimmung vorgelegt, wo $\varphi(x)$ eine bekannte Funktion von x, α aber konstant ist. Setzen wir $f(ax+by)=z$, so stellt

$$\int_0^\alpha \partial x \int_0^{\varphi(x)} z \partial y$$

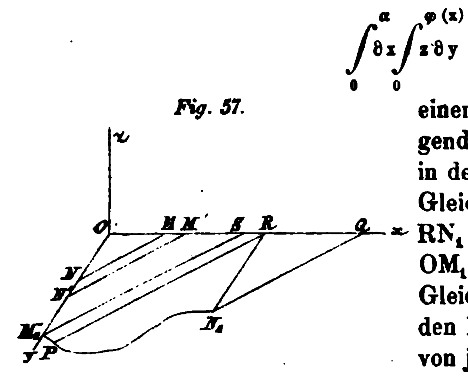


Fig. 57.

einen Körperinhalt vor (§. 60), der folgendermassen begränzt ist: Ist $M_1 N_1$ in der Ebene der xy eine Kurve, deren Gleichung $y = \varphi(x)$, ferner $OR = \alpha$, RN_1 parallel mit der Axe der y, über OM_1RN_1 eine Fläche errichtet, deren Gleichung $z = f(ax + by)$, so stellt (a) den Inhalt des über OM_1RN_1 liegenden, von jener Fläche oben begränzten Körpers vor. Was nun aber diesen Inhalt anbelangt, so kann er auch noch in anderer Weise gefunden werden. Setzt man nämlich

$$ax + by = \omega, \quad z = f(\omega), \qquad \text{(b)}$$

so ist offenbar z konstant, wenn ω es ist, während die erste Gleichung (b) für ein konstantes ω eine Ebene darstellt, die senkrecht auf der Ebene der xy steht, und die Axen der x und y in Punkten trifft, für die $x = \frac{\omega}{a}$, $y = \frac{\omega}{b}$. Stelle MN die Durchschnittslinie dieser Ebene und der Ebene der xy vor, so ist also $OM = \frac{\omega}{a}$, $ON = \frac{\omega}{b}$. Lassen wir ω um $\Delta\omega$ zunehmen, so erhalten wir eine zweite Gerade und Ebene M′N′, die mit MN parallel ist; zwischen beiden Ebenen liegt ein Stück des betrachteten Körpers, das wir nun berechnen wollen.

Die Fläche des Dreiecks MON ist $\frac{\omega^2}{2ab}$, die von $OM'N' = \frac{(\omega + \Delta\omega)^2}{2ab}$, also die von $MNN'M'$: $\frac{(\omega + \Delta\omega)^2 - \omega^2}{2ab} = \frac{2\omega\Delta\omega + \Delta\omega^2}{2ab}$. Was nun aber z anbelangt, so ist dasselbe $= f(\omega)$, so dass, wenn $\Delta\omega$ sehr klein ist, z nahezu denselben Werth haben wird für alle Punkte der über MNM′N′ liegenden Oberfläche. Setzt man also $z = f(\omega) + k$, so ist k eine Grösse, die mit $\Delta\omega$ verschwindet, und wenn man k sofort weglässt, so hat man nur das weggelassen, was schliesslich doch wegfallen würde. Setzen wir also $z = f(\omega)$ voraus, so ist der Inhalt des fraglichen Körperstücks

$$\frac{\omega f(\omega)}{ab}\Delta\omega + \frac{f(\omega)}{2ab}\Delta\omega^2.$$

Lässt man nun ω alle Werthe annehmen, die diese Grösse annehmen kann, indem man durch die (unendlich kleinen) Unterschiede $\Delta\omega$ fortgeht, so erhält man eine Reihe solcher Körperstücke, deren Summe dem Inhalte des ganzen Körpers gleich seyn wird. (D. h. letzterer ist der Gränzwerth, dem sich die Summen der Grössen von der Form $\frac{\omega[f(\omega)+k]}{ab}\Delta\omega + \frac{(f(\omega)+k)}{2ab}\Delta\omega^2$ nähert). Da aber hiebei die Grössen $\frac{f(\omega)}{2ab}\Delta\omega^2$ eine Summe $= \Delta\omega \int \frac{f(\omega)}{2ab}\partial\omega$

geben, also wegen des unendlich kleinen $\Delta\omega$ diese Summe Null ist, so ist der fragliche Körperinhalt nothwendig $= \frac{1}{ab}\int \omega f(\omega)\partial\omega$, wo man nun noch die Gränzen des bestimmten Integrals zu ermitteln hat. Der unterste Werth von ω ist Null, da dann die fragliche Parallele durch den Anfangspunkt geht. Sodann kann man die Parallelen ziehen bis M_1S, und die obigen Formeln gelten ungestört. Was diese letzte Parallele anbelangt, so ist für sie OM_1 die Ordinate desjenigen Punktes, in dem die Kurve M_1N_1 die Ordinatenaxe trifft, sie ist also $=\varphi(0)$, und demnach der entsprechende Werth von ω : $b\varphi(0)$, so dass also der über OSM_1 stehende Körpertheil $= \frac{1}{ab}\int_0^{b\varphi(0)} \omega f(\omega)\partial\omega$.

Nun hat man aber die Körpertheile zu berechnen, die zwischen den Parallelen SM_1, PR, sowie zwischen PR und N_1Q liegen. Was die ersteren anbelangt, so sind es Stücke, die ganz zu dem Körper gehören, während bei den zweiten nur ein Theil zum Körper zu rechnen ist. Denken wir uns nun zwischen M_1S und PR eine weitere Parallele gezogen, deren Gleichung $\omega = ax + by$ sey, so wird dieselbe die Kurve M_1N_1 in einem Punkte treffen, den man aus den Gleichungen

$$ax + by = \omega,\quad y = \varphi(x)$$

erhält, aus denen folgt $ax + b\varphi(x) = \omega$, welche Gleichung, da wir nur einen Durchschnittspunkt annehmen, auch nur einen Werth von x für jedes ω geben darf, das zwischen $b\varphi(0)$ und $a\alpha$ liegt, welch letzterer Werth PR zukommt. Folgt nun hieraus $x = \psi(\omega)$, so wird man also für die Koordinaten des Durchschnittspunkts mit M_1N_1 haben: $x = \psi(\omega)$, $y = \frac{\omega - a\psi(\omega)}{b}$, so dass die Länge jener Parallelen, da der Durchschnittspunkt mit OR durch $x = \frac{\omega}{a}$ gegeben ist, seyn wird:

$$\sqrt{\left[\frac{\omega}{a} - \psi(\omega)\right]^2 + \left[\frac{\omega - a\psi(\omega)}{b}\right]^2} = \pm\frac{[\omega - a\psi(\omega)]\sqrt{a^2+b^2}}{ab},$$

wo, da hier immer $\omega - a\psi(\omega) > 0$, das obere Zeichen zu wählen ist. Die Länge der vom Anfangspunkt auf diese Parallele gezogenen Senkrechten ist $\frac{\omega}{\sqrt{a^2+b^2}}$, so dass, wenn ω um $\Delta\omega$ zunimmt, diese letzte um $\frac{\Delta\omega}{\sqrt{a^2+b^2}}$ zunehmen wird, mithin das Flächenstückchen zwischen unendlich nahen solcher Parallelen durch $\frac{[\omega - a\psi(\omega)]\sqrt{a^2+b^2}}{ab} \cdot \frac{\Delta\omega}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{[\omega - a\psi(\omega)]\Delta\omega}{ab}$ gegeben seyn wird. Daraus folgt, dass der über SM_1PR stehende Körper gleich

$$\frac{1}{ab}\int_{b\varphi(0)}^{a\alpha} [\omega - a\psi(\omega)]\, f(\omega)\,\partial\omega.$$

In derselben Weise ist der über RPN_1Q stehende, da für PR : $\omega = a\alpha$, für N_1Q : $\omega = a\alpha + b\varphi(\alpha)$, indem die Koordinaten von N_1 sind: α und $\varphi(\alpha)$, gleich

$$\frac{1}{ab}\int_{a''}^{a\alpha+b\varphi(\alpha)}[\omega-a\psi(\omega)]\,f(\omega)\,\partial\omega.$$

Davon ist nun zu subtrahiren das über RN_1Q stehende Stück, das in ganz ähnlicher Weise wie das über OSM_1 stehende berechnet wird. Ist nämlich $ax+by=\omega$ die Gleichung einer zwischen PR und N_1Q liegenden Parallelen, so trifft sie RQ im Punkte $x=\frac{\omega}{a}$, RN_1 in $x=\alpha$, $y=\frac{\omega-a\alpha}{b}$, so dass das Dreieck zwischen diesen zwei Punkten und $R=\frac{(\omega-a\alpha)^2}{2ab}$ ist, und also, wenn ω nun das unendlich kleine $\Delta\omega$ zunimmt, selbst zunimmt nun $\frac{\omega-a\alpha}{ab}\Delta\omega$, so dass also der fragliche Körper =

$$\frac{1}{ab}\int_{a\alpha}^{a\ +b\varphi(\alpha)}(\omega-a\alpha)\,f(\omega)\,\partial\omega$$

ist. Daraus nun endlich:

$$\int_0^\alpha\partial x\int_0^{\varphi(x)}f(ax+by)\,\partial y=\frac{1}{ab}\int_0^{b\varphi(0)}\omega f(\omega)\,\partial\omega+\frac{1}{ab}\int_{b\varphi(0)}^{a\alpha}[\omega-a\psi(\omega)]\,f(\omega)\,\partial\omega$$
$$+\frac{1}{ab}\int_{a\alpha}^{a\alpha+b\varphi(\alpha)}[\omega-a\psi(\omega)]\,f(\omega)\,\partial\omega-\frac{1}{ab}\int_{a\alpha}^{a\alpha+b\varphi(\alpha)}(\omega-a\alpha)\,f(\omega)\,\partial\omega$$
$$=\frac{1}{ab}\int_0^{b\varphi(0)}\omega f(\omega)\,\partial\omega+\frac{1}{ab}\int_{b\varphi(0)}^{a\alpha+b\varphi(\alpha)}[\omega-a\psi(\omega)]\,f(\omega)\,\partial\omega-\frac{1}{ab}\int_{a\alpha}^{a\alpha+b\varphi(\alpha)}(\omega-a\alpha)\,f(\omega)\,\partial\omega$$
$$=\frac{1}{ab}\int_0^{a\alpha}\omega f(\omega)\,\partial\omega+\frac{\alpha}{b}\int_{a\alpha}^{a\alpha+b\varphi(\alpha)}f(\omega)\,\partial\omega-\frac{1}{b}\int_{b\varphi(0)}^{a\alpha+b\varphi(\alpha)}\psi(\omega)\,f(\omega)\,\partial\omega,\qquad(A)$$

wo $\psi(\omega)$ der (einzige) Werth von x ist, der aus $ax+b\varphi(x)=\omega$ folgt, in so ferne wenigstens ω zwischen $b\varphi(0)$ und $a\alpha+b\varphi(\alpha)$ liegt.

Ist $\varphi(x)$ konstant $=\beta$, so folgt aus $ax+b\varphi(x)=\omega$: $x=\frac{\omega-b\beta}{a}=\psi(\omega)$, also ist

$$\int_0^\alpha\partial x\int_0^\beta f(ax+by)\,\partial y=\frac{1}{ab}\int_0^{a\alpha}\omega f(\omega)\,\partial\omega+\frac{\alpha}{b}\int_{a\alpha}^{a\alpha+b\beta}f(\omega)\,\partial\omega-\frac{1}{ab}\int_{b\beta}^{a\alpha+b\beta}(\omega-b\beta)f(\omega)\partial\omega.\qquad(c)$$

Kann $\alpha=\beta=\infty$ seyn, so ist hieraus (bei positiven a und b)

$$\int_0^\infty\partial x\int_0^\infty f(ax+by)\,\partial y=\frac{1}{ab}\int_0^\infty\omega f(\omega)\,\partial\omega.\qquad(d)$$

Setzt man z. B. $f(\omega)=\omega^{n-2}e^{-\omega}$, dabei a und b positiv, so ist

$$\iint_0^\infty(ax+by)^{n-2}e^{-(ax+by)}\partial x\,\partial y=\frac{1}{ab}\int_0^\infty\omega^{n-1}e^{-\omega}\partial\omega=\frac{\Gamma(n)}{ab}.$$

II. Es sey eben so das Integral

$$\int_0^\alpha \partial x \int_0^{\varphi(x)} f(ax^2+by^2)\,\partial y, \qquad (e)$$

wo α, a, b positiv seyn sollen, vorgelegt. Setzt man auch hier

$$z=f(ax^2+by^2), \qquad (e')$$

Fig. 58.

so stellt (e) abermals den Inhalt eines Körpers vor, der über der Fläche OACB (F.58) stehend, von der Fläche (e′) begränzt ist, wenn $y=\varphi(x)$ die Gleichung der Kurve BC, und $OA=\alpha$ ist. Setzt man nun $ax^2+by^2=\omega$, so ist $z=f(\omega)$, also z konstant, wenn ω es ist; ist dies aber der Fall, so drückt

$$ax^2+by^2=\omega \qquad (f)$$

einen elliptischen Zylinder aus, der auf der Ebene der xy senkrecht steht. Die Halbaxen der Grundfläche, die nach OA und OB gerichtet sind, haben $\sqrt{\frac{\omega}{a}}$, $\sqrt{\frac{\omega}{b}}$ zur Länge. Seyen nun MP, M′P′ zwei Ellipsen, die zwei auf einander folgenden Werthen $(\omega, \omega+\Delta\omega)$ in (f) entsprechen, so wird die Fläche MOP $= \frac{1}{4}\frac{\omega\pi}{\sqrt{ab}}$ (§. 53) seyn, so dass die zwischen MP und M′P′ liegende Fläche $= \frac{1}{4}\frac{\pi\Delta\omega}{\sqrt{ab}}$ ist; für alle Punkte der über MPP′M′ liegenden Oberfläche (e′) ist $z=f(\omega)$ als konstant anzusehen, so dass das über diesem Streifen liegende Körperstück $= \frac{1}{4}\frac{\pi\Delta\omega}{\sqrt{ab}} f(\omega)$ ist. (Für den Fall, den die Figur angibt, gehört allerdings dieses ganze Stück nicht zum Körper, vielmehr ist das über NPP′N′ stehende Körperstück davon abzurechnen.) Was die durch C gehende Ellipse anbelangt, so muss, um das ihr entsprechende ω zu finden, in (f) $x=\alpha$, $y=\varphi(\alpha)$ gesetzt werden, so dass für sie $\omega=a\alpha^2+b\varphi(\alpha)^2$ ist, mithin ist der über OEF stehende Körper $=$

$$\frac{\pi}{4\sqrt{ab}}\int_0^{a\alpha^2+b\varphi(\alpha)^2} f(\omega)\,\partial\omega.$$

Davon sind nun abzurechnen die über BCF und ACE stehenden Stücke. Um diese berechnen zu können, müssen wir im Stande seyn, die Fläche des Stücks NPP′N′ zu erhalten; kennen wir aber BNP als Funktion von ω, so ist $NPP'N' = \frac{\partial(BNP)}{\partial\omega}\Delta\omega$, da ja wenn $BNP=F(\omega)$, $BN'P'=F(\omega+\Delta\omega)$, also (für unendlich kleine $\Delta\omega$) $NN'P'P = F(\omega+\Delta\omega)-F(\omega) = \frac{F(\omega+\Delta\omega)-F(\omega)}{\Delta\omega}\Delta\omega = \frac{\partial F(\omega)}{\partial\omega}\Delta\omega$, so dass es sich bloss um die Bestimmung von BNP handelt. Nun erhält man die Koordinaten des Punktes N aus den Gleichungen

$$y=\varphi(x),\ ax^2+by^2=\omega;\ ax^2+b\varphi(x)^2=\omega,$$

aus welch letzterer Gleichung $x=\psi(\omega)$ als einziger Werth folge; alsdann ist der Inhalt der Fläche BNP nach §. 53

$$=\int_0^{\psi(\omega)}\left[\sqrt{\frac{\omega-ax^2}{b}}-\varphi(x)\right]\partial x,$$

von welcher Grösse der Differentialquotient nach ω (§. 61) ist

$$\frac{1}{2\sqrt{b}}\int_0^{\psi(\omega)}\frac{\partial x}{\sqrt{\omega-ax^2}}+\left[\sqrt{\frac{\omega-a\psi(\omega)^2}{b}}-\varphi(\psi(\omega))\right]\frac{\partial\psi(\omega)}{\partial\omega}$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{ab}}\operatorname{arc}\left[\sin=\psi(\omega)\sqrt{\frac{a}{\omega}}\right]+\left[\sqrt{\frac{\omega-a\psi(\omega)^2}{b}}-\varphi(\psi(\omega))\right]\psi'(\omega),$$

wo aber, da $a\psi(\omega)^2+b\varphi(\psi(\omega))^2=\omega$, also $\varphi(\psi(\omega))=\sqrt{\frac{\omega-a\psi(\omega)^2}{b}}$, das letzte Glied wegfällt. Demgemäss ist endlich das über BCF stehende Körperstück, indem für die durch B gehende Ellipse $\omega=b\varphi(0)^2$:

$$\frac{1}{2\sqrt{ab}}\int_{b\varphi(0)^2}^{a\alpha^2+b\varphi(\alpha)^2}\operatorname{arc}\left[\sin=\psi(\omega)\sqrt{\frac{a}{\omega}}\right]f(\omega)\,\partial\omega.$$

Was nun weiter das über ACE stehende Körperstück anbelangt, so denken wir uns einen elliptischen Bogen GH, dessen Gleichung die (f) sey; die Abszissen von A und G sind: α und $\sqrt{\frac{\omega}{a}}$, so dass die Fläche

$$GAH=\int_\alpha^{\sqrt{\frac{\omega}{a}}}\sqrt{\frac{\omega-ax^2}{b}}\partial x \text{ ist, und } \frac{\partial(GAH)}{\partial\omega}=\frac{1}{2\sqrt{b}}\int_\alpha^{\sqrt{\frac{\omega}{a}}}\frac{\partial x}{\sqrt{\omega-ax^2}}$$

$$+\sqrt{\frac{\omega-\frac{a\omega}{a}}{b}}=\frac{1}{2\sqrt{ab}}\operatorname{arc}\left(\sin=\sqrt{\frac{\omega}{a}}\sqrt{\frac{a}{\omega}}\right)-\frac{1}{2\sqrt{ab}}\operatorname{arc}\left(\sin=\alpha\sqrt{\frac{a}{\omega}}\right)$$

$$=\frac{\pi}{4\sqrt{ab}}-\frac{1}{2\sqrt{ab}}\operatorname{arc}\left(\sin=\alpha\sqrt{\frac{a}{\omega}}\right),$$

so dass das über AEC stehende Körperstück, für das zuerst $\omega=a\alpha^2$ (für die durch A gehende Ellipse), gleich

$$\frac{\pi}{4\sqrt{ab}}\int_{a\alpha^2}^{a\alpha^2+b\varphi(\alpha)^2}f(\omega)\,\partial\omega-\frac{1}{2\sqrt{ab}}\int_{a\alpha^2}^{a\alpha^2+b\varphi(\alpha)^2}\operatorname{arc}\left(\sin=\alpha\sqrt{\frac{a}{\omega}}\right)f(\omega)\,\partial\omega,$$

und also

$$\int_0^\alpha\partial x\int_0^{\varphi(x)}f(ax^2+by^2)\,\partial y=\frac{\pi}{4\sqrt{ab}}\int_0^{a\alpha^2+b\varphi(\alpha)^2}f(\omega)\,\partial\omega-\frac{1}{2\sqrt{ab}}\int_{b\varphi(0)^2}^{a\alpha^2+b\varphi(\alpha)^2}\operatorname{arc}\left[\sin=\psi(\omega)\sqrt{\frac{a}{\omega}}\right]f(\omega)\,\partial\omega$$

$$-\frac{\pi}{4\sqrt{ab}}\int_{a\alpha^2}^{a\alpha^2+b\varphi(\alpha)^2}f(\omega)\,\partial\omega+\frac{1}{2\sqrt{ab}}\int_{a\alpha^2}^{a\alpha^2+b\varphi(\alpha)^2}\operatorname{arc}\left(\sin=\alpha\sqrt{\frac{a}{\omega}}\right)f(\omega)\,\partial\omega$$

$$=\frac{\pi}{4\sqrt{ab}}\int_0^{a\alpha^2} f(\omega)\,\partial\omega-\frac{1}{2\sqrt{ab}}\int_{b\varphi(0)^2}^{a\alpha^2+b\varphi(\alpha)^2}\text{arc}\left[\sin=\psi(\omega)\sqrt{\frac{a}{\omega}}\right]f(\omega)\,\partial\omega$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{ab}}\int_{a\alpha^2}^{a\alpha^2+b\varphi(\alpha)^2}\text{arc}\left(\sin=\alpha\sqrt{\frac{a}{\omega}}\right)f(\omega)\,\partial\omega. \qquad \text{(B)}$$

Hierin ist $\psi(\omega)$ der aus $ax^2+b\varphi(x)^2=\omega$ folgende einzige Werth von x. Für $\varphi(x)=\beta$, d. h. konstant, ist $\psi(\omega)=\sqrt{\frac{\omega-b\beta^2}{a}}$, also

$$\int_0^\alpha\partial x\int_0^\beta f(ax^2+by^2)\,\partial y=\frac{\pi}{4\sqrt{ab}}\int_0^{a\alpha^2}f(\omega)\,\partial\omega-\frac{1}{2\sqrt{ab}}\int_{b\beta^2}^{a\alpha^2+b\beta^2}\text{arc}\left(\sin=\sqrt{\frac{\omega-b\beta^2}{\omega}}\right)f(\omega)\,\partial\omega$$

$$+\frac{1}{2\sqrt{ab}}\int_{a\alpha^2}^{a\alpha^2+b\beta^2}\text{arc}\left(\sin=\alpha\sqrt{\frac{a}{\omega}}\right)f(\omega)\,\partial\omega. \qquad \text{(g)}$$

Für $\alpha=\beta=\infty$, wenn dies zulässig, folgt hieraus (§. 52)

$$\int\!\!\int_0^\infty f(ax^2+by^2)\,\partial x\,\partial y=\frac{\pi}{4\sqrt{ab}}\int_0^\infty f(\omega)\,\partial\omega. \qquad \text{(g')}$$

Setzt man etwa wieder $f(\omega)=\omega^{n-1}e^{-\omega}$, so ist

$$\int\!\!\int_0^\infty (ax^2+by^2)^{n-1}e^{-(ax^2+by^2)}\,\partial x\,\partial y=\frac{\pi}{4\sqrt{ab}}\int_0^\infty\omega^{n-1}e^{-\omega}\,\partial\omega=\frac{\pi\Gamma(n)}{4\sqrt{ab}}. \qquad \text{(h)}$$

Für $n=1$ folgt hieraus

$$\int_0^\infty e^{-ax^2}\partial x\int_0^\infty e^{-by^2}\partial y=\frac{\pi}{4\sqrt{ab}},$$

und wenn $b=a$:

$$\left(\int_0^\infty e^{-ax^2}\partial x\right)^2=\frac{\pi}{4a},\quad\int_0^\infty e^{-ax^2}\partial x=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}} \text{ (§. 62).}$$

Diese beiden Beispiele mögen hinreichen, um den Geist dieser Methode der Reduktion vielfacher Integrale klar zu machen. Die angewandten geometrischen Betrachtungen haben offenbar nur zur Verdeutlichung gedient und die Resultate könnten eben so auf analytischem Wege gefunden werden.

§. 110.

Die Einführung neuer Integrations-Veränderlichen ist natürlich eines der wichtigsten Hilfsmittel zur Auswerthung bestimmter Integrale. Wir haben davon schon vielfach Gebrauch gemacht, und wollen nun an einigen weiteren Beispielen dies erläutern.

I. Wie man nach §. 51 leicht findet, ist das in §. 108, I untersuchte Integral, für welches die Gränzen von y sind 0 und $\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$, von x : 0 und a, gleich

$$\int_0^a \partial x \int_0^b \sqrt{\frac{1-\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)\frac{x^2}{a^2}-\left(1-\frac{c^2}{b^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\frac{y^2}{b^2}}{1-\frac{y^2}{b^2}}}\,\partial y,$$

so dass, wenn man $x = a\sin\varphi$, $y = b\sin\psi$ setzt, dasselbe zu

$$ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\,\partial\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2\varphi\cos^2\psi + \frac{c^2}{a^2}\sin^2\varphi + \frac{c^2}{b^2}\cos^2\varphi\sin^2\psi}\;\partial\psi.$$

wird. Demnach ist

$$\iint_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\sqrt{a^2b^2\cos^2\varphi\cos^2\psi + a^2c^2\cos^2\varphi\sin^2\psi + b^2c^2\sin^2\varphi}\;\partial\varphi\,\partial\psi = \frac{\pi c^2}{4}$$

$$+\frac{\pi b}{4\sqrt{a^2-c^2}}\left[(a^2-c^2)E(\omega,e)+c^2F(\omega,e)\right],\ \cos\omega = \frac{c}{a},\ e = \frac{a}{b}\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}};\ a>b>c, \quad (a)$$

welches Resultat jedoch auch unmittelbar gefunden werden kann.

II. In dem dreifachen Integrale

$$\iiint_0^\infty f(x^2+y^2+z^2)\,\partial x\,\partial y\,\partial z$$

wollen wir setzen

$$x = r\cos\varphi\cos\psi,\quad y = r\sin\varphi\cos\psi,\quad z = r\sin\psi,$$

so ist in §. 52, IV u durch r, v durch φ, w durch ψ zu ersetzen. Die dortigen Gleichungen (k′), (k_1) sind $(x^2+y^2)\sin^2\psi = z^2\cos^2\psi$, $x\sin\varphi\cos\psi = y\cos\varphi\cos\psi$ und geben: die erste für $z=0$ auch $\psi=0$, für $z=\infty$ dagegen $\psi=\frac{\pi}{2}$; die zweite für $y=0$ auch $\varphi=0$, für $y=\infty$ aber $\varphi=\frac{\pi}{2}$; endlich folgt aus $x = r\cos\varphi\cos\psi$, dass für $x=0$ und ∞, auch $r=0$ und ∞ sey. Die dortige Grösse M ist

$$\sin\psi[r\sin\varphi\cos\psi\, r\sin\varphi\sin\psi + r\cos\varphi\sin\psi\, r\cos\varphi\cos\psi] + r\cos\psi[\cos\varphi\cos\psi\, r\cos\varphi\cos\psi + r\sin\varphi\cos\psi\sin\varphi\cos\psi] = r^2\cos\psi,$$

so dass also

$$\iiint_0^\infty f(x^2+y^2+z^2)\,\partial x\,\partial y\,\partial z = \int_0^\infty r^2\,\partial r\int_0^{\frac{\pi}{2}}\partial\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\psi\, f(r^2)\,\partial\psi,$$

d. h. (wenn man die Integrationen nach φ und ψ vollzieht):

$$\iiint_0^\infty f(x^2+y^2+z^2)\,\partial x\,\partial y\,\partial z = \frac{\pi}{2}\int_0^\infty r^2 f(r^2)\,\partial r. \qquad (b)$$

Sind a, b, c positiv und man setzt ax, by, cz für x, y, z, so ergibt sich hieraus

$$\iiint_0^\infty f(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2)\,\partial x\,\partial y\,\partial z = \frac{\pi}{2abc}\int_0^\infty r^2 f(r^2)\,\partial r, \qquad (c)$$

welche Gleichung, indem man $r^2=\omega$ setzt, auch ist:

$$\int_b^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty f(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2)\,\partial x\,\partial y\,\partial z=\frac{\pi}{4abc}\int_0^\infty f(\omega)\sqrt{\omega}\,\partial\omega. \qquad (c')$$

Daraus folgt leicht

$$\iiint_{-\infty}^{+\infty} f(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2)\,\partial x\,\partial y\,\partial z=\frac{2\pi}{abc}\int_0^\infty f(\omega)\sqrt{\omega}\,\partial\omega,$$

auf welches Integral sich das allgemeinere

$$\iiint_{-\infty}^{+\infty} f(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2+\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta)\,\partial x\,\partial y\,\partial z$$

reduziren lässt. Setzt man nämlich hier $x=x'-\frac{1}{2}\frac{\alpha}{a^2}$, $y=y'-\frac{1}{2}\frac{\beta}{b^2}$, $z=z'-\frac{1}{2}\frac{\gamma}{c^2}$, so wird

$$a^2x^2+\ldots+\delta=a^2x'^2+b^2y'^2+c^2z'^2+\frac{1}{4}\left(\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}+\frac{\gamma^2}{c^2}\right)+\delta-\frac{1}{2}\left(\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}+\frac{\gamma^2}{c^2}\right),$$

so dass wenn

$$\delta-\frac{1}{4}\left(\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}+\frac{\gamma^2}{c^2}\right)=\varrho:$$

$$\iiint_{-\infty}^{+\infty} f(a^2x^2+\ldots+\delta)\,\partial x\,\partial y\,\partial z=\iiint_{-\infty}^{+\infty} f(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2+\varrho)\,\partial x\,\partial y\,\partial z$$

$$\varrho=\frac{2\pi}{abc}\int_0^\infty f(\omega+\varrho)\sqrt{\omega}\,\partial\omega,$$

so dass also

$$\iiint_{-\infty}^{+\infty} f(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2+\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta)\,\partial x\,\partial y\,\partial z=\frac{2\pi}{abc}\int_0^\infty f(\omega+\varrho)\sqrt{\omega}\,\partial\omega, \qquad (d)$$

$$e=\delta-\frac{1}{4}\left[\left(\frac{\alpha}{a}\right)^2+\left(\frac{\beta}{b}\right)^2+\left(\frac{\gamma}{c}\right)^2\right].$$

III. Um das dreifache Integral

$$\iiint\frac{\partial x\,\partial y\,\partial z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \qquad (e)$$

ausgedehnt auf alle positiven und negativen Werthe von x, y, z, für welche

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\leqq 0, \qquad (e')$$

zu bestimmen, beachten wir, dass die Bedingung (e′) sagt, es sollen alle Punkte, deren Koordinaten in dem Integrale (e) vorkommen, innerhalb des dreiaxigen Ellipsoids liegen, dessen Gleichung $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ ist. Daraus folgt ganz unmittelbar, dass wenn man in (e) für x, y, z drei neue Veränderliche r, φ, ψ einführt (§. 60), so dass

$$x=r\cos\varphi\cos\psi,\quad y=r\sin\varphi\cos\psi,\quad z=r\sin\psi,$$

alsdann die Gränzen von φ sind 0 und 2π; die von ψ: $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$, während die von r sind: 0 und $\frac{1}{\sqrt{\frac{\cos^2\varphi\cos^2\psi}{a^2}+\frac{\sin^2\varphi\cos^2\psi}{b^2}+\frac{\sin^2\psi}{c^2}}}=\varrho$, welch letzterer Werth

aus der Gleichung des Ellipsoids sich ergibt. Da ferner $x^2+y^2+z^2=r^2$, so ist die Grösse (e) gleich

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\partial\psi\int_0^{2\pi}\partial\varphi\int_0^{\varrho}\frac{r^2\cos\psi}{r}\partial r=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\partial\psi\int_0^{2\pi}\cos\psi\,\partial\varphi\,.\,\varrho^2$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\partial\psi\int_0^{2\pi}\frac{\cos\psi\,\partial\varphi}{\frac{\cos^2\varphi\cos^2\psi}{a^2}+\frac{\sin^2\varphi\cos^2\psi}{b^2}+\frac{\sin^2\psi}{c^2}}$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\partial\psi\int_0^{2\pi}\frac{\cos\psi\,\partial\varphi}{\frac{\cos^2\varphi\cos^2\psi}{a^2}+\frac{\sin^2\varphi\cos^2\psi}{b^2}+\frac{\sin^2\psi}{c^2}}$$

$$=4a^2b^2c^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\psi\,\partial\varphi\,\partial\psi}{b^2c^2\cos^2\varphi\cos^2\psi+a^2c^2\sin^2\varphi\cos^2\psi+a^2b^2\sin^2\psi},$$

Um nun dieses Integral selbst zu ermitteln, wollen wir zuerst die Integration nach φ durchführen. Wir setzen zu dem Ende $b^2c^2\cos^2\psi+a^2b^2\sin^2\psi=\alpha^2$, $a^2c^2\cos^2\psi+a^2b^2\sin^2\psi=\beta^2$, und haben das Integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\partial\varphi}{\alpha^2\cos^2\varphi+\beta^2\sin^2\varphi}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\partial\varphi}{\beta^2-(\beta^2-\alpha^2)\cos^2\varphi}=\frac{1}{\beta^2-\alpha^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\partial\varphi}{\frac{\beta^2}{\beta^2-\alpha^2}-\cos^2\varphi}$$

zu bestimmen. Setzt man hier $\cos\varphi=x$, $\frac{\partial\varphi}{\partial x}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, so hat man

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\partial\varphi}{\alpha^2\cos^2\varphi+\beta^2\sin^2\varphi}=\frac{1}{\beta^2-\alpha^2}\int_0^1\frac{\partial x}{\left(\frac{\beta^2}{\beta^2-\alpha^2}-x^2\right)\sqrt{1-x^2}}$$

$$=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{\frac{\sqrt{\beta^2}}{\sqrt{\beta^2-\alpha^2}}\sqrt{\frac{\beta^2}{\beta^2-\alpha^2}-1}}\cdot\frac{1}{\beta^2-\alpha^2}\ (\S.\ 50,\ \text{VII})=\frac{\pi}{2}\,\frac{1}{\alpha\beta},$$

so dass jetzt die Grösse (e) gleich

$$2a^2b^2c^2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\psi\,\partial\psi}{\sqrt{b^2c^2\cos^2\psi+a^2b^2\sin^2\psi}\sqrt{a^2c^2\cos^2\psi+a^2b^2\sin^2\psi}}$$

$$=2abc^2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\psi\,\partial\psi}{\sqrt{c^2\cos^2\psi+a^2\sin^2\psi}\sqrt{c^2\cos^2\psi+b^2\sin^2\psi}}.$$

Dieses Integral lässt sich leicht auf elliptische Integrale reduziren. Zu dem Ende setze man

$$\sin\psi=\frac{c}{\sqrt{a^2-c^2}}\operatorname{tg}\omega,\quad \cos\psi\frac{\partial\psi}{\partial\omega}=\frac{c}{\sqrt{a^2-c^2}}\,\frac{1}{\cos^2\omega},$$

$$c^2\cos^2\psi+a^2\sin^2\psi=c^2\left(1-\frac{c^2}{a^2-c^2}\operatorname{tg}^2\omega\right)+\frac{a^2c^2}{a^2-c^2}\operatorname{tg}^2\omega$$

$$=\frac{c^2[(a^2-c^2)\cos^2\omega-c^2\sin^2\omega]+a^2c^2\sin^2\omega}{(a^2-c^2)\cos^2\omega}=\frac{a^2c^2-c^4}{(a^2-c^2)\cos^2\omega}=\frac{c^2}{\cos^2\omega},$$

$$c^2\cos^2\psi+b^2\sin^2\psi=c^2\left(1-\frac{c^2}{a^2-c^2}tg^2\omega\right)+\frac{b^2c^2}{a^2-c^2}tg^2\omega$$

$$=\frac{c^2[a^2\cos^2\omega-c^2]+b^2c^2\sin^2\omega}{(a^2-c^2)\cos^2\omega}=\frac{c^2a^2-c^4-c^2a^2\sin^2\omega+b^2c^2\sin^2\omega}{(a^2-c^2)\cos^2\omega}$$

$$=\left(c^2-c^2\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}\sin^2\omega\right)\frac{1}{\cos^2\omega},$$

$$\sqrt{a^2\sin^2\psi+c^2\cos^2\psi}\sqrt{c^2\cos^2\psi+b^2\sin^2\psi}=\frac{c^2}{\cos^2\omega}\sqrt{1-\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}\sin^2\omega},$$

und da für $\psi=\frac{\pi}{2}$: $tg\,\omega=\sqrt{\frac{a^2-c^2}{c^2}}$, so wird, wenn ε durch die Gleichung $tg\,\varepsilon=\sqrt{\frac{a^2-c^2}{c^2}}$, $\cos\varepsilon=\frac{c}{a}$ bestimmt ist, zugleich $e^2=\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\psi\,\partial\psi}{\sqrt{c^2\cos^2\psi+a^2\sin^2\psi}\sqrt{c^2\cos^2\psi+b^2\sin^2\psi}}=\frac{1}{c\sqrt{a^2-c^2}}\int_0^{\varepsilon}\frac{\partial\omega}{\sqrt{1-e^2\sin^2\omega}}$$

$$=\frac{1}{c\sqrt{a^2-c^2}}F(\varepsilon,e);$$

mithin ist endlich die Grösse (e) gleich

$$\frac{2\pi abc}{\sqrt{a^2-c^2}}F(\varepsilon,e),\quad e^2=\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2},\quad \cos\varepsilon=\frac{c}{a},\quad a>b>c.$$

Man sieht leicht, dass das Integral (e) auch in folgender Weise dargestellt werden kann:

$$\int_{-a}^{+a}\partial x\int_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{+\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}\partial y\int_{-c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}^{+c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}\frac{\partial z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\qquad (f)$$

Es lässt sich dasselbe jedoch leicht in ein anderes umformen, das konstante Gränzen hat. Setzt man nämlich (§. 51):

$$z=cu\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}},$$

so ist dasselbe gleich

$$c\int_{-1}^{+1}\partial u\int_{-a}^{+a}\partial x\int_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{+\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}\frac{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,\partial y}{\sqrt{\left[x^2+y^2+c^2u^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)\right]}},$$

und wenn man wieder

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,v=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,v$$

setzt:

$$bc\int_{-1}^{+1}\partial u\int_{-1}^{+1}\partial v\int_{-a}^{+a}\frac{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)v^2}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}{\sqrt{\left[x^2+b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)v^2+c^2u^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)(1-v^2)\right]}}\partial x.$$

Setzt man hier endlich nach $x = aw$, so ist das Integral gleich

$$abc\iiint_{-1}^{+1}\sqrt{\frac{(1-w^2)(1-v^2)(1-w^2)}{a^2w^2+b^2v^2(1-w^2)+c^2u^2(1-w^2)(1-v^2)}}\,\partial u\,\partial v\,\partial w,$$

so dass also

$$\iiint_{-1}^{+1}\frac{(1-x^2)\sqrt{1-y^2}\,\partial x\,\partial y\,\partial z}{[a^2x^2+b^2y^2(1-x^2)+c^2z^2(1-x^2)(1-y^2)]^{\frac{3}{2}}}=\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-c^2}}F(\varepsilon, e). \quad (g)$$

Anm. Wollte man in dem letzten Integrale die früheren Grössen r, φ, ψ einführen, so müsste man jetzt setzen:

$$ax = r\cos\varphi\cos\psi,\ by\sqrt{1-x^2} = r\sin\varphi\cos\psi,\ cz\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)} = r\sin\psi,$$

d. h.

$$x = \frac{r}{a}\cos\varphi\cos\psi,\ y = \frac{ar}{b}\frac{\sin\varphi\cos\psi}{\sqrt{a^2-r^2\cos^2\varphi\cos^2\psi}},$$

$$z = \frac{ar}{c}\frac{\sin\psi}{\sqrt{(a^2-r^2\cos^2\varphi\cos^2\psi-\frac{a^2r^2}{b^2}\sin^2\varphi\cos^2\psi)}},$$

und r, φ, ψ hätten dieselbe Bedeutung wie im Frühern. Eliminirt man (§. 52, IV, V) r und ψ, so erhält man

$$\frac{ax}{by\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{cotg}\varphi;\ \text{also für } x=0:\varphi=\frac{\pi}{2},\ x=1:\varphi=0.$$

Eliminirt man r und x aus der zweiten und dritten, so hat man

$$\frac{by}{cz\sqrt{1-y^2}} = \sin\varphi\operatorname{cotg}\psi;\ \text{also für } y=0:\psi=\frac{\pi}{2},\ y=1:\psi=0.$$

Eliminirt man endlich x und y aus der dritten, so hat man

$$r^2\sin^2\psi = c^2z^2(1-x^2)(1-y^2) = c^2z^2\left(1-\frac{r^2\cos^2\varphi\cos^2\psi}{a^2}-\frac{r^2\sin^2\varphi\cos^2\psi}{b^2}\right),$$

$$r^2 = \frac{z^2}{\frac{\sin^2\psi}{c^2}+\left(\frac{\cos^2\varphi\cos^2\psi}{a^2}+\frac{\sin^2\varphi\cos^2\psi}{b^2}\right)z^2},$$

woraus für $z=0: r=0$, für $z=1: r=\varrho$, so dass

$$\int_0^1\int_0^1\int_0^1\frac{(1-x^2)\sqrt{1-y^2}\,\partial x\,\partial y\,\partial z}{[a^2x^2+b^2y^2(1-x^2)+c^2z^2(1-x^2)(1-y^2)]^{\frac{3}{2}}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\partial\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\partial\psi\int_0^{\varrho}r\cos\psi\,\partial r,$$

was mit III. zusammenstimmt. Man sieht hieraus, wie man die Gränzen von φ, ψ, r in dem Frühern auch nach §. 52 hätte finden können. Wir werden von dieser Bemerkung sogleich Gebrauch machen.

IV. Für x, y, z wollen wir ferner neue Veränderliche λ, μ, ν einführen, die mit x, y, z zusammenhängen durch die Gleichungen

$$\frac{x^2}{\lambda^2}+\frac{y^2}{\lambda^2-a^2}+\frac{z^2}{\lambda^2-c^2}=1,\ \frac{x^2}{\mu^2}+\frac{y^2}{\mu^2-a^2}+\frac{z^2}{\mu^2-c^2}=1,\ \frac{x^2}{\nu^2}+\frac{y^2}{\nu^2-a^2}+\frac{z^2}{\nu^2-c^2}=1, \quad (h)$$

wobei wir $c > a$, $\lambda > c$, $c > \mu > a$, $\nu < a$ voraussetzen wollen, wo dann für konstante λ, μ, ν die erste der Flächen (h) ein dreiaxiges Ellipsoid, die zweite ein einfächeriges, die dritte ein zweifächeriges Hyperboloid vorstellt, welche drei Flächen denselben Mittelpunkt haben. Die Gleichungen (h) lassen sich leicht nach x, y, z auflösen. Man setze nämlich

$$F(\varrho) = \varrho(\varrho-a^2)(\varrho-c^2),\ f(\varrho) = (\varrho-\lambda^2)(\varrho-\mu^2)(\varrho-\nu^2),$$

so ist $F(\varrho)-f(\varrho)$ in Bezug auf ϱ nur vom zweiten Grade, und mithin nach §. 38:

$$\frac{F(\varrho)-f(\varrho)}{F(\varrho)} = \frac{F(0)-f(0)}{F'(0)}\cdot\frac{1}{\varrho}+\frac{F(a^2)-f(a^2)}{F'(a^2)}\frac{1}{\varrho-a^2}+\frac{F(c^2)-f(c^2)}{F'(c^2)}\frac{1}{\varrho-c^2}.$$

welche Gleichung, da $F(0)=0$, $F(a^2)=0$, $F(c^2)=0$, auch heisst

$$\frac{F(\varrho)-f(\varrho)}{F(\varrho)}=-\frac{f(0)}{F'(0)}\frac{1}{\varrho}-\frac{f(a^2)}{F'(a^2)}\frac{1}{\varrho-a^2}-\frac{f(c^2)}{F'(c^2)}\frac{1}{\varrho-c^2}$$

und gilt, was auch immer ϱ sey. Setzt man nun nach einander $\varrho=\lambda^2, \mu^2, \nu^2$ und beachtet, dass dann immer $f(\varrho)=0$, so ist

$$1=-\frac{f(0)}{F'(0)}\frac{1}{\lambda^2}-\frac{f(a^2)}{F'(a^2)}\frac{1}{\lambda^2-a^2}-\frac{f(c^2)}{F'(c^2)}\frac{1}{\lambda^2-c^2},\ 1=-\frac{f(0)}{F'(0)}\frac{1}{\mu^2}-\frac{f(a^2)}{F'(a^2)}\frac{1}{\mu^2-a^2}$$
$$-\frac{f(c^2)}{F'(c^2)}\frac{1}{\mu^2-c^2},\ 1=-\frac{f(0)}{F'(0)}\frac{1}{\nu^2}-\frac{f(a^2)}{F'(a^2)}\frac{1}{\nu^2-a^2}-\frac{f(c^2)}{F'(c^2)}\frac{1}{\nu^2-c^2},$$

aus welchen drei Gleichungen ganz unmittelbar folgt, dass den Gleichungen (h) genügt wird, wenn

$$x^2=-\frac{f(0)}{F'(0)}=\frac{\lambda^2\mu^2\nu^2}{a^2c^2},\ y^2=-\frac{f(a^2)}{F'(a^2)}=-\frac{(a^2-\lambda^2)(a^2-\mu^2)(a^2-\nu^2)}{a^2(a^2-c^2)},$$
$$z^2=-\frac{f(c^2)}{F'(c^2)}=-\frac{(c^2-\lambda^2)(c^2-\mu^2)(c^2-\nu^2)}{c^2(c^2-a^2)},$$

so dass also aus (h) folgt:

$$acx=\pm\lambda\mu\nu,\ a\sqrt{c^2-a^2}\,y=\pm\sqrt{(\lambda^2-a^2)(\mu^2-a^2)(a^2-\nu^2)},$$
$$c\sqrt{c^2-a^2}\,z=\pm\sqrt{(\lambda^2-c^2)(c^2-\mu^2)(c^2-\nu^2)}, \qquad (h')$$

welche Gleichungen in Wahrheit acht Systeme von Werthen von x, y, z enthalten. Setzen wir x, y, z bloss positiv voraus, so ist es genug, die oberen Zeichen zu wählen. Alsdann wird die Grösse M in §. 52 (C) gleich

$$\frac{(\lambda^2-\mu^2)(\mu^2-\nu^2)(\lambda^2-\nu^2)}{\sqrt{(\lambda^2-a^2)(\mu^2-a^2)(a^2-\nu^2)(\lambda^2-c^2)(c^2-\mu^2)(c^2-\nu^2)}}.$$

Gesetzt nun, man habe das Integral $\int\int\int \partial x\,\partial y\,\partial z$, ausgedehnt auf alle positiven Werthe von x, y, z, für welche $\frac{x^2}{k^2}+\frac{y^2}{k^2-a^2}+\frac{z^2}{k^2-c^2}\overset{=}{<}1$, wo $k^2>c^2>a^2$, so drückt es den achten Theil des von dem Ellipsoide $\frac{x^2}{k^2}+\frac{y^2}{k^2-a^2}+\frac{z^2}{k^2-c^2}=1$ umschlossenen Körperraums aus. Will man nun λ, μ, ν einführen, und die Gränzen dieser Grössen bestimmen, so beachte man, dass

$$\int\int\int\partial x\partial y\partial z=\int_0^k\partial x\int_0^{\sqrt{k^2-a^2}\sqrt{1-\frac{x^2}{k^2}}}\partial y\int_0^{\sqrt{k^2-c^2}\sqrt{1-\frac{x^2}{k^2}-\frac{y^2}{k^2-a^2}}}\partial z$$
$$=k\sqrt{k^2-a^2}\sqrt{k^2-c^2}\int_0^1\int_0^1\int_0^1(1-x^2)\sqrt{1-y^2}\,\partial x\,\partial y\,\partial z,$$

so dass man jetzt zu setzen hat:

$$ackx=\lambda\mu\nu,\ \sqrt{k^2-a^2}.a\sqrt{c^2-a^2}\,y\sqrt{1-x^2}=\sqrt{(\lambda^2-a^2)(\mu^2-a^2)(a^2-\nu^2)},$$
$$c\sqrt{c^2-a^2}\sqrt{k^2-c^2}\,z\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}=\sqrt{(\lambda^2-c^2)(c^2-\mu^2)(c^2-\nu^2)},$$

oder

$$\frac{k^2x^2}{\lambda^2}+\frac{(k^2-a^2)y^2(1-x^2)}{\lambda^2-a^2}+\frac{(k^2-c^2)z^2(1-x^2)(1-y^2)}{\lambda^2-c^2}=1,$$
$$\frac{k^2x^2}{\mu^2}+\frac{(k^2-a^2)(1-x^2)y^2}{\mu^2-a^2}+\frac{(k^2-c^2)z^2(1-x^2)(1-y^2)}{\mu^2-c^2}=1,$$
$$\frac{k^2x^2}{\nu^2}+\frac{(k^2-a^2)(1-x^2)y^2}{\nu^2-a^2}+\frac{(k^2-c^2)z^2(1-x^2)(1-y^2)}{\nu^2-c^2}=1.$$

Jede dieser Gleichungen gibt

$$k^2x^2(\omega^2-a^2)(\omega^2-c^2)+(k^2-a^2)(1-x^2)y^2\omega^2(\omega^2-c^2)+(k^2-c^2)z^2(1-x^2)(1-y^2)\omega^2(\omega^2-a^2)$$
$$=\omega^2(\omega^2-a^2)(\omega^2-c^2),$$

wo $\omega = \lambda, \mu, \nu$ seyn kann. Setzen wir hier $\omega = \nu$, so wird für $x = 0$ auch $\nu = 0$ seyn müssen, während für $x = 1$, $\nu = a$ zu seyn hat; die Gränzen von ν sind also 0 und a. Nach §. 52, V hat man nun eine Gleichung ohne x und λ zu bilden. Dazu beachten wir, dass

$$\frac{x^2}{\lambda^2} = \frac{\mu^2\nu^2}{a^2c^2k^2},\ \frac{1-x^2}{\lambda^2-a^2} = \frac{(a^2-\mu^2)(a^2-\nu^2)}{a^2(a^2-c^2)(k^2-a^2)y^2},\ \frac{1-x^2}{\lambda^2-c^2} = \frac{(\mu^2-c^2)(c^2-\nu^2)}{c^2(a^2-c^2)(k^2-c^2)z^2(1-y^2)},$$

woraus dann durch Elimination von x^2 und λ^2 folgt:

$$[(k^2-a^2)(a^2-c^2)y^2+(a^2-\mu^2)(a^2-\nu^2)]\,[\mu^2\nu^2(a^2-c^2)(k^2-c^2)z^2(1-y^2)$$
$$+(\mu^2-c^2)(c^2-\nu^2)a^2k^2] = [(k^2-c^2)(a^2-c^2)z^2(1-y^2)$$
$$+(\mu^2-c^2)(c^2-\nu^2)]\,[\mu^2\nu^2c^2(k^2-a^2)(a^2-c^2)y^2+(a^2-\mu^2)(a^2-\nu^2)c^2k^2].$$

Hieraus ergibt sich für $y = 0 : \mu = a$, für $y = 1 : \mu = c$. Endlich muss man eine Gleichung ohne x und y bilden. Zu dem Ende ist

$$1-x^2 = 1-\frac{\lambda^2\mu^2\nu^2}{a^2c^2k^2},\ y^2(1-x^2) = \frac{(\lambda^2-a^2)(\mu^2-a^2)(a^2-\nu^2)}{a^2(c^2-a^2)(k^2-a^2)},$$

$$(1-y^2)(1-x^2) = 1-\frac{\lambda^2\mu^2\nu^2}{a^2c^2k^2}-\frac{(\lambda^2-a^2)(\mu^2-a^2)(a^2-\nu^2)}{a^2(c^2-a^2)(k^2-a^2)},$$

also

$$z^2c^2(c^2-a^2)(k^2-c^2)\left[1-\frac{\lambda^2\mu^2\nu^2}{a^2c^2k^2}-\frac{(\lambda^2-a^2)(\mu^2-a^2)(a^2-\nu^2)}{a^2(c^2-a^2)(k^2-a^2)}\right]$$
$$= (\lambda^2-c^2)(c^2-\mu^2)(c^2-\nu^2).$$

Für $z = 0$ ist also $\lambda = c$; für $z = 1$ findet man leicht, dass $\lambda = k$ der Gleichung genügt. Demnach ist (§. 52, Formel (C_6)):

$$\iiint \partial x\,\partial y\,\partial z = \int_c^k \partial\lambda \int_a^c \partial\mu \int_0^a \frac{(\lambda^2-\mu^2)(\mu^2-\nu^2)(\lambda^2-\nu^2)\,\partial\nu}{[(\lambda^2-a^2)(\mu^2-a^2)(a^2-\nu^2)(c^2-\mu^2)(\lambda^2-c^2)(c^2-\nu^2)]^{\frac{1}{2}}},$$

d. h. (§ 57, I):

$$\int_0^a \frac{\partial\nu}{\sqrt{(a^2-\nu^2)(c^2-\nu^2)}} \int_a^c \frac{(\mu^2-\nu^2)\,\partial\mu}{\sqrt{(\mu^2-a^2)(c^2-\mu^2)}} \int_c^k \frac{(\lambda^2-\mu^2)(\lambda^2-\nu^2)\,\partial\lambda}{\sqrt{(\lambda^2-a^2)(\lambda^2-c^2)}}$$
$$= \frac{\pi}{6}k\sqrt{k^2-c^2}\sqrt{k^2-a^2}.$$

Anm. Auf die in I. und III. ermittelten Integrale lassen sich viele andere zurückführen. So das Doppelintegral

$$\iint_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\psi\,\partial\varphi\,\partial\psi}{[a^2b^2\sin^2\psi+a^2c^2\sin^2\varphi\cos^2\psi+b^2c^2\cos^2\varphi\cos^2\psi]^n},$$

wenn n eine positive ganze Zahl ist. Setzt man nämlich wieder α^2, β^2 dasselbe wie in III., so ist das Integral =

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\psi\,\partial\psi\,\partial\varphi}{[\alpha^2\cos^2\varphi+\beta^2\sin^2\varphi]^n}.$$

Zunächst nun sey

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial\varphi}{[\alpha^2\cos^2\varphi+\beta^2\sin^2\varphi]^n} = B_n,$$

so ist (§. 61):

$$\frac{1}{\alpha}\frac{\partial B_n}{\partial\alpha}+\frac{1}{\beta}\frac{\partial B_n}{\partial\beta} = -2n\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}{[\alpha^2\cos^2\varphi+\beta^2\sin^2\varphi]^{n+1}}\partial\varphi = -2nB_{n+1},$$

und da $B_1 = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{\alpha\beta}$, so erhält man hieraus, indem man $n = 1, 2, \ldots$ setzt:

$$B_2 = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\alpha^3\beta} + \frac{1}{\alpha\beta^3}\right),\ B_3 = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2.4}\left[\frac{3}{\alpha^5\beta} + \frac{3}{\alpha\beta^5} + \frac{2}{\alpha^3\beta^3}\right], \ldots$$

so dass man B_n als bekannt ansehen darf. Alsdann kommt die Ermittlung des bestimmten Integrals auf die Bestimmung von

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\psi\, \partial\psi}{\alpha^{2n+1}\beta^{2m+1}} \partial\psi$$

zurück, die nun wie in III. geschieht, indem man auf elliptische Integrale zurückkommt.

Weitere Ausführungen hievon finden sich in einer Abhandlung des Verfassers in Grunerts Archiv XIII, S. 286 ff., wie denn auch in demselben Archive IX, S. 438, X, S. 90, XI, S. 88 ähnliche Reduktionen vorgenommen worden sind. Einige wichtige Abhandlungen von Tortolini finden sich in Crelles Journal der Mathematik XXXI und XXXVII, wozu der Verfasser im Bande XXXIX desselben Journals einige Zusätze geliefert hat, u. s. w.

§. 111.

Ein wichtiges Mittel zur Auswerthung bestimmter vielfacher Integrale, oder vielmehr zur Reduktion derselben auf einfache, bieten die Sätze (p) des §. 98 oder daraus leicht abzuleitende dar, wie wir nun an einigen Beispielen erläutern wollen

I. Man habe das nfache bestimmte Integral

$$\int\int\int \ldots e^{-(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2+\ldots)} f(x+y+z+\ldots)\partial x\, \partial y\, \partial z \ldots, \qquad \text{(a)}$$

worin $x, y, z, \ldots$ auf alle positiven und negativen Werthe ausgedehnt werden sollen, für welche (α und β positiv)

$$\alpha > x + y + z + \ldots > \beta \qquad \text{(a')}$$

Nach dem ersten der Sätze (p) in §. 98 ist

$$f(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} \partial u \int_0^a f(v)\cos(u\omega)\cos(uv)\partial v,$$

wenn ω zwischen 0 und a liegt, während für $\omega > a$, die Grösse zweiter Seite Null ist. Offenbar ist übrigens auch (§. 49, VII)

$$f(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(u\omega)\partial u \int_0^a f(v)\cos(uv)\partial v,$$

während unbedingt

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(u\omega)\partial u \int_0^a f(v)\cos(uv)\partial v = 0.$$

Daraus folgt, wenn $\sqrt{-1} = i$:

$$f(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} [\cos(u\omega) + i\sin(u\omega)]\partial u \int_0^a f(v)\cos(uv)\partial v = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{u\omega i} \partial u \int_0^a f(v)\cos(uv)\partial v.$$

Eben so ist

$$f(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{u\omega i}\partial u \int_0^{\alpha} f(v)\cos(uv)\partial v, \text{ von } \omega = 0 \text{ bis } \alpha,$$

$$f(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{u\omega i}\,\partial u\int_0^{\beta} f(v)\cos(uv)\,\partial v,\ \text{von } \omega=0 \text{ bis } \beta,$$

während jeweils jenseits dieser Gränzen die zweite Seite Null ist. Daraus folgt, dass

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{u\omega i}\,\partial u\int_{\beta}^{\alpha} f(v)\cos(uv)\,\partial v$$

gleich $f(\omega)$ seyn wird, wenn ω zwischen β und α liegt, Null jenseits dieser Gränzen. Setzt man also in (a) $x+y+z+..=\omega$, so ist dieses Integral auch gleich

$$\frac{1}{\pi}\int\int\int..e^{-(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2+..)}\partial x\,\partial y\,\partial z..\int_{-\infty}^{+\infty} e^{u\omega i}\,\partial u\int_{\beta}^{\alpha} f(v)\cos(uv)\,\partial v, \tag{b}$$

wo man nun die Gränzen von $x, y, z, \ldots$ von $-\infty$ bis $+\infty$ nehmen kann, indem der Faktor

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{u\omega i}\,\partial u\int_{\beta}^{\alpha} f(v)\cos(uv)\,\partial v$$

in all den Fällen Null ist, in denen ω nicht der Bedingung (a') entspricht, was, wie man leicht sieht, für negative ω eben so gilt, wie für positive. Daraus folgt, dass man die Grösse (b) auch schreiben kann:

$$\frac{1}{\pi}\int_{\beta}^{\alpha} f(v)\,\partial v\int_{-\infty}^{+\infty}\cos(uv)\,\partial u\,\overline{\int\int\int}_{-\infty}^{+\infty}..e^{-(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2+..)}e^{u\omega i}\,\partial x\,\partial y\,\partial z.., \tag{b'}$$

wo nun

$$\overline{\int\int\int}_{-\infty}^{+\infty}..e^{-(a^2x^2+..)}e^{u\omega i}\,\partial x\,\partial y\,\partial z..=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2x^2+uxi}\,\partial x\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-b^2y^2+uyi}\,\partial y\int_{-\infty}^{+} e^{-c^2z^2+uzi}\,\partial z$$

$$\ldots=\frac{\sqrt{\pi}}{a}e^{-\frac{u^2}{4a^2}}.\frac{\sqrt{\pi}}{b}e^{-\frac{u^2}{4b^2}}.\frac{\sqrt{\pi}}{c}e^{-\frac{u^2}{4c^2}}..\ (\S.\ 62,(e))=\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{abc..}e^{-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+..\right)u^2},$$

so dass, wenn $\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\ldots\right)=\varrho^2$, das Integral (b') gleich

$$\frac{\pi^{\frac{1}{2}n-1}}{abc\ldots}\int_{\beta}^{\alpha} f(v)\,\partial v\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\varrho^2u^2}\cos(uv)\,\partial u=\frac{\pi^{\frac{1}{2}n-1}}{abc\ldots}\int_{\beta}^{\alpha} f(v)\,\partial v.\frac{\sqrt{\pi}}{\varrho}e^{-\frac{v^2}{4\varrho^2}},$$

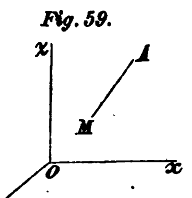
mithin endlich

$$\int\int\int..e^{-(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2+..)}f(x+y+z+..)\,\partial x\,\partial y\,\partial z=\frac{\pi^{\frac{1}{2}(n-1)}}{abc..\varrho}\int_{\beta}^{\alpha} e^{-\frac{v^2}{4\varrho^2}}f(v)\,\partial v, \tag{A}$$

wenn $\varrho^2=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\ldots\right)$, und das Integral sich auf alle Werthe von $x, y, z, ..$ erstreckt, für die

$$\alpha > x+y+z+\ldots > \beta.$$

II. Als ein zweites hieher gehöriges Beispiel wollen wir die Berechnung der Anziehung eines Ellipsoids auf einen materiellen Punkt wählen, wobei wir freilich nicht gerade von denselben Sätzen Gebrauch machen werden, jedoch immerhin in ähnlicher Weise zu verfahren haben.



Es stelle M (Fig. 59) ein körperliches Element des Ellipsoids vor, welches letztere wir aus Schichten uns bestehend denken, die jeweils jede für sich dieselbe Dichte haben, so dass wenn δ diese Dichte (= Masse in der Einheit des Körperinhalts) ist, dieselbe als eine Funktion der Grösse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$ erscheint, wo a, b, c die drei Halbaxen des Ellipsoids, x, y, z die Koordinaten von M sind, so wird der Inhalt des Elements $=\delta\,\Delta x\,\Delta y\,\Delta z$ seyn, wenn $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ die unendlich kleinen Zunahmen von x, y, z bedeuten. Sey μ die Masse des angezogenen Punkts A, r die Entfernung AM, so wird die Wirkung von M auf A durch $\varrho\frac{\mu\delta\Delta x\,\Delta y\,\Delta z}{r^2}$ ausgedrückt seyn, wo ϱ ein konstanter Koeffizient ist. Sind α, β, γ die Koordinaten von A, so ist $r^2=(\alpha-x)^2+(\beta-y)^2+(\gamma-z)^2$; ferner sind die Cosinus der Winkel, welche die Linie r mit den Koordinatenaxen macht, gleich $\frac{\alpha-x}{r}, \frac{\beta-y}{r}, \frac{\gamma-z}{r}$, und es sind also die Seitenkräfte der Anziehung von M gegen A, zerlegt nach den Koordinatenaxen:

$$\frac{\varrho\mu\delta(\alpha-x)\,\Delta x\,\Delta y\,\Delta z}{r^3},\quad \frac{\varrho\mu\delta\,\Delta x\,\Delta y\,\Delta z\,(\beta-y)}{r^3},\quad \frac{\varrho\mu\delta(\gamma-z)\,\Delta x\,\Delta y\,\Delta z}{r^3},$$

welche Kräfte in A angreifen und wo diejenigen als positiv angesehen werden, welche die Koordinaten von A zu verkleinern streben. Bildet man so die Seitenkräfte aller der Anziehungen der Elemente des Ellipsoids auf A, und addirt die nach derselben Richtung gehenden, so sieht man leicht, dass die Integrale

$$\varrho\mu\int\!\!\int\!\!\int\frac{\delta(\alpha-x)\,\partial x\,\partial y\,\partial z}{r^3},\ \varrho\mu\int\!\!\int\!\!\int\frac{\delta(\beta-y)\,\partial x\,\partial y\,\partial z}{r^3},\ \varrho\mu\int\!\!\int\!\!\int\frac{\delta(\gamma-z)\,\partial x\,\partial y\,\partial z}{r^3},\quad (c)$$

ausgedehnt auf alle positiven und negativen Werthe von x, y, z, für welche

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\overline{\gtrless}1,\ a>b>c \qquad (c')$$

die Seitenkräfte der gesammten Anziehung des dreiaxigen Ellipsoids, dessen Oberfläche zur Gleichung hat $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, auf den materiellen Punkt A ausdrücken. Setzt man

$$\int\!\!\int\!\!\int\frac{\delta\,\partial x\,\partial y\,\partial z}{r}=F, \qquad (d)$$

so ist

$$\frac{\partial F}{\partial\alpha}=-\int\!\!\int\!\!\int\frac{\delta\,\partial x\,\partial y\,\partial z}{r^2}\frac{\partial r}{\partial\alpha}=\int\!\!\int\!\!\int\frac{\delta(\alpha-x)}{r^3}\,\partial x\,\partial y\,\partial z,$$

$$\frac{\partial F}{\partial\beta}=-\int\!\!\int\!\!\int\frac{\delta(\beta-y)}{r^3}\,\partial x\,\partial y\,\partial z,\ \ldots.$$

so dass die (c) auch sind:

$$-\varrho\mu\frac{\partial F}{\partial\alpha},\ -\varrho\mu\frac{\partial F}{\partial\beta},\ -\varrho\mu\frac{\partial F}{\partial\gamma}, \qquad (c'')$$

und man also bloss die Grösse F in der Formel (d) als Funktion von α, β, γ zu bestimmen hat, um sofort die Grössen (c) zu erhalten. Mit dieser Bestimmung wollen wir uns nun beschäftigen.

Wir wollen, indem wir

$$\omega=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2},\ \delta=f(\omega)$$

setzen, uns erinnern (§. 98), dass die Grösse

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos(\omega u)\,\partial u \int_0^1 f(v)\cos(uv)\,\partial v$$

gleich $f(\omega)$ ist, wenn ω zwischen 0 und 1, dagegen 0 ist, wenn ω über 1 ist; * alsdann ergibt sich sofort, dass

$$F=\frac{2}{\pi}\iiint_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial x\,\partial y\,\partial z}{r}\int_0^\infty \cos(\omega u)\,\partial u\int_0^1 f(v)\cos(uv)\,\partial v \qquad \text{(e)}$$

gesetzt werden könne, indem, in so ferne ω nicht zwischen 0 und 1 ist, der zugefügte Faktor verschwindet, also bloss diejenigen Elemente bleiben, für welche $\omega < 1$.

Gemäss §. 106 (n') ist aber

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-\frac{\pi}{4}i}\int_0^\infty \frac{e^{r^2\varphi i}}{\sqrt{\varphi}}\,\partial\varphi,$$

so dass

$$F=\frac{2e^{-\frac{\pi}{4}i}}{\pi\sqrt{\pi}}\iiint_{-\infty}^{+\infty}\partial x\,\partial y\,\partial z\iint_0^\infty \frac{e^{r^2\varphi i}}{\sqrt{\varphi}}\cos(\omega u)\,\partial u\,\partial\varphi\int_0^1 f(v)\cos(vu)\,\partial v,$$

welche Grösse übrigens, wie natürlich, reell ist. Setzt man noch ax, by, cz für x, y, z, so ist

$$F=\frac{2abce^{-\frac{\pi}{4}i}}{\pi\sqrt{\pi}}\iiint_{-\infty}^{+\infty}\partial x\,\partial y\,\partial z\iint_0^\infty \frac{e^{r^2\varphi i}}{\sqrt{\varphi}}\cos(\omega u)\,\partial u\,\partial\varphi\int_0^1 f(v)\cos(uv)\,\partial v,$$

wo $r^2=(\alpha-ax)^2+(\beta-by)^2+(\gamma-cz)^2$, $\omega=x^2+y^2+z^2$.

Da diese Grösse reell ist, so folgt hieraus unmittelbar, dass F der reelle Theil ist von

$$F_1=\frac{2e^{-\frac{\pi}{4}i}abc}{\pi\sqrt{\pi}}\iiint_{-\infty}^{+\infty}\partial x\,\partial y\,\partial z\iint_0^\infty \frac{e^{(r^2\varphi+\omega u)i}}{\sqrt{\varphi}}\,\partial u\,\partial\varphi\int_0^1 f(v)\cos(uv)\,\partial v. \qquad \text{(f)}$$

Hier wollen wir nun zuerst die Integrationen nach x, y, z vollziehen, d. h. das Integral $\iiint_{-\infty}^{+\infty} e^{(r^2\varphi+\omega u)i}\,\partial x\,\partial y\,\partial z$ bestimmen. Es ist aber

$$r^2\varphi+\omega u=(a^2\varphi+u)x^2+(b^2\varphi+u)y^2+(c^2\varphi+u)z^2-2\alpha a\varphi x-2\beta b\varphi y-2\gamma c\varphi z$$
$$+(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\varphi,$$

so dass

$$\iiint_{-\infty}^{+\infty} e^{(r^2\varphi+\omega u)i}\partial x\,\partial y\,\partial z=e^{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\varphi i}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{[(a^2\varphi+u)x^2-2\alpha a\varphi x]i}\,\partial x$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{[(b^2\varphi+u)y^2-2b\beta y\varphi]i}\,\partial y\int_{-\infty}^{+\infty} e^{[(c^2\varphi+u)z^2-2\gamma c\varphi z]i}\,\partial z$$

---

* Für $\omega=1$ ist sie allerdings nur $\frac{1}{2}f(\omega)$, allein da $\omega=1$ nur einer unendlich dünnen Schichte des Ellipsoids, an der Oberfläche desselben, zugehört, so können wir füglich dieselbe weglassen.

$$= \frac{e^{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\varphi i}\sqrt{\pi^3}\, e^{\left[-\frac{\alpha^2 a^2\varphi^2}{a^2\varphi+u}-\frac{\beta^2 a^2\varphi^2}{b^2\varphi+u}-\frac{\gamma^2 c^2\varphi^2}{c^2\varphi+u}+\frac{3}{4}\pi\right]i}}{\sqrt{(a^2\varphi+u)}\sqrt{b^2\varphi+u}\sqrt{c^2\varphi+u}} \quad (\S.\ 106,\ (n''))$$

$$= \frac{\sqrt{\pi^3}\, e^{\frac{3}{4}\pi i}\, e^{\sigma i}}{\sqrt{a^2\varphi+u}\,\sqrt{b^2\varphi+u}\,\sqrt{c^2\varphi+u}},\quad \sigma = \left(\frac{\alpha^2}{a^2\varphi+u}+\frac{\beta^2}{b^2\varphi+u}+\frac{\gamma^2}{c^2\varphi+u}\right)\varphi u,$$

so dass

$$F_1 = 2e^{\frac{\pi}{2}i}abc\iint_0^\infty \frac{e^{\sigma i}\,\partial u\,\partial\varphi}{\sqrt{a^2\varphi+u}\sqrt{b^2\varphi+u}\sqrt{c^2\varphi+u}\sqrt{\varphi}}\int_0^1 f(v)\cos(uv)\,\partial v.$$

Setzt man hier noch $\frac{u}{\varphi}$ für φ, so ist

$$F_1 = -2e^{\frac{\pi}{2}i}abc\int_0^\infty \partial u\int_\infty^0 \frac{e^{tui}\,u\varphi^2\,\partial\varphi}{\varphi^2 u^2\sqrt{a^2+\varphi}\sqrt{b^2+\varphi}\sqrt{c^2+\varphi}}\int_0^1 f(v)\cos(uv)\,\partial v$$

$$= 2e^{\frac{\pi}{2}i}abc\iint_0^\infty \frac{e^{tui}\,\partial u\,\partial\varphi}{u\sqrt{a^2+\varphi}\sqrt{b^2+\varphi}\sqrt{c^2+\varphi}}\int_0^1 f(v)\cos(uv)\,\partial v,$$

$$t = \frac{\alpha^2}{a^2+\varphi}+\frac{\beta^2}{b^2+\varphi}+\frac{\gamma^2}{c^2+\varphi}.$$

Nun ist $e^{\frac{\pi}{2}i} = \cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2} = i$, $e^{tui} = \cos(tu)+i\sin(tu)$; demnach

$$F = -2abc\iint_0^\infty \frac{\sin(tu)\,\partial u\,\partial\varphi}{u\sqrt{a^2+\varphi}\sqrt{b^2+\varphi}\sqrt{c^2+\varphi}}\int_0^1 f(v)\cos(uv)\,\partial v.$$

Daraus folgt:

$$-\frac{\partial F}{\partial\alpha} = 4abc\alpha\iint_0^\infty \frac{\cos(tu)\,\partial u\,\partial\varphi}{(a^2+\varphi)\sqrt{a^2+\varphi}\sqrt{b^2+\varphi}\sqrt{c^2+\varphi}}\int_0^1 f(v)\cos(uv)\,\partial v.$$

Aber es ist

$$\left.\begin{aligned}\int_0^\infty \cos(tu)\,\partial u\int_0^1 f(v)\cos(vu)\,\partial v &= \frac{\pi}{2}f(t),\ \text{wenn}\ t<1,\\ &= 0,\qquad\quad\ \text{„}\ \ t>1,\end{aligned}\right\}\ (\S.\ 98,\ (p)).$$

so dass wir nun zwei Fälle unterscheiden müssen.

1.) Der angezogene Punkt liegt innerhalb des Ellipsoids.

In diesem Falle ist

$$\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}+\frac{\gamma^2}{c^2}<1,\ \text{also}\ t<1,$$

und es ist

$$-\frac{\partial F}{\partial\alpha} = 4abc\alpha\frac{\pi}{2}\int_0^\infty \frac{f(t)\,\partial\varphi}{(a^2+\varphi)\sqrt{a^2+\varphi}\sqrt{b^2+\varphi}\sqrt{c^2+\varphi}}.$$

Sind also P, Q, R die Seitenkräfte der Gesammtanziehung des Ellipsoids, so hat man:

$$\left.\begin{aligned}
P &= 2abc\varrho\mu\pi\alpha\int_0^{\infty}\frac{f(t)\,\partial\varphi}{(a^2+\varphi)\sqrt{a^2+\varphi}\sqrt{b^2+\varphi}\sqrt{c^2+\varphi}},\\
Q &= 2abc\varphi\mu\pi\beta\int_0^{\infty}\frac{f(t)\,\partial\varphi}{(b^2+\varphi)\sqrt{b^2+\varphi}\sqrt{a^2+\varphi}\sqrt{c^2+\varphi}},\\
R &= 2abc\varrho\mu\pi\gamma\int_0^{\infty}\frac{f(t)\,\partial\varphi}{(c^2+\varphi)\sqrt{c^2+\varphi}\sqrt{a^2+\varphi}\sqrt{b^2+\varphi}},
\end{aligned}\right\}\quad (g)$$

wo

$$t=\frac{\alpha^2}{a^2+\varphi}+\frac{\beta^2}{b^2+\varphi}+\frac{\gamma^2}{a^2+\varphi}.$$

2.) Der angezogene Punkt liegt ausserhalb des Ellipsoids.

Alsdann ist

$$\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}+\frac{\gamma^2}{c^2}>1,$$

und es wird Werthe von φ geben, für die $t>1$, und solche, für die $t<1$. Bestimmt man den einzigen positiven Werth von m aus der Gleichung

$$\frac{\alpha^2}{a^2+m}+\frac{\beta^2}{b^2+m}+\frac{\gamma^2}{c^2+m}=1, \qquad \text{(h)}$$

so ist $t>1$ von $\varphi=0$ bis $\varphi=m$; dagegen $t<1$ von $\varphi=m$ bis $\varphi=\infty$. Man hat also

$$-\frac{\partial F}{\partial \alpha}=\int_0^m\partial\varphi\int_0^{\infty}\frac{4abc\alpha\cos(tu)\,\partial u}{\sqrt{a^2+\varphi}\sqrt{b^2+\varphi}\sqrt{c^2+\varphi}(a^2+\varphi)}\int_0^1 f(v)\cos(uv)\,\partial v$$

$$+\int_m^{\infty}\partial\varphi\int_0^{\infty}\frac{4abc\alpha\cos(tu)\,\partial u}{\sqrt{a^2+\varphi}\sqrt{b^2+\varphi}\sqrt{c^2+\varphi}(a^2+\varphi)}\int_0^1 f(v)\cos(uv)\,\partial v,$$

und da das erste Integral Null ist, so ist

$$-\frac{\partial F}{\partial \alpha}=2abc\alpha\pi\int_m^{\infty}\frac{f(t)\,\partial\varphi}{(a^2+\varphi)\sqrt{a^2+\varphi}\sqrt{b^2+\varphi}\sqrt{c^2+\varphi}}.$$

Sind also P', Q', R' die Seitenkräfte der Anziehung, so ist

$$\left.\begin{aligned}
P' &= 2abc\varrho\mu\pi\alpha\int_m^{\infty}\frac{f(t)\,\partial\varphi}{(a^2+\varphi)\sqrt{a^2+\varphi}\sqrt{b^2+\varphi}\sqrt{c^2+\varphi}},\\
Q' &= 2abc\varrho\mu\pi\beta\int_m^{\infty}\frac{f(t)\,\partial\varphi}{(b^2+\varphi)\sqrt{b^2+\varphi}\sqrt{a^2+\varphi}\sqrt{c^2+\varphi}},\\
R' &= 2abc\varrho\mu\pi\gamma\int_m^{\infty}\frac{f(t)\,\partial\varphi}{(c^2+\varphi)\sqrt{c^2+\varphi}\sqrt{a^2+\varphi}\sqrt{b^2+\varphi}},
\end{aligned}\right\}\quad (g')$$

wo t dieselbe Bedeutung hat, wie oben, und das positive m aus (h) bestimmt ist. Setzt man in (g′) $\varphi+m$ für φ, und macht $a^2+m=a_1{}^2$, $b^2+m=b_1{}^2$, $c^2+m=c_1{}^2$, so ist

$$P' = 2abc\varrho\mu\pi\alpha \int_0^\infty \frac{f(\tau)\partial\varphi}{(a_1^2+\varphi)\sqrt{a_1^2+\varphi}\sqrt{b_1^2+\varphi}\sqrt{c_1^2+\varphi}},$$

$$\tau = \frac{\alpha^2}{a_1^2+\varphi} + \frac{\beta^2}{b_1^2+\varphi} + \frac{\gamma^2}{c_1^2+\varphi}.$$

Daraus folgt nun leicht, dass man die Grössen P', Q', R' aus (g) finden kann, wenn man in den Formeln (g) nur a_1, b_1, c_1 für a, b, c setzt. Sind die so aus (g) erhaltenen Grössen $= P_1$, Q_1, R_1, so ist

$$\frac{P'}{P_1} = \frac{Q'}{Q_1} = \frac{R'}{R_1} = \frac{abc}{a_1 b_1 c_1}. \qquad (l)$$

Da übrigens die Rechnung nach den Formeln (g) und (g') ziemlich gleich leicht ist, so kann man diesen Satz auch entbehren.

Für den Fall eines homogenen Ellipsoids ist δ konstant, d. h. $f(t) = \delta$ eine Konstante. Alsdann kommen die Formeln (g) und (g') auf elliptische Funktionen zurück und gehören zu §. 101, IV, Nr. 1. Es lassen sich jedoch diese Formeln alsdann noch unter etwas anderer Form schreiben. Setzt man nämlich $\varphi = a^2 x - a^2$, wenn $a > b > c$, so sind in (g) die Gränzen von x nun 1 und ∞ und wenn zur Abkürzung $\frac{a^2-b^2}{a^2} = \lambda^2$, $\frac{a^2-c^2}{a^2} = \lambda'^2$ gesetzt wird, so ist

$$P = \frac{2abc\varrho\mu\pi\delta\alpha}{a^3}\int_1^\infty \frac{\partial x}{x\sqrt{x}\sqrt{x-\lambda^2}\sqrt{x-\lambda'^2}}, \quad Q = \frac{2abc\varrho\mu\pi\delta\beta}{a^3}\int_1^\infty \frac{\partial x}{\sqrt{x}\sqrt{x-\lambda'^2}\sqrt{(x-\lambda^2)^3}},$$

$$R = \frac{2abc\varrho\mu\pi\gamma}{a^3}\int_1^\infty \frac{\partial x}{\sqrt{x}\sqrt{x-\lambda^2}\sqrt{(x-\lambda'^2)^3}}.$$

Setzt man noch $x = \frac{1}{u^2}$, so wird

$$P = k\int_0^1 \frac{u^2\partial u}{\sqrt{1-\lambda^2u^2}\sqrt{1-\lambda'^2u^2}}, \quad Q = k'\int_0^1 \frac{u^2\partial u}{(1-\lambda^2u^2)^{\frac{3}{2}}(1-\lambda'^2u^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$R = k''\int_0^1 \frac{u^2\partial u}{(1-\lambda^2u^2)^{\frac{1}{2}}(1-\lambda'^2u^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$k = \frac{4abc\varrho\mu\pi\delta\alpha}{a^3}, \; k\beta = k'\alpha, \; k''\alpha = k\gamma.$$

Setzt man hier endlich $\lambda' u = z$, so sind die Gränzen von z : 0 und λ' und es ist, wenn man $\frac{\lambda^2}{\lambda'^2} = \frac{a^2-b^2}{a^2-c^2} = e^2$ setzt:

$$P = \frac{k}{\lambda'^3}\int_0^{\lambda'} \frac{z^2\partial z}{\sqrt{(1-z^2)(1-e^2z^2)}}, \quad Q = \frac{k'}{\lambda'^3}\int_0^{\lambda'} \frac{z^2\partial z}{(1-e^2z^2)\sqrt{(1-z^2)(1-e^2z^2)}},$$

$$R = \frac{k''}{\lambda'^3}\int_0^{\lambda'} \frac{z^2\partial z}{(1-z^2)\sqrt{(1-z^2)(1-e^2z^2)}}. \qquad (m)$$

Um diese Integrale auf elliptische zurückzuführen, sey $z = \sin\varphi$, und $\sin\omega = \lambda' = \sqrt{\frac{a^2-c^2}{a^2}}$, so ist (§. 100):

$$\left.\begin{aligned}
P &= \frac{k}{\lambda'^3}\int_0^\omega \frac{\sin^2\varphi\,\partial\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}} = \frac{k}{\lambda'^3 e^2}\Big[F(\omega,e)-E(\omega,e)\Big],\\
Q &= \frac{k'}{\lambda'^3}\int_0^\omega \frac{\sin^2\varphi\,\partial\varphi}{(1-e^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}} = \frac{k'}{\lambda'^3 e^2(1-e^2)}\left[E(\omega,e)-(1-e^2)F(\omega,e)-e^2\frac{\sin\omega\cos\omega}{\sqrt{1-e^2\sin^2\omega}}\right],\\
R &= \frac{k''}{\lambda'^3}\int_0^\omega \frac{\sin^2\varphi\,\partial\varphi}{\cos^2\varphi\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}} = \frac{k''}{\lambda'^3(1-e^2)}\Big[\operatorname{tg}\omega\sqrt{1-e^2\sin^2\omega}-E(\omega,e)\Big],
\end{aligned}\right\}(k)$$

wo also $\frac{k}{\alpha}=\frac{k'}{\beta}=\frac{k''}{\gamma}=\frac{4abc\varrho\mu\pi\delta}{a^3}$, $e=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}}$, $\lambda'=\sin\omega=\sqrt{\frac{a^2-c^2}{a^2}}$.

Für den speziellen Fall, dass $a=b$, ist $e=0$, $F(\omega,e)=E(\omega,e)=\omega$, also werden $\frac{F(\omega,e)-E(\omega,e)}{e^2}$, $\frac{E(\omega,e)-(1-e^2)F(\omega,e)}{e^2(1-e^2)}$ zu $\frac{0}{0}$, und müssen nach §. 22 behandelt werden, wornach sich als Werth dieser Grössen findet: $\frac{1}{2}(\omega-\sin\omega\cos\omega)$, $\frac{1}{2}(\omega+\sin\omega\cos\omega)$, so dass jetzt

$$P=\frac{k}{2\lambda'^3}(\omega-\sin\omega\cos\omega),\ Q=\frac{k'}{2\lambda'^3}(\omega-\sin\omega\cos\omega),\ R=\frac{k''}{\lambda'^3}(\operatorname{tg}\omega-\omega),$$

wo $\lambda'=\sqrt{\frac{a^2-c^2}{a^2}}=\sin\omega$, $\sin\omega\cos\omega=\frac{c\sqrt{a^2-c^2}}{a^2}$, $\omega=\operatorname{arc}\left(\sin=\frac{\sqrt{a^2-c^2}}{a}\right)$,

Ist endlich $a=b=c$, so hat man eine Kugel vom Halbmesser a. Alsdann ist in den letzten Formeln $\omega=0$, $\lambda'=0$ und man findet nach §. 22:

$$P=\frac{k}{3},\ Q=\frac{k'}{3},\ R=\frac{k''}{3};\ \text{d. h. } \frac{P}{\alpha}=\frac{Q}{\beta}=\frac{R}{\gamma}=\frac{4\pi\varrho\mu\delta}{3}.$$

Will man nun eben so die Werthe von P', Q', R' der Formeln (g') bei $f(t)=\delta$ finden, so wird man nach (l) verfahren. Man erhält so:

$$\begin{aligned}
P' &= \frac{h}{\lambda^3 e^2}[F(\omega,e)-E(\omega,e)],\ Q'=\frac{h'}{\lambda^3 e^2(1-e^2)}\Big[E(\omega,e)-(1-e^2)F(\omega,e)\\
&\quad -\frac{e^2\sin\omega\cos\omega}{\sqrt{1-e^2\sin^2\omega}}\Big],\ R=\frac{h''}{\lambda^3(1-e^2)}[\operatorname{tg}\omega\sqrt{1-e^2\sin^2\omega}-E(\omega,e)]
\end{aligned}\qquad (k')$$

wo $\frac{h}{\alpha}=\frac{h'}{\beta}=\frac{h''}{\gamma}=\frac{4abc\varrho\mu\pi\delta}{a_1^3}$, $e^2=\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}$, $\lambda^2=\frac{a^2-c^2}{a_1^2}$, $\sin\omega=\frac{\sqrt{a^2-c^2}}{a_1}$,

$$a_1^2=a^2+m,\ \frac{\alpha^2}{a^2+m}+\frac{\beta^2}{b^2+m}+\frac{\gamma^2}{c^2+m}=1.$$

Aus den Formeln (m) lässt sich sehr leicht ein interessantes Resultat ziehen. Denken wir uns nämlich eine ellipsoidische Schichte, begränzt von zwei ähnlichen Ellipsoiden, deren Halbaxen a, b, c und na, nb, nc seyen, und sey der angezogene Punkt innerhalb des hohlen Raums der Schichte, so wird man die auf ihn ausgeübte Wirkung finden, wenn man ($n>1$ vorausgesetzt) in (m) an die Stelle von a, b, c setzt na, nb, nc, und von den so erhaltenen Werthen die (m) abzieht. Da sich aber durch die genannte Vertauschung in (m) Nichts ändert, so erhält man also 0 als Wirkung, d. h. eine solche Schichte wirkt auf einen in ihrer Höhlung liegenden Punkt gar nicht, oder genauer gesprochen, die einzelnen Anziehungen heben sich gegenseitig auf.

Anders verhält sich natürlich die Sache bei den Formeln (k'). Man sieht aber hieraus leicht, wie man die Anziehung einer Schichte auf einen Punkt berechnen kann, wenn dieselbe nur von ellipsoidischen Flächen begränzt ist.

§. 112.

So wie in §. 106 die Euler'schen Integrale (Gammafunktionen) als eine besondere Gattung Funktionen in die Analysis eingeführt wurden, hat man noch einige andere ähnliche eingeführt, über welche wir zum Schlusse dieses Abschnitts noch Weniges zufügen wollen.

I. Das Integral

$$\int_0^x \frac{\partial z}{l(z)}$$

heisst der **Integrallogarithmus** und wird durch $li(x)$ bezeichnet. Da für $z=1$: $l(z)=0$, so darf x nicht über 1 hinausgehen. Setzt man hier $z=e^{-u}$, so erhält man

$$li(e^{-u}) = -\int_\infty^u \frac{e^{-u}\partial u}{-u} = -\int_u^\infty \frac{e^{-z}}{z}\partial z,\ u>0.$$

Demgemäss

$$li(e^{-u}) - li(e^{-n}) = -\int_u^\infty \frac{e^{-z}}{z}\partial z + \int_n^\infty \frac{e^{-z}}{z}\partial z = \int_u^n \frac{e^{-z}}{z}\partial z,$$

wo wir etwa unter n eine positive ganze Zahl verstehen wollen. Entwickelt man $\frac{e^{-z}}{z}$ in eine unendliche Reihe, so folgt hieraus

$$li(e^{-u}) - li(e^{-n}) = l(u) - u + \frac{1}{2}\frac{u^2}{1.2} - \frac{1}{3}\frac{u^3}{1.2.3} + \ldots - [l(n) - n + \frac{1}{2}\frac{n^2}{1.2} - \frac{1}{3}\frac{n^3}{1.2.3} + \ldots]$$

$$= l(u) - u + \frac{1}{2}\frac{u^2}{1.2} - \frac{1}{3}\frac{u^3}{1.2.3} + \ldots - \left[l(n) - \int_0^1 \frac{1-e^{-nz}}{z}\partial z\right].$$

Lässt man hier n immer mehr wachsen, so nähert sich $li(e^{-n})$ unbegränzt der Grösse $li(0)=0$, so dass

$$li(e^{-u}) = l(u) - u + \frac{1}{2}\frac{u^2}{1.2} - \frac{1}{3}\frac{u^3}{1.2.3} + \ldots + \text{Gr.}\left[\int_0^1 \frac{1-e^{-nz}}{z}\partial z - l(n)\right],$$

wo Gr. sich auf das unendliche Wachsen von n bezieht. Nun ist aber identisch

$$\int_0^1 \frac{1-e^{-nz}}{z}\partial z = \int_0^1 \frac{1-(1-z)^n}{z}\partial z - \int_0^1 \frac{e^{-nz}-(1-z)^n}{z}\partial z;$$

ferner ist (§. 15) $e^{-z} = 1 - z + \frac{z^2}{1.2}e^{-\theta z}$, also immer $e^{-z} > 1 - z$, so dass wenn $z<1$ auch $e^{-nz} > (1-z)^n$, ob n gerade oder ungerade ist; das Integral $\int_0^1 \frac{e^{-nz}-(1-z)^n}{z}\partial z$ ist also sicher >0. Da weiter (§. 2, II) für $a>b$: $a^{n+1} - b^{n+1} < (n+1)a^n(a-b)$, so ist wenn man $a=e^{-z}$, $b=1-z$, und $n-1$ für n setzt:

$e^{-nz} - (1-z)^n < n\,e^{-(n-1)z}[e^{-z} - (1-z)]$, $\frac{e^{-nz} - (1-z)^n}{z} < n\,e^{-nz}\frac{e^z}{z}[e^{-z} - (1-z)]$, d. h. da $e^{-z} - (1-z) = \frac{z^2}{1.2}e^{-\theta z}$ kleiner als $\frac{z^2}{2}$, es ist $\frac{e^{-nz} - (1-z)^n}{z} < \frac{z\,e^z\,e^{-nz}}{2}$ mithin $\int_0^1 \frac{e^{-nz} - (1-z)^n}{z}\partial z < \frac{n}{2}\int_0^1 z\,e^{z-nz}\partial z$, d. h. $< n - \frac{e^{-(n-1)}}{2}\left[\frac{1}{n-1} + \frac{1}{(n-1)^2}\right] + \frac{n}{2}\frac{1}{(n-1)^2}$, und da letztere Grösse mit wachsendem n verschwindet, so ist $Gr.\int_0^1 \frac{e^{-nz} - (1-z)^n}{z}\partial z = 0$. Ferner ist für $1 - z = u$:

$$\int_0^1 \frac{1-(1-z)^n}{z}\partial z = \int_0^1 \frac{1-u^n}{1-u}\partial u = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n},$$

so dass endlich

$$Gr.\left[\int_0^1 \frac{1-e^{-nz}}{z}\partial z - l(n)\right] = Gr.\left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - l(n)\right] = 0{\cdot}57721566$$

(= k in §. 106),

und also $$li(e^{-u}) = l(u) - u + \frac{1}{2}\frac{u^2}{1.2} - \frac{1}{3}\frac{u^3}{1.2.3} - \frac{1}{4}\frac{u^4}{1.2.3.4} - \ldots + k.$$

Setzt man noch $e^{-u} = x$, so ist für $x \gtrless \begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}$:

$$li(x) = k + l[-l(x)] + l(x) + \frac{1}{2}\frac{l(x)^2}{1.2} + \frac{1}{3}\frac{l(x)^3}{1.2.3} + \ldots\ldots$$

Auf den Integrallogarithmus lassen sich manche andere Integrale zurückführen. So ist für $a(1+x) = z$ und $a > 0$:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-ax}}{1+x}\partial x = e^a\int_a^\infty \frac{e^{-z}}{z}\partial z = -e^a\,li(e^{-a}).$$

II. Das bestimmte Integral

$$\int_0^x \frac{\sin z}{z}\partial z$$

heisst der **Integralsinus** und wird durch $Si(x)$ bezeichnet. Entwickelt man $\sin z$ in eine unendliche Reihe, so ist hiernach

$$Si(x) = x - \frac{1}{3}\frac{x^3}{1.2.3} + \frac{1}{5}\frac{x^5}{1\ldots 5} - \ldots\ldots$$

Eben so heisst das Integral

$$\int_x^\infty \frac{\cos z}{z}\partial z$$

der **Integralcosinus** und wird durch $Ci(x)$ bezeichnet. Hiebei muss natürlich $x > 0$ seyn. Will man für diese Grösse eine unendliche Reihe haben, so beachte man, dass

$$\int_x^n \frac{\cos z}{z}\partial z = l(n) - \frac{1}{2}\frac{n^2}{1.2} + \frac{1}{4}\frac{n^4}{1..4} - \ldots - \left[l(x) - \frac{1}{2}\frac{x^2}{1.2} + \frac{1}{4}\frac{x^4}{1..4} - \ldots\right].$$

so dass

$$\int_x^\infty \frac{\cos z}{z}\partial z = \text{Gr.}\left[l(n) - \frac{1}{2}\frac{n^2}{1.2} + \frac{1}{4}\frac{n^4}{1..4} - \dots\right] - \left[l(x) - \frac{1}{2}\frac{x^2}{1.2} + \frac{1}{4}\frac{x^4}{1..4} - \dots\right].$$

Nun ist aber

$$-\frac{1}{2}\frac{n^2}{1.2} + \frac{1}{4}\frac{n^4}{1..4} - \dots = -\int_0^n \frac{1-\cos z}{z}\partial z = -\int_0^n \frac{e^{-z} - \cos z}{z}\partial z - \int_0^n \frac{1-e^{-z}}{z}\partial z =$$

$$-\int_0^n \frac{e^{-z} - \cos z}{z}\partial z - \int_0^1 \frac{1-e^{-nz}}{z}\partial z,$$

also

$$\text{Gr.}\left[l(n) - \frac{1}{2}\frac{n^2}{1.2} + \dots\right] = \text{Gr.}\left[l(n) - \int_0^1 (1-e^{-nz})\frac{\partial z}{z}\right] - \text{Gr.}\int_0^n \frac{e^{-z} - \cos z}{z}\partial z =$$

$$= -0{\cdot}57721566 - \int_0^\infty \frac{e^{-z} - \cos z}{z}\partial z.$$

Betrachten wir aber das Integral $\int_0^\infty \frac{e^{-z} - e^{-az}\cos\alpha z}{z}\partial z$ und setzen dasselbe $=u$, so ist (§. 61):

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha} = \int_0^\infty e^{-az}\sin\alpha z\,\partial z = \frac{\alpha}{a^2+\alpha^2},\ u = \int\frac{\alpha\,\partial\alpha}{\alpha^2+a^2} = \frac{1}{2}l(a^2+\alpha^2) + C,$$

so dass

$$\int_0^\infty \frac{e^{-z} - e^{-az}\cos\alpha z}{z}\partial z = \frac{1}{2}l(a^2+\alpha^2) + C.$$

Ganz eben so ist

$$\frac{\partial u}{\partial a} = \int_0^\infty e^{-az}\cos\alpha z\,\partial z = \frac{a}{a^2+\alpha^2},\ u = \int\frac{a\,\partial a}{a^2+\alpha^2} = \frac{1}{2}l(a^2+\alpha^2) + C',$$

wo C von α, C′ von a unabhängig ist. Da aber $C = C'$ seyn muss, so sind also C und C′ von a und α unabhängig. Setzt man demnach $a = 0$, so ist

$$\frac{1}{2}l(\alpha^2) + C = \int_0^\infty \frac{e^{-z} - \cos\alpha z}{z}\partial z,$$

und für $\alpha = 0$:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-z} - e^{-az}}{z}\partial z = \frac{1}{2}l(a^2) + C,$$

wo C von a unabhängig ist. Demnach für $a = 1$, wo $\int_0^\infty \frac{e^{-z} - e^{-az}}{z}\partial z = 0$, auch $\frac{1}{2}l(1) + C = 0$, $C = 0$. Also ist allgemein $C = 0$ und

$$\int_0^\infty \frac{e^{-z} - e^{-az}\cos\alpha z}{z}\partial z = \frac{1}{2}l(a^2+\alpha^2),$$

für $\alpha=1$:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-z}-e^{-az}\cos z}{z}\partial z = \frac{1}{2}l(a^2+1),$$

und da für a=0 die Grösse erster Seite noch endlich ist, überdies $\int_0^\infty \frac{e^{-z}-e^{-az}\cos z}{z}\partial z$ eine stetige Funktion von a ist, so ist für a=0:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-z}-\cos z}{z}\partial z = 0,$$

so dass
$$\text{Gr.}\left[l(n)-\frac{1}{2}\frac{n^2}{1.2}+\ldots\right] = -k(=-0{\cdot}5772156..),$$

also
$$\int_x^\infty \frac{\cos z}{z}\partial z = Ci(x) = -k - l(x) + \frac{1}{2}\frac{x^2}{1.2} - \frac{1}{4}\frac{x^4}{1..4} + \frac{1}{6}\frac{x^6}{1..6} - \ldots$$

Es ist aus §. 43 klar, dass die Integrale $\int_a^b \frac{\sin x}{x^m}\partial x$, $\int_a^b \frac{\cos x}{x^m}\partial x$ auf die eben angegebenen Integrale zurückkommen.

Setzt man in $\int_0^\infty \frac{\sin a x}{1+x}\partial x$, wo $a>0$: $x=\frac{z}{a}-1$, so ist

$$\int_0^\infty \frac{\sin a x}{1+x}\partial x = \int_a^\infty \frac{\sin(z-a)}{\frac{z}{a}}\frac{\partial z}{a} = \cos a\int_a^\infty \frac{\sin z}{z}\partial z - \sin a\int_a^\infty \frac{\cos z}{z}\partial z$$

$$= \cos a\left[\int_0^\infty \frac{\sin z}{z}\partial z - \int_0^a \frac{\sin z}{z}\partial z\right] - \sin a\int_a^\infty \frac{\sin z}{z}\partial z$$

$$= \left[\frac{\pi}{2} - Si(a)\right]\cos a - Ci(a)\,.\,\sin a.$$

Neunzehnter Abschnitt.

Näherungsweise Berechnung bestimmter Integrale.

§. 113.

Ein jedes bestimmte Integral

$$\int_a^b f(x)\partial x, \qquad (a)$$

in welchem f(x) eine stetige Funktion von x ist, hat einen bestimmten, von a und b abhängigen Werth, dessen Ermittlung dann immer leicht ist, wenn die unbestimmte Integration sich ausführen lässt. Ist Letzteres aber nicht der Fall, so muss man mit Näherungsmethoden sich behelfen. Zu sol-

chen liesse sich die Integration mittelst unendlicher Reihen (§. 46) zählen, nnd es wird dieselbe in vielen Fällen von Nutzen seyn; eine weitere Näherungsmethode haben wir in §. 54, VI angedeutet, da das Integral (a) immer als Ausdruck für den Inhalt einer ebenen Fläche angesehen werden kann. Wir werden auf diese Methode nochmals zurückkommen. Alle diese Methoden haben aber den Nachtheil, dass man keine bestimmte Fehlergränze kennt, d. h. also, dass man nicht weiss, in wie weit das Resultat genau oder nicht genau ist. Frei von diesem Vorwurfe ist nun die nachstehende Methode, bei der nur vorausgesetzt ist, $f(x)$ sey eine ihrer Form nach gegebene Funktion, so dass man für jeden beliebigen Werth von x den ihr zukommenden Werth berechnen kann.

Wir haben bereits in §. 50, XI gezeigt, dass

$$f(x+h)-f(x)=\frac{h}{1}f'(x)+\frac{h^2}{1.2}f''(x)+\ldots+\frac{h^n}{1..n}f^n(x)+\frac{1}{1\ldots n}\int_0^h z^n f^{n+1}(x+h-z)\partial z,$$

oder wenn man in dem bestimmten Integrale z an die Stelle von $h-z$ setzt:

$$f(x+h)-f(x)=\frac{h}{1}f'(x)+\frac{h^2}{1.2}f''(x)+\ldots+\frac{h^n}{1..n}f^n(x)+\frac{1}{1\ldots n}\int_0^h (h-z)^n f^{n+1}(x+z)\partial z. \quad (b)$$

Setzt man zur Abkürzung $F(x+h)-F(x)=\Delta F(x)$, so erhält man hieraus:

$$\Delta f(x)=\frac{h}{1}f'(x)+\frac{h^2}{1.2}f''(x)+\frac{h^3}{1.2.3}f^3(x)+\ldots+\frac{h^{2m}}{1\ldots 2m}f^{2m}(x)+\frac{1}{1\ldots 2m}\int_0^h (h-z)^{2m} f^{2m+1}(x+z)\partial z,$$

$$\Delta f'(x)=\frac{h}{1}f''(x)+\frac{h^2}{1.2}f'''(x)+\ldots+\frac{h^{2m-1}}{1\ldots 2m-1}f^{2m}(x)+\frac{1}{1\ldots 2m-1}\int_0^h (h-z)^{2m-1} f^{2m+1}(x+z)\partial z,$$

$$\Delta f''(x)=\frac{h}{1}f'''(x)+\ldots+\frac{h^{2m-2}}{1\ldots 2m-2}f^{2m}(x)+\frac{1}{1\ldots 2m-2}\int_0^h (h-z)^{2m-2} f^{2m+2}(x+z)\partial z,$$

$$\vdots$$

$$\Delta f^{2m-1}(x)=\frac{h}{1}f^{2m}(x)+\frac{1}{1}\int_0^h (h-z) f^{2m+1}(x+z)\partial z.$$

Man multiplizire diese Gleichungen, der Reihe nach, mit $1, A_1 h, A_2 h^2, \ldots, A_{2m-1} h^{2m-1}$, bestimme $A_1, \ldots, A_{2m-1}$ durch die folgenden Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{1.2}+\frac{A_1}{1}=0,\\ \frac{1}{1.2.3}+\frac{A_1}{1.2}+\frac{A_2}{1}=0,\ldots\end{array}\right\}(c)$$

$$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{1\ldots 2m-1}+\frac{A_1}{1\ldots 2m-2}+\frac{A_2}{1\ldots 2m-3}+\ldots+\frac{A_{2m-3}}{1.2}+\frac{A_{2m-2}}{1}=0,\\ \frac{1}{1\ldots 2m}+\frac{A_1}{1\ldots 2m-1}+\frac{A_2}{1\ldots 2m-2}+\ldots\ldots\ldots+\frac{A_{2m-2}}{1.2}+\frac{A_{2m-1}}{1}=0,\end{array}\right\}\ (c)$$

so erhält man durch Addition:

$$\Delta f(x)+A_1 h\Delta f'(x)+A_2 h^2\Delta f''(x)+\ldots+A_{2m-1}h^{2m-1}\Delta f^{2m-1}(x)=hf'(x)$$
$$+\int_0^h Q f^{2m+1}(x+z)\partial z, \qquad (d)$$

wo $Q=\frac{(h-z)^{2m}}{1\ldots 2m}+\frac{A_1 h(h-z)^{2m-1}}{1\ldots 2m-1}+\frac{A_2h^2(h-z)^{2m-2}}{1\ldots 2m-2}+\ldots+\frac{A_{2m-1}h^{2m-1}(h-z)}{1}$.

Was nun vorerst die Auflösung der Gleichungen (c) anbelangt, so erhält man:

$$A_1=-\frac{1}{2},\ A_2=\frac{1}{12},\ A_3=0,\ A_4=-\frac{1}{720},\ A_5=0,\ A_6=\frac{1}{42}\cdot\frac{1}{1\ldots 6},\ A_7=0,\ldots$$

Dadurch sind wir auf die Vermuthung geleitet, es sey allgemein:

$$A_{2n+1}=0\,(n>0),\ A_{2n}=\frac{(-1)^{n+1}B_{2n-1}}{1.2\ldots 2n}\ (\S.\ 27,\ II). \qquad (e)$$

Um die Richtigkeit dieser Vermuthung zu prüfen, führen wir diese Werthe in (c) ein; sind diese Gleichungen alsdann erfüllt, so ist unsere Vermuthung gerechtfertigt. Nun sind aber zwei auf einander folgende jener Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{1\ldots 2r-1}+\frac{A_1}{1\ldots 2r-2}+\frac{A_2}{1\ldots 2r-3}+\ldots+\frac{A_{2r-2}}{1}=0,\\ \frac{1}{1\ldots 2r}+\frac{A_1}{1\ldots 2r-1}+\frac{A_2}{1\ldots 2r-2}+\ldots+\frac{A_{2r-2}}{1.2}+\frac{A_{2r-1}}{1}=0,\end{array}\right\}\ (c')$$

welche mittelst (e) zu

$$\frac{1}{1\ldots 2r-1}-\frac{1}{2}\,\frac{1}{1\ldots 2r-2}+\frac{B_1}{1.2}\,\frac{1}{1\ldots 2r-3}-\frac{B_3}{1..4}\,\frac{1}{1\ldots 2r-5}+\ldots\pm\frac{B_{2r-3}}{1\ldots 2r-1}=0,$$

$$\frac{1}{1\ldots 2r}-\frac{1}{2}\,\frac{1}{1\ldots 2r-1}+\frac{B_1}{1.2}\,\frac{1}{1\ldots 2r-2}-\frac{B_3}{1..4}\,\frac{1}{1\ldots 2r-4}+\ldots+\frac{B_{2r-3}}{1\ldots 2r-2}\,\frac{1}{1.2}=0,$$

d. h. $\frac{B_1}{1.2}\,\frac{1}{1\ldots 2r-3}-\frac{B_3}{1..4}\,\frac{1}{1\ldots 2r-5}+\ldots\pm\frac{B_{2r-3}}{1\ldots 2r-2}=\frac{2r-3}{2}\cdot\frac{1}{1\ldots 2r-1},$

$$\frac{B_1}{1.2}\,\frac{1}{1\ldots 2r-2}-\frac{B_3}{1..4}\,\frac{1}{1\ldots 2r-4}+\ldots\pm\frac{B_{2r-3}}{1\ldots 2r-2}\cdot\frac{1}{1.2}=\frac{2r-2}{2}\,\frac{1}{1..2r}.$$

Von diesen Gleichungen ist die letzte geradezu die Gleichung (f) in §. 27, III, wenn man dort $n=r-1$ setzt; was die erste anbelangt, so heisst sie auch

$$\frac{2}{1.2\ldots 2r-1}+\frac{2B_1}{1.2}\,\frac{1}{1\ldots 2r-3}-\frac{2B_3}{1..4}\,\frac{1}{1\ldots 2r-5}+\ldots\pm\frac{2B_{2r-3}}{1\ldots 2r-2}=\frac{1}{1..2r-2} \quad (g)$$

und ergibt sich, wenn man mit der Gleichung

$$1+\cos x=\sin x\cot g\,\frac{1}{2}x$$

in derselben Weise verfährt, wie es in §. 27 geschehen ist. Demnach sind die Gleichungen (e) richtig, und es ist

$$Q=\frac{(h-z)^{2m}}{1\ldots 2m}-\frac{1}{2}\,\frac{h(h-z)^{2m-1}}{1\ldots 2m-1}+\frac{B_1}{1.2}\,\frac{h^2(h-z)^{2m-2}}{1\ldots 2m-2}-\frac{B_3}{1..4}\,\frac{h^4(h-z)^{2m-4}}{1\ldots 2m-4}+\ldots\ldots$$
$$\pm\frac{B_{2m-3}}{1\ldots 2m-2}\,\frac{h^{2m-2}(h-z)^2}{1.2},$$

oder wenn man die Zeichen A beibehält:

$$Q=\frac{(h-z)^{2m}}{1\ldots 2m}+\frac{A_1 h(h-z)^{2m-1}}{1\ldots 2m-1}+\frac{A_2 h^2(h-z)^{2m-2}}{1\ldots(2m-2)}+\frac{A_4 h^4(h-z)^{2m-4}}{1\ldots 2m-4}+\ldots\ldots$$
$$+\frac{A_{2m-2}h^{2m-2}(h-z)^2}{1.2}.$$

Setzt man

$$\frac{z^{2m}}{1..2m}+\frac{A_1 h z^{2m-1}}{1\ldots 2m-1}+\frac{A_2 h^2 z^{2m-2}}{1\ldots 2m-2}+\ldots+\frac{A_{2m-2}h^{2m-2}z^2}{1.2}=\varphi(z), \qquad (f)$$

so ist $Q=\varphi(h-z)$, und wenn man entwickelt:

$$\varphi(h-z)=\frac{z^{2m}}{1\ldots 2m}-\frac{h z^{2m-1}}{1\ldots 2m-1}[1+A_1]+\frac{h^2 z^{2m-1}}{1\ldots 2m-2}\left[\frac{1}{1.2}+\frac{A_1}{1}+A_2\right]$$
$$-\frac{h^3 z^{2m-3}}{1\ldots 2m-3}\left[\frac{1}{1.2.3}+\frac{A_1}{1.2}+\frac{A_2}{1}\right]+\ldots+h^{2m}\left[\frac{1}{1\ldots 2m}+\frac{A_1}{1..2m-1}+\frac{A_2}{1..2m-2}+\right.$$
$$\left.\ldots+\frac{A_{2m-2}}{1.2}\right]=\frac{z^{2m}}{1..2m}-\frac{1}{2}\,\frac{h z^{2m-1}}{1\ldots 2m-1}+\frac{A_2 h^2 z^{2m-2}}{1\ldots 2m-2}+\frac{A_4 h^4 z^{2m-4}}{1\ldots 2m-4}+\ldots\ldots$$
$$+\frac{A_{2m-2}h^{2m-1}z^2}{1.2}\ \text{(nach (c))},$$

d. h. es ist

$$\varphi(z)=\varphi(h-z)=Q. \qquad (f')$$

Daraus folgt auch

$$\varphi\left(\frac{1}{2}h+u\right)=\varphi\left(\frac{1}{2}h-u\right),$$

so dass die Werthe von $\varphi(z)$ für z von 0 bis $\frac{1}{2}h$ dieselben sind, wie für z von h bis $\frac{1}{2}h$, mithin etwa (§. 49, VII) $\int_0^h\varphi(z)\partial z=2\int_0^{\frac{1}{2}h}\varphi(z)\partial z$. Da aber

$$\int_0^h\varphi(z)\partial z=h^{2m+1}\left[\frac{1}{1..2m+1}+\frac{A_1}{1..2m}+\frac{A_2}{1..2m-1}+\ldots+\frac{A_{2m-2}}{1.2.3}\right]=-A_{2m}h^{2m+1},$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}h}\varphi(z)\partial z=h^{2m+1}\left[\frac{1}{1..2m+1}\cdot\frac{1}{2^{2m+1}}+\frac{A_1}{1..2m}\,\frac{1}{2^{2m}}+\ldots+\frac{A_{2m-2}}{1.2.3}\,\frac{1}{2^3}\right],$$

so ist

$$\frac{1}{1..2m+1}\,\frac{1}{2^{2m+1}}+\frac{A_1}{1..2m}\,\frac{1}{2^{2m}}+\frac{A_2}{1..2m-1}\,\frac{1}{2^{2m-1}}+\frac{A_4}{1..2m-3}\,\frac{1}{2^{2m-3}}+\ldots\ldots$$
$$+\frac{A_{2m-2}}{1.2.3}\,\frac{1}{2^3}=-\frac{1}{2}A_{2m}, \qquad (g')$$

wenn man A_{2m} durch (e) sich bestimmt denkt. Diese Formel (g') ist eine weitere Rekursionsformel für die Bernoullischen Zahlen.

Was nun die Funktion $\varphi(z)$ anbelangt, so kann man behaupten, dass sie von $z=0$ bis $z=\frac{1}{2}h$ beständig wachse oder abnehme. Um dies zu beweisen, genügt es zu zeigen, dass $\varphi'(z)$ nicht 0 werden kann von $z=0$ bis $z=\frac{1}{2}h$, (für welch letztern Werth übrigens $\varphi'(z)=0$ ist). Es ist aber

$$\varphi'(z)=z\left[\frac{z^{2m-2}}{1..2m-1}+\frac{A_1 h z^{2m-3}}{1..2m-2}+\frac{A_2 h^2 z^{2m-4}}{1..2m-3}+\frac{A_4 h^4 z^{2m-6}}{1..2m-5}+..+\frac{A_{2m-2} h^{2m-2}}{1}\right].$$

Ist nun $m=1, 2$, so ist dies gleich

$$z-\frac{1}{2}h \text{ und } z\left[\frac{z^2}{1.2.3}-\frac{1}{2}\frac{hz}{1.2}+\frac{1}{12}h^2\right]=\frac{z}{6}(z-h)\left(z-\frac{h}{2}\right),$$

welche Grössen allerdings ihr Zeichen nicht ändern für z von 0 bis $\frac{h}{2}$. Setzt man also $\varphi(z, m)$ statt $\varphi(z)$, um auch m besonders hervorzuheben, so wollen wir annehmen, man wisse $\frac{\partial\varphi(z, r-1)}{\partial z}$ ändere sein Zeichen nicht von $z=0$ bis $z=\frac{1}{2}h$, und fragen, ob dasselbe sich auch von $\frac{\partial\varphi(z,r)}{\partial z}$ sagen lasse. Denken wir uns zunächst h positiv, so wird, wenn $z<\frac{1}{2}h$, sicher $z<\frac{1}{2}(h+\alpha)$, wo $\alpha>0$; demnach wird in dem Integral $\int_h^\infty\frac{\partial\varphi(z, r-1)}{\partial z}\frac{\partial h}{h^{2r}}$ jedes Element dasselbe Zeichen haben wie $\frac{\partial\varphi(z, r-1)}{\partial z}$, wo $z<\frac{1}{2}h$. Es ist aber, wie man leicht findet, wenn man oben in $\varphi'(z)$ für m setzt $r-1$:

$$\int_h^\infty\frac{\partial\varphi(z, r-1)}{\partial z}\frac{\partial h}{h^{2r}}=\frac{z}{h^{2r-1}}\left[\frac{z^{2r-4}}{1..2r-3}\frac{1}{2r-1}+\frac{A_1 h z^{2r-5}}{1..(2r-4)}\cdot\frac{1}{2r-2}+\frac{A_2 h^2 z^{2r-6}}{1..2r-5}\cdot\right.$$
$$\left.\frac{1}{2r-3}+\ldots+\frac{A_{2r-4}h^{2r-4}}{1}\frac{1}{3}\right],$$

so dass diese Grösse dasselbe Zeichen hat, wie $\frac{\partial\varphi(z, r-1)}{\partial z}$, wenn $z<\frac{1}{2}h$.

Daraus folgt aber weiter, dass wenn $\alpha<\frac{1}{2}h$, das Integral $\int_\alpha^{\frac{1}{2}h}\frac{z}{h^{2r-1}}\left[\frac{z^{2r-4}}{1.2r-3}\frac{1}{2r-1}\right.$ $\left.+\ldots+\frac{A_{2r-4}h^{2r-4}}{1}\frac{1}{3}\right]\partial z$, dessen Elemente alle der Bedingung $z<\frac{1}{2}h$ genügen, ebenfalls dasselbe Zeichen haben müsse wie $\frac{\partial\varphi(z, r-1)}{\partial z}$. Dieses Integral ist aber

$$\frac{h^{2r-2}}{h^{2r-1}}\left[\frac{1}{1..2r-1}\frac{1}{2^{2r-2}}+\frac{A_1}{1..2r-2}\frac{1}{2^{2r-3}}+\frac{A_2}{1..2r-3}\frac{1}{2^{2r-4}}+..+\frac{A_{2r-4}}{1.2.3}\frac{1}{2^2}\right]$$
$$-\frac{1}{h^{2r-1}}\left[\frac{\alpha^{2r-2}}{1..2r-1}+\frac{A_1\alpha^{2r-3}h}{1..2r-2}+\frac{A_2\alpha^{2r-4}h^2}{1..2r-3}+\ldots+\frac{A_{2r-4}\alpha^2 h^{2r-4}}{1.2.3}\right],$$

d. h. wenn man beachtet, dass nach (g') (für $m=r-1$) die erste Zeile $= -\frac{A_{2r-2}}{h}$:

$$\int_\alpha^{\frac{1}{2}h}\frac{z}{h^{2r-1}}\left[\frac{z^{2r-4}}{1..2r-3}\,\frac{1}{2r-1}+\ldots+\frac{A_{2r-4}h^{2r-4}}{1}\,\frac{1}{3}\right]\partial z=$$

$$-\left[A_{2r-2}h^{2r-2}+\frac{A_{2r-4}\alpha^2h^{2r-4}}{1.2.3}+\frac{A_{2r-6}\alpha^4h^{2r-6}}{1\ldots5}+\ldots+\frac{A_2\alpha^{2r-4}h^2}{1..2r-3}+\frac{A_1\alpha^{2r-3}h}{1..2r-2}\right.$$

$$\left.+\frac{\alpha^{2r-2}}{1\ldots2r-1}\right]\frac{1}{h^{2r-1}}=-\frac{1}{\alpha h^{2r-1}}\varphi'(\alpha,r),$$

und da α eben auch zwischen 0 und $\frac{1}{2}h$ liegt, so hat also $-\frac{1}{zh^{2r-1}}\frac{\partial\varphi(z,r)}{\partial z}$ dasselbe Zeichen wie $\frac{\partial\varphi(z,r-1)}{\partial z}$; d. h. da $zh^{2r-1}>0$, es haben $\frac{\partial\varphi(z,r-1)}{\partial z}$ und $\frac{\partial\varphi(z,r)}{\partial z}$ verschiedenes Zeichen, so dass mithin, wenn die erste Grösse ihr Zeichen nicht wechselt, die zweite in derselben Lage seyn wird. Da nun für $r=3$ die Behauptung gerechtfertigt ist, so gilt sie allgemein. Wir haben hiebei allerdings h positiv vorausgesetzt; allein die Behauptung gilt auch für negative h. Denn sey $z=\alpha h$, wo α zwischen 0 und 1, so ist

$$\varphi(z)=h^{2m}\left[\frac{\alpha^{2m}}{1..2m}+\frac{A_1\alpha^{2m-1}}{1..2m-1}+\ldots+\frac{A_{2m-1}\alpha^2}{1.2}\right],$$

und da für positive h die Grösse $\varphi(z)$ nie Null wird von $z=0$ bis $z=h$, so muss die eingeklammerte Grösse in dieser Lage seyn, wenn α von 0 bis 1 geht. Ist nun aber h negativ $=-h'$, und man setzt $z=\alpha h=-\alpha h'$, so erhält man

$$\varphi(z)=(-h')^{2m}\left[\frac{\alpha^{2m}}{1..2m}+\frac{A_1\alpha^{2m-1}}{1..2m-1}+\ldots+\frac{A_{2m-2}\alpha^2}{1.2}\right],$$

welche Grösse demnach ebenfalls nicht 0 werden kann, wenn α von 0 bis 1 geht (d. h. z von 0 bis h). Daraus folgt nun, dass von $z=0$ bis $z=h$ die Grösse $\varphi(z)$ immer dasselbe Zeichen habe, so dass nach §. 49:

$$\int_0^h\varphi(z)f^{2m+1}(x+z)\partial z=f^{2m+1}(x+\Theta h)\int_0^h\varphi(z)\partial z=-A_{2m}f^{2m+1}(x+\Theta h).h^{2m+1},$$

und mithin:

$$\Delta f(x)-\frac{1}{2}h\Delta f'(x)+\frac{B_1}{1.2}h^2\Delta f''(x)-\frac{B_3h^4}{1..4}\Delta f^4(x)+..+\frac{(-1)^mB_{2m-3}h^{2m-2}}{1..2m-2}\Delta f^{2m-2}(x)$$

$$=hf'(x)+\frac{(-1)^mB_{2m-1}h^{2m+1}}{1..2m}f^{2m+1}(x+\Theta h),\qquad\text{(A)}$$

welche Gleichung nur voraussetzt, es sey $f^{2m+1}(x+z)$ endlich und stetig von $z=0$ bis $z=h$, und wobei Θ zwischen 0 und 1 liegt.

Für manche Fälle lässt sich die Gleichung (A) unter etwas bequemere Form bringen.

Gesetzt nämlich $f^{2m+1}(x+z)$ behalte dasselbe Zeichen von $z=0$ bis $z=h$, so ist:

$$\int_0^h \varphi(z) f^{2m+1}(x+z)\partial z = \varphi(\Theta h)\int_0^h f^{2m+1}(x+z)\partial z = \varphi(\Theta h)\,[f^{2m}(x+h) - f^{2m}(x)]$$
$$= \varphi(\Theta h)\,\Delta f^{2m}(x).$$

Nun erreicht aber $\varphi(z)$ ihren (dem Zahlenwerthe nach) grössten Werth für $z=\frac{1}{2}h$, da sie von $z=0$ bis $z=\frac{1}{2}h$ beständig wächst oder abnimmt; desshalb ist $\varphi(\Theta h) < \varphi(\frac{1}{2}h)$, und von demselben Zeichen, so dass etwa $\varphi(\Theta h) = \Theta_1 \varphi(\frac{1}{2}h)$, und also

$$\int_0^h \varphi(z) f^{2m+1}(x+z)\partial z = \Theta\varphi(\tfrac{1}{2}h)\,\Delta f^{2m}(x).$$

Aus der Gleichung

$$\frac{\cos x}{x} - \cot g\, x + \operatorname{tg}\frac{x}{2} + \sin x = \left(\frac{1}{x} - \cot g\, x\right)\cos x$$

folgt aber, wie in §. 27:

$$-\frac{2m+1}{1..2m+2}\cdot\frac{1}{2^{2m+2}} + \frac{B_1}{1.2}\,\frac{1}{1..2m}\cdot\frac{1}{2^{2m}} - \frac{B_3}{1..4}\cdot\frac{1}{1..2m-2}\cdot\frac{1}{2^{2m-2}} + \dots$$
$$\pm\frac{B_{2m-1}}{1..2m}\,\frac{1}{1.2}\cdot\frac{1}{2^2} = \mp\frac{2^{2m+2}-1}{2^{2m+1}}\,\frac{B_{2m+1}}{1..2m+2},$$

woraus dann sehr leicht folgt:

$$\varphi(\tfrac{1}{2}h) = \frac{(-1)^m (2^{2m}-1) B_{2m-1}}{1.2\dots 2m}\cdot\frac{h^{2m}}{2^{2m-1}},$$

so dass

$$\int_0^h \varphi(z) f^{2m+1}(x+z)\partial z = (-1)^m\Theta\frac{2^{2m}-1}{2^{2m-1}} B_{2m-1} h^{2m}\Delta f^{2m}(x)$$

und

$$\Delta f(x) - \tfrac{1}{2}h\Delta f'(x) + \dots + \frac{(-1)^m B_{2m-3} h^{2m-2}}{1..2m-2}\Delta f^{2m-2}(x) = hf'(x)$$
$$+(-1)^m\Theta\frac{2^{2m}-1}{2^{2m-1}}\,\frac{B_{2m-1} h^{2m}}{1..2m}\Delta f^{2m}(x).$$

Addirt man beiderseitig $-\frac{(-1)^m B_{2m-1} h^{2m}}{1..2m}\Delta f^{2m}(x)$, und beachtet, dass

$$(-1)^m\Theta\frac{2^{2m}-1}{2^{2m-1}} - (-1)^m = (-1)^m\left[2\Theta - \frac{\Theta}{2^{2m-1}} - 1\right]$$

immer zwischen -1 und $+1$ liegt, so ist

$$\Delta f(x) - \tfrac{1}{2}h\Delta f'(x) + \frac{B_1 h^2}{1.2}\Delta f''(x) - \frac{B_3 h^4}{1..4}\Delta f^4(x) + \dots$$

$$\pm \frac{B_{2m-1} h^{2m}}{1..2m} \Delta f^{2m}(x) = h f'(x) + \frac{\Theta' B_{2m-1} h^{2m}}{1..2m} \Delta f^{2m}(x), \qquad \text{(B)}$$

wenn Θ' zwischen -1 und $+1$ liegt. Diese Gleichung setzt voraus, dass $f^{2m+1}(x+z)$ von $z=0$ bis $z=h$ immer dasselbe Zeichen habe.

§. 114.

Von den beiden in §. 113 aufgestellten Lehrsätzen lässt sich nun eine wichtige Anwendung auf die näherungsweise Ermittlung des Werthes bestimmter Integrale machen. Man setze nämlich

$$f(x) = \int F(x)\partial x, \text{ also } \Delta f(x) = \int_x^{x+h} F(x)\partial x,\ f'(x) = F(x), \ldots,$$

so erhält man aus (A) leicht:

$$\int_a^{a+h} F(x)\partial x = hF(a) + \tfrac{1}{2}h[F(a+h) - F(a)] - \frac{B_1}{1.2}h^2[F'(a+h) - F'(a)] + \ldots$$

$$\pm \frac{B_{2m-3} h^{2m-2}}{1..2m-2}[F^{2m-3}(a+h) - F^{2m-3}(a)]$$

$$\mp \frac{B_{2m-1} h^{2m+1}}{1..2m} F^{2m}(a+\Theta_1 h),$$

$$\int_{a+h}^{a+2h} F(x)\partial x = hF(a+h) + \tfrac{1}{2}h[F(a+2h) - F(a+h)] - \frac{B_1}{1.2}h^2[F'(a+2h) - F'(a+h)] + \ldots$$

$$\pm \frac{B_{2m-3} h^{2m-2}}{1..2m-2}[F^{2m-3}(a+2h) - F^{2m-3}(a+h)]$$

$$\mp \frac{B_{2m-1} h^{2m+1}}{1..2m} F^{2m}(a+h+\Theta_2 h),$$

$$\vdots$$

$$\int_{a+(n-1)h}^{a+nh} F(x)\partial x = hF(a+\overline{n-1}h) + \tfrac{1}{2}h[F(a+nh) - F(a+\overline{n-1}h)] - \ldots$$

$$\pm \frac{B_{2m-3} h^{2m-2}}{1..2m-2}[F^{2m-3}(a+nh) - F^{2m-3}(a+\overline{n-1}h)]$$

$$\mp \frac{B_{2m-1} h^{2m+1}}{1..2m} F^{2m}(a+\overline{n-1}h+\Theta_n h).$$

Durch Addition ergibt sich hieraus:

$$\int_a^{a+nh} F(x)\partial x = h[F(a) + F(a+h) + \ldots + F(a+\overline{n-1}h)] + \tfrac{1}{2}h[F(a+nh) - F(a)]$$

$$- \frac{B_1}{1.2}h^2[F'(a+nh) - F'(a)] + \ldots \pm \frac{B_{2m-3} h^{2m-2}}{1..2m-2}[F^{2m-3}(a+nh) - F^{2m-3}(a)]$$

$$\mp \frac{h^{2m+1} B_{2m-1}}{1..2m} R,$$

wo $R = F^{2m}(a+\Theta_1 h) + F^{2m}(a+h+\Theta_2 h) + \dots\dots + F^{2m}(a+\overline{n-1}\,h + \Theta_n h)$. Gesetzt nun, es sey $a+nh=b$, also $h=\frac{b-a}{n}$, wo n eine positive ganze Zahl, so ist der (absolute) Werth von R sicher kleiner als nM, wenn M der **grösste Werth** ist, den $F^{2m}(z)$ erreicht, wenn z von a bis b geht. Daraus nun folgt der Satz I:

„Setzt man

$$\int_a^b F(x)\partial x = h[\tfrac{1}{2}F(a)+F(a+h)+F(a+2h)+\dots+F(b-h)+\tfrac{1}{2}F(b)]$$

$$-\frac{B_1}{1.2}h^2[F'(b)-F'(a)] + \frac{B_3 h^4}{1..4}[F^3(b)-F^3(a)] - \dots \pm \frac{B_{2m-1}h^{2m}}{1..2m}[F^{2m-1}(b)-F^{2m-1}(a)],$$

wo $h=\frac{b-a}{n}$, n eine (willkürliche) positive ganze Zahl, so ist der begangene Fehler geringer als $\frac{nB_{2m+1}h^{2m+3}}{1..2m+2}M$, wo M der grösste Werth ist, den $F^{2m+2}(z)$ erlangt, wenn z von a bis h geht. Dabei muss $F^{2m+2}(z)$ innerhalb dieser Gränzen endlich seyn."

Was die Grösse

$$\Theta_1'[F^{2m-1}(a+h)-F^{2m-1}(a)] + \Theta_2'[F^{2m-1}(a+2h)-F^{2m-1}(a+b)+\dots$$
$$+\Theta_n'[F^{2m-1}(b)-F^{2m-1}(b-h)],$$

wo die einzelnen Θ' zwischen -1 und $+1$ liegen, anbelangt, so sind die eingeklammerten Differenzen alle von demselben Zeichen, indem wir voraussetzen wollen, $F^{2m-1}(z)$ wachse von $x=a$ bis $x=b$, oder nehme beständig ab; daraus folgt, dass dieselbe zwischen zwei Gränzen liegt, die man bekommt, wenn man alle Θ' gleich -1 oder gleich $+1$ setzt; d. h. jene Grösse liegt zwischen $-[F^{2m-1}(b)-F^{2m-1}(a)]$ und $+[F^{2m-1}(b)-F^{2m-1}(a)]$, ist also gleich $\Theta'[F^{2m-1}(b)-F^{2m-1}(a)]$, wo Θ' zwischen -1 und $+1$. Somit erhält man aus der Formel (B) in derselben Weise wie oben den folgenden Satz II:

„Setzt man

$$\int_a^b F(x)\partial x = h[\tfrac{1}{2}F(a)+F(a+h)+F(a+2h)+\dots+F(b-h)+\tfrac{1}{2}F(b)]$$

$$-\frac{B_1}{1.2}h^2[F'(b)-F'(a)] + \frac{B_3 h^4}{1..4}[F^3(b)-F^3(a)] + \dots \pm \frac{B_{2m-1}h^{2m}}{1..2m}[F^{2m-1}(b)-F^{2m-1}(a)],$$

so ist der begangene Fehler $=\Theta'\frac{B_{2m-1}h^{2m}}{1..2m}[F^{2m-1}(b)-F^{2m-1}(a)]$, wo Θ' zwischen -1 und $+1$ liegt. Dabei ist aber vorausgesetzt, dass $F^{2m}(z)$

von $z=a$ bis $z=b$ immer dasselbe Zeichen habe, während $h=\frac{b-a}{n}$, und n eine positive ganze Zahl ist.“

Da man, wenn $F^{2m}(z)$ nicht dieser Bedingung entsprechen sollte, durch Einschieben von Gränzen das vorgelegte Integral immer in eine Summe mehrerer anderer zerlegen kann, die sämmtlich jener Bedingung genügen, so steht der Anwendung des Satzes II desshalb kein Hinderniss entgegen. In der Regel ist derselbe bequemer, als I.

Was die vorkommenden Koeffizienten anbelangt, so ist:

$$\frac{B_1}{1.2}=0{\cdot}08333\,33333\,333333,\quad \frac{B_3}{1..4}=0{\cdot}00138\,88888\,888888,$$
$$\frac{B_5}{1..6}=0{\cdot}00003\,30687\,830688,\quad \frac{B_7}{1..8}=0{\cdot}00000\,08267\,195767,$$
$$\frac{B_9}{1..10}=0{\cdot}00000\,00208\,767570,\quad \frac{B_{11}}{1..12}=0{\cdot}00000\,00005\,284190,$$
$$\frac{B_{13}}{1..14}=0{\cdot}00000\,00000\,133825,\quad \frac{B_{15}}{1..16}=0{\cdot}00000\,00000\,003390,$$
$$\frac{B_{17}}{1..18}=0{\cdot}00000\,00000\,000086,\quad \frac{B_{19}}{1..20}=0{\cdot}00000\,00000\,000002.$$

Ein Zahlenbeispiel zuzufügen, halten wir nicht für nothwendig, da eine theoretische Schwierigkeit der Anwendung dieser Sätze nicht entgegensteht. Dagegen wollen wir einige weitere Folgerungen aus denselben ziehen.

§. 115.

Die Sätze des §. 114 dienen auch zur Summirung von Reihen. Man erhält nämlich daraus:

$$h[F(a)+F(a+h)+F(a+2h)+\ldots+F(a+\overline{n-1}h)]=\int_a^{a+nh}F(x)\,\partial x-\frac{h}{2}[F(a+nh)-F(a)]$$
$$+\frac{B_1h^2}{1.2}[F'(a+nh)-F'(a)]-\frac{B_3h^4}{1..4}[F^3(a+nh)-F^3(a)]+\ldots.$$
$$\mp\frac{B_{2m-1}h^{2m}}{1..2m}[F^{2m-1}(a+nh)-F^{2m-1}(a)],$$

wenn $F^{2m+1}(x)$ endlich ist von $x=a$ bis $x=a+nh$. Der dabei begangene Fehler liegt unter $\frac{nB_{2m+1}h^{2m+3}}{1..2m+2}M$, wo M der grösste Werth ist, den $F^{2m+2}(x)$ innerhalb der Gränzen a und $a+nh$ erlangt.

Ist $F^{2m}(x)$ immer von demselben Zeichen von $x=a$ bis $x=a+nh$, so ist der begangene Fehler kleiner als das letzte Glied.

Als Anwendungen dieser Sätze mögen die folgenden Resultate dienen.

I. Da für $F(x)=x^r$, $\frac{\partial^{r+1}F(x)}{\partial x^{r+1}}=0$, so ist

$$h[a^r+(a+h)^r+(a+2h)^r+\ldots+(a+\overline{n-1}h)^r]=\frac{(a+nh)^{r+1}-a^{r+1}}{r+1}-\frac{h}{2}[(a+nh)^r$$

$$-a^r]+\frac{B_1 h^2 r}{1.2}[(a+nh)^{r-1}-a^{r-1}]-\frac{B_3 h^4 r(r-1)(r-2)}{1.2.3.4}[(a+nh)^{r-3}-a^{r-3}]+\ldots$$

welche Reihe, deren allgemeines Glied $\pm\frac{B_{2m-1}\,h^{2m}}{1..2m}\,r(r-1)\ldots\ldots(r-2m+2)$ $[(a+nh)^{r-2m+1}-a^{r-2m+1}]$ ist, von selbst schliesst. Diese Formel gibt die allgemeine Summirung der Potenzreihen. (Vergl. „Grundzüge" S. 91).

II. Setzt man $F(x)=\frac{1}{x}$, so ist $F^{2m}(x)=\frac{1.2..2m}{x^{2m+1}}$, welche Grösse ihr Zeichen nicht wechselt, so lange x dasselbe Zeichen hat; demnach ist

$$\int_a^{a+nh}\frac{\partial x}{x}=h\left[\frac{1}{2}\,\frac{1}{a}+\frac{1}{a+h}+\ldots+\frac{1}{a+(n-1)h}+\frac{1}{2}\,\frac{1}{a+nh}\right]-\frac{B_1 h^2}{1.2}\left[-\frac{1}{(a+nh)^2}+\frac{1}{a^2}\right]+\frac{B_3 h^4}{1..4}\left[-\frac{1.2.3}{(a+nh)^4}+\frac{1.2.3}{a^4}\right]-\ldots..,$$

so dass

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{a+h}+\frac{1}{a+2h}+\ldots+\frac{1}{a+nh}=\frac{1}{h}\,l\left(\frac{a+nh}{a}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a+nh}+\frac{1}{a}\right)$$
$$+\frac{B_1 h}{2}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{(a+nh)^2}\right)-\frac{B_3 h^3}{4}\left(\frac{1}{a^4}-\frac{1}{(a+nh)^4}\right)+\ldots$$
$$\ldots\pm\frac{B_{2m-1}\,h^{2m-1}}{2m}-\left(\frac{1}{a^{2m}}-\frac{1}{(a+nh)^{2m}}\right),$$

wo der Fehler geringer ist, als das letzte Glied. Diese Reihe kommt in der Rentenrechnung vor, und da dort a bedeutend grösser ist, als h, so wird die zweite Seite ziemlich rasch konvergiren.

III. Setzt man $F(x)=l(1+x)$, nimmt $h=1$, $a>0$, so ist $\int F(x)\,\partial x=(1+x)[l(1+x)-1]$, also

$$l(1+a)+l(2+a)+l(3+a)+\ldots+l(n+a)=(n+1+a)[l(1+n+a)-1]$$
$$-(1+a)[l(1+a)-1]-\frac{1}{2}[l(1+n+a)-l(1+a)]+\frac{B_1}{1.2}\left[\frac{1}{1+n+a}-\frac{1}{a}\right]$$
$$-\frac{B_3}{3.4}\left[\frac{1}{(1+n+a)^3}-\frac{1}{a^3}\right]+\ldots.\pm\frac{B_{2m-1}}{(2m-1)2m}\left[\frac{1}{(1+n+a)^{2m-1}}-\frac{1}{a^{2m-1}}\right],$$

wobei der Fehler geringer ist als das letzte Glied. Setzt man hier $n-1$ für n, so hat man

$$l(1+a)+l(2+a)+\ldots+l(n+a-1)=\left(n+a-\frac{1}{2}\right)l(n+a)-(n+a)$$
$$+\frac{B_1}{1.2}\,\frac{1}{n+a}-\frac{B_3}{3.4}\,\frac{1}{(n+a)^3}+\ldots.\pm\frac{B_{2m-1}}{(2m-1)2m}\,\frac{1}{(n+a)^{2m-1}}+C,$$

wenn man mit C denjenigen Theil bezeichnet, der nicht von n abhängt.

Demnach ist (wenn wieder $n+1$ für n gesetzt wird)

$$C=Gr.\left[l(1+a)+l(2+a)+\ldots+l(n+a)-\left(n+a+\frac{1}{2}\right)l(1+n+a)+(n+1+a)\right]$$
$$=Gr.\,l\left(\frac{(1+a)(2+a)\ldots(n+a)}{(n+a+1)^{n+a+\frac{1}{2}}}\,e^{n+1+a}\right)=Gr.\,l\left(\frac{(1+a)\ldots(n-1+a)}{(n+a)^{n+a-\frac{1}{2}}}\,e^{n+a}\right)$$
$$=Gr.\,l\left(\frac{(1+a)\ldots(n+a)}{(n+a)^{n+a+\frac{1}{2}}}\,e^{n+a}\right).$$

Nach §. 106 ist aber

$$\text{Gr.}\, l\,\frac{(1+a)(2+a)\dots(n+a)}{1.2\dots(n-1).n^{1+a}} = -l[\Gamma(1+a)],$$

also, wenn man subtrahirt:

$$\text{Gr.}\, l\,\frac{e^{n+a}1.2\dots(n-1)\,n^{1+a}}{(n+a)^{n+a+\frac{1}{2}}} = C+l[\Gamma(1+a)],$$

d. h.

$$\text{Gr.}\, l\,\frac{1.2\dots(n-1).e^{n+a}\,n^{1+a}}{\left(1+\frac{a}{n}\right)^{n\left(1+\frac{a}{n}+\frac{1}{2n}\right)}n^{n+a+\frac{1}{2}}} = C+l[\Gamma(1+a)]$$

Nun ist aber für $n=\infty$: $\left(1+\frac{a}{n}\right)^n = e^a$ (§. 22, IV), also $\left(1+\frac{a}{n}\right)^{n\left(1+\frac{a}{n}+\frac{1}{2n}\right)}$

$$=\left[\left(1+\frac{a}{n}\right)^n\right]^{1+\frac{a}{n}+\frac{1}{2n}} = [e^a]^{1+\frac{a}{n}+\frac{1}{2n}} = e^a,$$ mithin ist

$$C+l[\Gamma(1+a)] = \text{Gr.}\, l\,\frac{1.2\dots(n-1)\,e^n e^a.n.n^a}{e^a.n^{n+\frac{1}{2}}n^a} = \text{Gr.}\, l\left(\frac{1.2\,\dots\,n\,e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}\right),$$

welch letztere Grösse von a unabhängig ist. Also hat man:

$$l(1+a)+l(2+a)+\dots+l(n+a-1)-\left(n+a-\frac{1}{2}\right)l(n+a)+n+a=$$

$$\frac{B_1}{1.2}\,\frac{1}{n+a}-\frac{B_3}{3.4}\,\frac{1}{(n+a)^3}+\dots\pm\frac{B_{2m-1}}{(2m-1)2m}\,\frac{1}{(n+a)^{2m-1}}+\frac{\Theta' B_{2m-1}}{(2m-1)2m}\,\frac{1}{(n+a)^{2m-1}}$$
$$-l[\Gamma(1+a)]+C',$$

wo C' unabhängig von n und a. Setzt man also $a=\frac{1}{2}$ und lässt $n=\infty$ werden, so ist

$$\text{Gr.}\, l\left(\frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdots\frac{2n-1}{2}}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^n}\,e^{n+\frac{1}{2}}\right)=-l\,\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)+C'=$$

$$\text{Gr.}\, l\,\frac{3.5\dots(2n-1)}{2^{n-1}}\cdot\frac{e^{n+\frac{1}{2}}}{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n.n^n}=\text{Gr.}\, l\left(\frac{3.5\dots(2n-1)}{2^{n-1}}\cdot\frac{e^n}{n^n}\right).$$

Aber $\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\Gamma\left(1+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$; $l\,\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=-l(2)+l(\sqrt{\pi})$, demnach

$$C'=l(\sqrt{\pi})+\text{Gr.}\, l\left(\frac{3.5\dots 2n-1}{2^n}\,\frac{e^n}{n^n}\right).$$

Dagegen ist für $a=1$, wegen $\Gamma(a)=1$, und $n=\infty$:

$$C'=\text{Gr.}\, l\,\frac{1.2.3\dots n}{(n+1)^{n+\frac{1}{2}}}\,e^{n+1}=\text{Gr.}\, l\,\frac{1.2.3\dots n\,e^{n+1}}{n^{n+\frac{1}{2}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}}=\text{Gr.}\, l\,\frac{1.2..n}{n^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{e^n}{n^n}.$$

Setzt man hier 2n für n, so ist

$$C' = \text{Gr.}\, l\, \frac{1.2.3\ldots 2n}{(2n)^{\frac{1}{2}}} \frac{e^{2n}}{(2n)^{2n}} = \text{Gr.}\, l\, \frac{1\ldots 2n}{2^{\frac{1}{2}} n^{\frac{1}{2}} 2^{2n}} \frac{e^{2n}}{n^{2n}}.$$

Ferner ist offenbar

$$C' = \text{Gr.}\, l\, \frac{2.4.6\ldots 2n}{n^{\frac{1}{2}} \cdot 2^n} \frac{e^n}{n^n}, \text{ also } 0 = \text{Gr.}\, l \left(\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^n} \frac{e^n}{n^n}\right) =$$

$$\text{Gr.}\, l \left(\frac{1.3\ldots 2n-1}{2^n} \frac{e^n}{n^n}\right) - \frac{1}{2} l(2),$$

so dass, wenn man obigen Werth beobachtet:

$$0 = C' - l(\sqrt{\pi}) - \frac{1}{2} l(2),\ C' = \frac{1}{2} l(2\pi),$$

und also endlich:

$$l(1+a) + l(2+a) + \ldots + l(n-1+a) = \left(n+a-\frac{1}{2}\right) l(n+a) - (n+a) - l[\Gamma(1+a)]$$

$$+ \frac{1}{2} l(2\pi) + \frac{B_1}{1.2} \frac{1}{n+a} - \frac{B_3}{3.4} \frac{1}{(n+a)^3} + \ldots \pm \frac{B_{2m-1}}{(2m-1)2m} \frac{1}{(n+a)_{2m-1}}$$

$$+ \frac{\Theta' B_{2m-1}}{(2m-1)2m} \frac{1}{(n+a)^{2m-1}},$$

wo Θ' zwischen -1 und $+1$ liegt.

Hieraus folgt leicht das Produkt $(1+a)(2+a)\ldots(n-1+a)$, wenn man von den Logarithmen zu den Zahlen übergeht. Ist n gross genug, um $\frac{1}{(n+a)^3}$ vernachlässigen zu können, so ist

$$(1+a)(2+a)\ldots(n-1+a) = \frac{(n+a)^{n+a-\frac{1}{2}} e^{-(n+a)}}{\Gamma(1+a)} . \sqrt{2\pi} . e^{\frac{1}{12(n+a)}}$$

woraus

$$(1+a)(2+a)\ldots(n+a) = \frac{(n+a)^{n+a+\frac{1}{2}} e^{-(n+a)} \sqrt{2\pi} . e^{\frac{1}{12(n+a)}}}{\Gamma(1+a)}.$$

Für $a=0$ folgt hieraus

$$1.2\ldots n = n^n e^{-n} \sqrt{2n\pi}\, e^{\frac{1}{12n}} = \Gamma(n+1),$$

was man auch für $a=1$ findet, wenn man $n-1$ für n setzt.

Also auch dann

$$1.2\ldots 2n = 2^{2n} . n^{2n} e^{-2n} \sqrt{4n\pi}\, e^{\frac{1}{24n}},$$

$$2.4\ldots 2n = 2^n . n^n . e^{-n} \sqrt{2n\pi}\, e^{\frac{1}{12n}},$$

woraus noch durch Division

$$1.3.5\ldots(2n-1) = 2^n . n^n . e^{-n} \sqrt{2} . e^{-\frac{1}{24n}}.$$

Von diesen Formeln wird in der Wahrscheinlichkeitsrechnung häufig Gebrauch gemacht. Man vergl. etwa meine „Ausgleichung der Beobachtungsfehler nach der Methode der kleinsten Quadratsummen", (Braunschweig, Vieweg, 1857), S. 77 ff.

§. 116.

Die oben auseinander gesetzte Methode verlangt, dass in dem bestimmten Integral $\int_a^b y\partial x$ die Grösse y als Funktion von x direkt gegeben ist. In diesem Falle wird sie immer anwendbar seyn, da sie in allen Fällen eine Schätzung der Fehlergränze zulässt. Anders verhält sich jedoch die Sache, wenn y nicht als Funktion von x gegeben ist, sondern man nur für eine Reihe von Werthen von x, die zwischen a und b liegen, die zugehörigen Werthe von y kennt. Sind in diesem Falle die Werthe von x in gleichem Abstande h, und ist $h=\frac{b-a}{n}$, so kann man, wenn $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_n$ die Werthe von y für $x=a, a+h, \ldots, b$ sind, nach §. 114 ungefähr setzen:

$$\int_a^b y\partial x=h\left[\frac{1}{2}y_0+y_1+y_2+\cdots+y_{n-1}+\frac{1}{2}y_n\right],$$

wobei man freilich keinen Massstab für die Fehlergränze hat. Genauer wird übrigens die Formel des §. 54, VI seyn, nach der

$$\int_a^b y\partial x=\frac{h}{3}[y_0+4y_1+2y_2+4y_3+2y_4+\ldots 2y_{2n-2}+4y_{2n-1}+y_{2n}],$$

wobei $h=\frac{b-a}{2n}$ vorausgesetzt ist.

Ist aber die Annahme, es seyen die Werthe von x in gleichem Abstande, nicht zulässig, so kann man sich in dieser Weise nicht helfen. Gesetzt nämlich, es seyen für $x=a, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$, b, wo $a<\alpha_1<\alpha_2<\ldots<\alpha_{n-1}<b$ die Werthe von y: $y_0, y_1, y_2, \ldots\ldots, y_{n-1}, y_n$, und man wisse sonst Nichts über y (als Funktion von x), so wird man, eben in dieser Ungewissheit, annehmen, y sey eine g a n z e Funktion von x, d. h. eine nach Potenzen von x geordnete Funktion, derart, dass y die obigen Werthe annimmt, wenn x die angegebenen Werthe hat. Man sieht leicht, dass alsdann

$$y=g+g_1x+g_2x^2+\ldots+g_nx^n$$

seyn muss, wo nun $g, g_1, \ldots, g_n$ (der Anzahl nach $n+1$) so zu bestimmen sind, dass für $x=a, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, b: y=y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}, y_n$ ist. Daraus folgen für $g, g_1, \ldots, g_n$ bestimmte Werthe, und es gibt eben desshalb nur eine einzige ganze Funktion von x vom Grade n, welche diesen Bedingungen genügt. Finden wir also irgendwie eine solche, so ist es die verlangte. Als solche erscheint aber sofort:

$$y=\frac{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_{n-1})(x-b)}{(a-\alpha_1)(a-\alpha_2)\ldots(a-\alpha_{n-1})(a-b)}y_0$$
$$+\frac{(x-a)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_{n-1})(x-b)}{(\alpha_1-a)(\alpha_1-\alpha_2)\ldots(\alpha_1-\alpha_{n-1})(x-b)}y_1$$
$$+\vdots\ldots$$

$$+\frac{(x-a)(x-\alpha_1)\ldots(x-\alpha_{n-2})(x-\alpha_{n-1})}{(b-a)(b-\alpha_1)\ldots(b-\alpha_{n-2})(b-\alpha_{n-1})}y_n,$$

welche sicher vom n^{ten} Grade ist, und den obigen Bedingungen genügt. Setzt man

$$(x-a)(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_{n-1})(x-b)=f(x),$$

so heisst diese Gleichung auch:

$$y=\frac{f(x)}{x-a}\cdot\left[\frac{x-a}{f(x)}y\right]_a+\frac{f(x)}{x-\alpha_1}\left[\frac{x-\alpha_1}{f(x)}y\right]_{\alpha_1}+\ldots\ldots$$

$$+\frac{f(x)}{x-\alpha_{n-1}}\left[\frac{x-\alpha_{n-1}}{f(x)}y\right]_{\alpha_{n-1}}+\frac{f(x)}{x-b}\left[\frac{x-b}{f(x)}y\right]_b,$$

wo die angehängten Zeiger andeuten, man solle in der eingeklammerten Grösse $x=a, \alpha_1, \ldots, b$ setzen. Demnach ist

$$\int_a^b y\,\partial x=\left[\frac{x-a}{f(x)}y\right]_a\int_a^b\frac{f(x)\,\partial x}{x-a}+\left[\frac{x-\alpha_1}{f(x)}y\right]_{\alpha_1}\int_a^b\frac{f(x)\,\partial x}{x-\alpha_1}+\ldots+\left[\frac{x-b}{f(x)}y\right]_b\int_a^b\frac{f(x)\,\partial x}{x-b}.$$

Diese Formel ist natürlich genau richtig, wenn wirklich y eine ganze Funktion des Grades n ist; sie ist nur näherungsweise richtig, wenn dies nicht der Fall ist. Sie gilt natürlich auch, wenn $a, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}, b$ in gleichen Abständen sind.

Die Grössen $\frac{f(x)}{x-a}, \frac{f(x)}{x-\alpha_1}, \ldots, \frac{f(x)}{x-b}$ sind Produkte von n Faktoren des ersten Grades, ihre Integrale lassen sich also immer direkt ermitteln. Zu dem Ende bemerken wir, dass:

$$(x-a_1)(x-a_2)=x^2-(a_1+a_2)x+a_1a_2,$$

$$(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)=x^3-(a_1+a_2+a_3)x^2+(a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3)x-a_1a_2a_3,$$

$$(x-a_1)\ldots(x-a_4)=x^4-(a_1+a_2+a_3+a_4)x^3+(a_1a_2+a_1a_3+a_1a_4+a_2a_3+a_2a_4+a_3a_4)x^2-(a_1a_2a_3+a_1a_2a_4+a_1a_3a_4+a_2a_3a_4)x+a_1a_2a_3a_4,$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)=x^n-C_1x^{n-1}+C_2x^{n-2}-C_3x^{n-3}+\ldots\pm C_{n-1}x\mp C_n,$$

wenn man mit $C_1, C_2, \ldots, C_n$ die Summe der Combinationen zur ersten, zweiten, ..., n^{ten} Klasse aus den Elementen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (ohne Wiederholungen) bezeichnet.

Man kann übrigens auch etwas anders verfahren. Gesetzt nämlich, man habe irgend wie

$$f(x)=A_0+A_1x+A_2x^2+\ldots\ldots+A_{n+1}x^{n+1}$$

gefunden, und sey $x-k$ einer der Faktoren von $f(x)$; ferner

$$\frac{f(x)}{x-k}=B_0+B_1x+B_2x^2+\ldots+B_nx^n,$$

so muss identisch

$$A_0+A_1x+A_2x^2+\ldots+A_{n+1}x^{n+1}=(x-k)(B_0+B_1x+\ldots+B_nx^n)$$

seyn. Daraus folgt:

$$
\begin{array}{l|l}
A_0 = -B_0 k, & B_0 = -\frac{A_0}{k}, \\
A_1 = B_0 - B_1 k, & B_1 = \frac{B_0 - A_1}{k}, \\
A_2 = B_1 - B_2 k, & B_2 = \frac{B_1 - A_2}{k}, \\
\vdots & \vdots \\
A_n = B_{n-1} - B_n k & B_n = \frac{B_{n-1} - A_n}{k} \\
A_{n+1} = B_n &
\end{array}
$$

wornach $B_0, \ldots, B_n$ aus $A_0, A_1, \ldots, A_{n+1}$ leicht gefunden werden. Ist nun

$$\int f(x)\,\partial x = A_0 x + A_1 \frac{x^2}{2} + A_2 \frac{x^3}{3} + \ldots + A_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + A_{n+1} \frac{x^{n+2}}{n+2},$$

so ist also

$$\int \frac{f(x)}{x-k}\,\partial x = B_0 x + B_1 \frac{x^2}{2} + B_2 \frac{x^3}{3} + \ldots + B_n \frac{x^{n+1}}{n+1},$$

wo

$$B_0 = -\frac{A_0}{k},\ B_1 = \frac{B_0 - A_1}{k}, \ldots,\ B_n = \frac{B_{n-1} - A_n}{k}.$$

Wie man sich noch weitere Erleichterungen verschaffen kann, ist wohl nicht schwer abzusehen. Das Gesagte mag aber genügen.

Anhang.

Einzelne Ausführungen und Uebungen enthaltend.

I.

Sey die Summe der Reihe

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n \qquad (a)$$

gleich y, so ist natürlich y eine Funktion von x; seyen ferner $A_0, A_1, \ldots, A_n$ eine Reihe von Grössen so beschaffen, dass wenn man nach dem Schema des §. 11 ihre Differenzen bildet, die r^ten Differenzen sämmtlich einander gleich seyen, so lässt sich die Summe der Reihe

$$A_0 a_0 + A_1 a_1 x + A_2 a_2 x^2 + \ldots + A_n a_n x^n \qquad (a')$$

angeben. Da nämlich („Grundzüge" S. 81)

$$A_m = A_0 + \frac{m}{1} \Delta A_0 + \frac{m(m-1)}{1.2} \Delta^2 A_0 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-r+1)}{1.2\ldots r} \Delta^r A_0,$$

so ist hiernach

$$A_0 = A_0,$$
$$A_1 = A_0 + \Delta A_0,$$
$$A_2 = A_0 + 2\Delta A_0 + \Delta^2 A_0,$$
$$\vdots$$
$$A_r = A_0 + \frac{r}{1} \Delta A_0 + \frac{r(r-1)}{1.2} \Delta^2 A_0 + \ldots + \Delta^r A_0,$$
$$\vdots$$
$$A_n = A_0 + \frac{n}{1} \Delta A_0 + \frac{n(n-1)}{1.2} \Delta^2 A_0 + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{1.2\ldots r} \Delta^r A_0.$$

Hieraus folgt:

$$A_0 a_0 + A_1 a_1 x + A_2 a_2 x^2 + \ldots + A_n a_n x^n =$$

$$A_0 (a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n) + \frac{\Delta A_0}{1} (a_1 + 2 a_2 x + \ldots + n a_n x^{n-1}) x + \frac{\Delta^2 A_0}{1.2} (1.2 a_2 + 2.3 a_3 x$$

$$+ \ldots + n(n-1) a_n x^{n-2}) x^2 + \ldots + \frac{\Delta^r A_0}{1.2\ldots r} (1\ldots r a_r + 2.3\ldots(r+1) a_{r+1} x + \ldots$$

$$+ n(n-1)\ldots(n-r+1) a_n x^{n-r}) x^r,$$

d. h.

$$A_0 a_0 + A_1 a_1 x + A_2 a_2 x^2 + \ldots + A_n a_n x^n = A_0 y + \frac{\Delta A_0}{1} \frac{\partial y}{\partial x} x + \frac{\Delta^2 A_0}{1.2} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} x^2 + \ldots$$
$$+ \frac{\Delta^r A_0}{1..r} \frac{\partial^r y}{\partial x^r} x^r.$$

II.

Angenommen, die Gleichung $f(x) = 0$ habe eine einzige reelle Wurzel zwischen $x = a$ und $x = b$, wo $b > a$ sey. Dies ist ganz gewiss der Fall, wenn $f'(x)$ von $x = a$ bis $x = b$ sein Zeichen nicht wechselt, was wir nun voraussetzen wollen.

Sey nun $a + \alpha$ der wahre Werth dieser Wurzel, wo also $\alpha > 0$, aber $< b - a$ seyn muss, so ist demnach

$$f(a+\alpha) = 0, \text{ d. h. } f(a) + \alpha f'(a + \Theta\alpha) = 0, \; \alpha = -\frac{f(a)}{f'(a+\Theta\alpha)} \text{ (§. 13, III).}$$

Ist nun A der grösste Werth, den $f'(x)$ erhält, wenn x von a bis b geht (ohne Rücksicht auf das Zeichen), so ist jedenfalls $\alpha \overline{\gtrless} -\frac{f(a)}{A}$, so dass $a - \frac{f(a)}{A}$ noch unter der Wurzel ist. Da übrigens $f'(a + \Theta\alpha)$ und $f(a)$ von verschiedenem Zeichen sind, so ist $-\frac{f(a)}{A}$ ganz gewiss positiv.

Sey weiter $b - \beta$ die wahre Wurzel, wo $\beta > 0$ und $< b - a$, so ist eben so

$$f(b) - \beta f'(b - \Theta\beta) = 0, \; \beta = \frac{f(b)}{f'(b - \Theta\beta)},$$

und also auch $\beta \overline{\gtrless} \frac{f(b)}{A}$, so dass $b - \frac{f(b)}{A}$ noch über der Wurzel ist. Demnach hat man als engere Gränzen der Wurzel:

$$a - \frac{f(a)}{A} \text{ und } b - \frac{f(b)}{A}.$$

Gesetzt nun, es sey auch $f''(x)$ immer von demselben Zeichen, von $x = a$ bis $x = b$, so wird also $f'(x)$ bloss wachsen oder bloss abnehmen von a bis b; dabei haben $f(a)$ und $f'(a)$ immer verschiedenes Zeichen. * Gesetzt nun

1) es seyen $f(a)$ und $f''(a)$ positiv. Alsdann ist $f'(a) < 0$ und da $f'(x)$ wächst, so ist $A = f(a)$;
2) es seyen $f(a)$ und $f''(a)$ negativ. Jetzt ist $f'(a) > 0$ und $f'(x)$ nimmt ab, also $A = f'(a)$;
3) $f(a) > 0$, $f''(a) < 0$; also $f(b) < 0$, $f''(b) < 0$; $f'(a)$ ist < 0, $f'(x)$ nimmt ab, also $f'(b) = A$;
4) $f(a) < 0$, $f''(a) > 0$; also $f(b) > 0$, $f''(b) > 0$; $f'(a) > 0$, $f'(x)$ wächst, also $A = f'(b)$.

Hieraus folgt nun, wenn man Alles zusammenfasst, der nachstehende Satz:

„Ist von $x = a$ bis $x = b$ $(b > a)$ $f'(x)$ von demselben Zeichen, während $f(x)$ sein Zeichen wechselt, indem es durch Null geht; ist A der (dem absoluten Werthe nach) grösste Werth von $f'(x)$ zwischen diesen Gränzen, so liegt eine Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$ zwischen $a - \frac{f(a)}{A}$ und $b - \frac{f(b)}{A}$, und zwar ist die erste Grösse unter, die andere über der Wurzel. Ist ausser den vorigen Voraussetzungen auch

* Denn, wenn $a + \alpha$ die wahre Wurzel ist, muss $\alpha > 0$, also $f'(a + \Theta\alpha)$ und $f(a)$ von verschiedenem Zeichen seyn; d. h. da $f'(x)$ von $x = a$ bis $x = b$ sein Zeichen nicht wechselt, es ist immer $f(a)$ und $f'(x)$ von verschiedenem, und mithin $f(b)$ und $f'(x)$ von gleichem Zeichen.

noch $f''(x)$ immer von demselben Zeichen zwischen a und b, so liegt die Wurzel zwischen $a-\frac{f(a)}{f'(a)}$ und $b-\frac{f(b)}{f'(a)}$, wenn $f(a)$ und $f''(a)$ dasselbe Zeichen haben, oder zwischen $a-\frac{f(a)}{f'(b)}$, $b-\frac{f(b)}{f'(b)}$, wenn dies nicht der Fall ist."

Dass man mit diesen neuen Gränzen in derselben Weise weiter rechnen kann, wie mit a und b, ist offenbar.

Immer unter der Voraussetzung, $f'(x)$ und $f''(x)$ behalten ihr Zeichen unverändert von a bis b, sey nun $b-a=d$ und wenn a', b' die neuen Gränzen der Wurzeln, so sey $b'-a'=d'$. Sey nun

1) $f(a)$ und $f''(a)$ von demselben Zeichen, also $a'=a-\frac{f(a)}{f'(a)}$, $b'=b-\frac{f(b)}{f'(a)}$, $d'=b-a-$

$$\frac{f(b)-f(a)}{f'(a)}=d-\frac{f(a+d)-f(a)}{f'(a)}=d-\frac{f(a)+df'(a)+\frac{d^2}{2}f''(a+\Theta d)-f(a)}{f'(a)}$$
$$=-\frac{d^2}{2}\,\frac{f''(a+\Theta d)}{f'(a)};$$

2) $f(a)$ und $f''(a)$ von verschiedenem Zeichen, also $a'=a-\frac{f(a)}{f'(b)}$, $b'=b-\frac{f(b)}{f'(b)}$, $d'=b-$

$$a-\frac{f(b)-f(a)}{f'(b)}=d-\frac{f(b)-f(b-d)}{f'(b)}=d-\frac{f(b)-f(b)+df'(b)-\frac{d^2}{2}f''(b-\Theta d)}{f'(b)}$$
$$=\frac{d^2}{2}\,\frac{f''(b-\Theta d)}{f'(b)}.$$

Ist somit K der grösste Werth, den $f''(x)$ von a bis b annimmt, so ist sicher

$$d' \overset{=}{<} -\frac{d^2}{2}\,\frac{K}{f'(a)} \text{ oder } \overset{=}{<} \frac{d^2}{2}\,\frac{K}{f'(b)}.$$

Ist letztere Grösse $<d$, so weiss man, dass die neuen Gränzen enger sind, als a und b, und kann auch sofort sagen, wie weit sie zusammenstimmen.

Als Beispiel wollen wir die Gleichung $x^x-100=0$, d. h. $x\,l(x)-l(100)=0$ auflösen. Für $x=3$ ist $3\,l(3)-l(100)<0$, für $x=4$ aber $4\,l(4)-l(100)>0$, so dass eine Wurzel zwischen 3 und 4 liegt. $f'(x)$ und $f''(x)$ sind innerhalb dieser Gränzen positiv, so dass $a=3$, $b=4$, $d=1$ ist. $f(a)$ und $f''(a)$ haben verschiedenes Zeichen, also $a'=a-\frac{f(a)}{f'(b)}$, $b'=b-\frac{f(b)}{f'(b)}$. Ferner $K=\frac{1}{3}$, $\frac{d^2}{2}\,\frac{K}{f'(b)}=\frac{1}{6[1+l(4)]}$, welche Grösse $<d$ ist. Aber $\frac{1}{6[1+l(4)]}<0{\cdot}1$ und $>0{\cdot}01$, so dass $d'<0{\cdot}1$ und also die neuen Gränzen nur bis zur ersten Dezimale zu entwickeln sind. Man hat $a'=3{\cdot}54$, $b'=3{\cdot}61$, so dass, da $f(3{\cdot}6)>0$, sicher die Wurzel zwischen 3·5 und 3·6 liegt. Setzt man jetzt wieder $a=3{\cdot}5$, $b=3{\cdot}6$, $d=0{\cdot}1$, so ist $K=\frac{1}{3{\cdot}5}$, $\frac{d^2}{2}\,\frac{K}{f'(b)}<0{\cdot}001$ aber $>0{\cdot}0001$, so dass die Rechnung auf 3 Dezimalen genügt. Man hat

$$a'=a-\frac{f(a)}{f'(b)}=3{\cdot}5966,\quad b'=b-\frac{f(b)}{f'(b)}=3{\cdot}5973,$$

so dass die Wurzel sicher zwischen 3·596 und 3·598 liegt. Da aber $f(3{\cdot}597)<0$, so liegt sie zwischen 3·597 und 3·598.

Jetzt ist $a=3{\cdot}597$ und $b=3{\cdot}598$, $d=0{\cdot}001$, ferner als grösster Werth von $\frac{d^2}{2}\,\frac{f''(b-\Theta d)}{f'(b)}$ ergibt sich ein Werth zwischen 0·0000001 und 0·00000001, so dass 7 Dezimalen genügen Man findet

$$a' = a - \frac{f(a)}{f'(b)} = 3{\cdot}5972850,\ b' = b - \frac{f(b)}{f'(b)} = 3{\cdot}5972851,$$

zwischen welchen zwei Werthen die Wurzel liegt. (Vergl. „Grundzüge" S. 207.)

III.

Wir haben mehrfach darauf aufmerksam gemacht, dass es sich ereignen kann, dass eine unendliche Reihe konvergent ist, während die Reihe, die man durch Differentiation der einzelnen Glieder erhält, es nicht ist. Ist aber die letzte konvergent, so ist nothwendig die Summe der ersten eine stetige Funktion.

Sey

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots \qquad (a)$$

eine unendliche Reihe, deren einzelne Glieder Funktionen von x sind, und es sey

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{dx} + \ldots + \frac{\partial u_n}{\partial x} + \ldots \qquad (a')$$

eine konvergente unendliche Reihe, deren Summe $= s$ ist, so ist — innerhalb der Gränzen der Konvergenz von (a′) — die Reihe (a) ebenfalls konvergent und ihre Summe $S = \int s\,\partial x$ ist eine stetige Funktion von x.

Denn sey

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial x} + \ldots + \frac{\partial u_n}{\partial x} = s_n,$$

so ist $s = s_n + r_n$, wo r_n mit unendlich wachsendem n unendlich abnimmt, da Gr. $s_n = s$ ist. Demnach, wenn a innerhalb der Gränzen der Konvergenz von (a′) liegt:

$$\int_a^x s\,\partial x = \int_a^x s_n\,\partial x + \int_a^x r_n\,\partial x = \int_a^x s_n\,\partial x + R_n(x-a),$$

wo R_n ein Mittelwerth zwischen den Werthen von r_n ist, so dass jedenfalls Gr. $R_n = 0$, mithin Gr. $\int_a^x r_n\,\partial x = 0$, also Gr. $\int_a^x s_n\,\partial x = \int_a^x s\,\partial x$. Aber

$$\int_a^x s_n\,\partial x = \int_a^x \left[\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial x} + \ldots + \frac{\partial u_n}{\partial x}\right]\partial x = u_1 + u_2 + \ldots + u_n - [u_1 + u_2 + \ldots + u_n]_a,$$

wo der letzte Theil eine Konstante ist. Mithin

$$\int_a^x s_n\,\partial x = u_1 + u_2 + \ldots + u_n - C,\ \text{Gr.}\int_a^x s_n\,\partial x = u_1 + u_2 + \ldots - C,$$

d. h. $$\int_a^x s\,\partial x = u_1 + u_2 + \ldots + \ldots - C,\ u_1 + u_2 + \ldots = \int_a^x s\,\partial x + C = \int s\,\partial x,$$

wie behauptet. Da $S = \int s\,\partial x$, $\frac{\partial S}{\partial x} = s$, und s endlich, so ist S eine stetige Funktion.

Denken wir uns nun überhaupt, y sey eine stetige Funktion von x, so ist dieselbe innerhalb der Gränzen der Stetigkeit auch immer die **nämliche** Funktion von x.

Denn sey für $x = x_1 : y (= y_1) = f(x_1)$ und nicht auch $= F(x_1)$, so kann nicht für $x = x_2 : y (= y_2) = F(x_2)$, wenn f und F verschiedene Funktionen bezeichnen und x_1, x_2 innerhalb der Gränzen der Stetigkeit liegen. Denn zunächst ist $f(x_1)$ —

$F(x_1)$ nicht Null, da sonst ja auch $y_1 = F(x_1)$ seyn könnte; da wir ferner $f(x_1)$ und $F(x_1)$ als endliche Grössen voraussetzen, so ist $f(x_1) - F(x_1) = a$ eine endliche, von Null verschiedene Grösse. Sey nun $x_2 - x_1 = \varepsilon$, ferner

$$y_2 - y_1 = \varepsilon_1,\; f(x_2) - f(x_1) = \varepsilon_3,\; F(x_2) - F(x_1) = \varepsilon_2,$$

so müssen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ mit ε verschwindend klein werden. Könnte nun $y_2 = F(x_2)$ seyn, während $y_1 = f(x_1)$ ist, so wäre also $F(x_2) - f(x_1) = \varepsilon_1$ und demnach

$$F(x_2) - F(x_1) - [F(x_2) - f(x_1)] \text{ d. h. } f(x_1) - F(x_1) = \varepsilon_2 - \varepsilon_1;$$

also eine Grösse, die mit ε verschwindet, was gegen das oben Gefundene streitet, wornach $f(x_1) - F(x_1)$ von Null verschieden ist. Demnach kann nicht $y_2 = F(x_2)$ seyn und unsere allgemeine Behauptung ist gerechtfertigt. *

Da nun, so lange (a') konvergirt, die Summe von (a) eine stetige Funktion von x ist, so ist diese Summe, innerhalb der Gränzen der Konvergenz, auch immer dieselbe Funktion von x. Wir haben von diesem Satze in §§. 16 und 27 Gebrauch gemacht. Ist aber (a') nicht konvergent, so ist auch die Summe von (a) nicht nothwendig stetig, und es kann sich dann ganz wohl ereignen, dass dieselbe nicht immer dieselbe Funktion ist. Beispiele dazu liefert §. 97. Man ersieht auch daraus, dass es unendliche Reihen geben muss, für die die (a') nicht konvergirt.

IV.

Gemäss §. 106 ist

$$\Gamma(a) = \text{Gr.} \frac{1.2.3\ldots(n-1)n^a}{a(a+1)(a+2)\ldots(a+n-1)},$$

so dass also nach einander:

$$\Gamma(a) = \text{Gr.} \frac{1.2\ldots(n-1)n^a}{a(a+1)\ldots(a+n-1)} = \text{Gr.} \frac{1.2\ldots(n-1)n^a m^n}{ma(ma+m)\ldots(ma+\overline{n-1}m)},$$

$$\Gamma\left(a+\frac{1}{m}\right) = \text{Gr.} \frac{1.2\ldots(n-1)n^{a+\frac{1}{m}}}{\left(a+\frac{1}{m}\right)\left(a+1+\frac{1}{m}\right)\ldots\left(a+\frac{1}{m}+n-1\right)}$$

$$= \text{Gr.} \frac{1.2\ldots(n-1)n^{a+\frac{1}{m}} m^n}{(ma+1)(ma+1+m)\ldots(ma+1+\overline{n-1}m)},$$

$$\Gamma\left(a+\frac{2}{m}\right) = \text{Gr.} \frac{1.2\ldots(n-1)n^{a+\frac{2}{m}}}{\left(a+\frac{2}{m}\right)\left(a+1+\frac{2}{m}\right)\ldots\left(a=\frac{2}{m}+n-1\right)}$$

$$= \text{Gr.} \frac{1.2\ldots(n-1)n^{a+\frac{2}{m}} m^n}{(ma+2)(ma+2+m)\ldots(ma+2+\overline{n-1}m)},$$

$$\vdots$$

$$\Gamma\left(a+\frac{m-1}{m}\right) = \text{Gr.} \frac{1.2\ldots(n-1)n^{a+\frac{m-1}{m}}}{\left(a+\frac{m-1}{m}\right)\left(a+1+\frac{m-1}{m}\right)\ldots\left(a+\frac{m-1}{m}+n-1\right)}$$

* Man wird übrigens bemerken, dass wir F(x) und f(x) ebenfalls als stetige Funktionen vorausgesetzt haben innerhalb der Gränzen der Stetigkeit von y, wie natürlich, da wir y einer oder der andern dieser Funktionen gleichsetzen wollen.

$$= \text{Gr.} \frac{1.2\ldots(n-1)n^{a+\frac{m-1}{m}} m^n}{(ma+m-1)(ma+m-1+m)\ldots(ma+m-1+\overline{n-1}m)}.$$

Hieraus folgt unmittelbar:

$$\Gamma(a)\,\Gamma\left(a+\frac{1}{m}\right)\Gamma\left(a+\frac{2}{m}\right)\ldots\Gamma\left(a+\frac{m-1}{m}\right)$$

$$= \text{Gr.} \frac{[1.2\ldots(n-1)]^m m^{ma} n^{ma+\frac{m-1}{2}}}{ma(ma+1)(ma+2)\ldots(ma+mn-1)}$$

$$= \text{Gr.} \frac{1.2\ldots(mn-1)(mn)^{ma}}{ma(ma+1)\ldots(ma+mn-1)} \cdot \text{Gr.} \frac{[1.2\ldots(n-1)]^m m^{mn} n^{\frac{m-1}{2}}}{1.2\ldots(mn-1)]\, m^{am}}.$$

Nun ist aber, wenn m positiv und ganz:

$$\text{Gr.} \frac{1.2\ldots(mn-1)(mn)^{am}}{ma(ma+1)\ldots(ma+mn-1)} = \text{Gr.} \frac{1.2\ldots(n-1)n^{am}}{ma(ma+1)\ldots(ma+n-1)} = \Gamma(ma),$$

wie natürlich, da mit unendlichem n auch mn unendlich wird, so dass also

$$\Gamma(a)\,\Gamma\left(a+\frac{1}{m}\right)\ldots\Gamma\left(a+\frac{m-1}{m}\right) = \frac{\Gamma(ma)}{m^{am}}\,\text{Gr.} \frac{[1.2\ldots(n-1)]^m m^{nm} n^{\frac{m-1}{2}}}{1.2\ldots(mn-1)}.$$

Aber nach §. 115 ist

$$\text{Gr.} \frac{1.2\ldots n e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}} = \sqrt{2\pi} \text{ d. h. Gr.} \frac{1.2\ldots mne^{mn}}{(mn)^{mn+\frac{1}{2}}} = \sqrt{2\pi},$$

$$\text{Gr.} \frac{(mn)^{mn+\frac{1}{2}}}{1.2\ldots mne^{mn}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

Ferner

$$\text{Gr.} \frac{[1.2\ldots(n-1)]^m m^{mn} n^{\frac{m-1}{2}}}{1.2\ldots(mn-1)} = \text{Gr.} \frac{(1.2\ldots n)^m m^{nm} n^{\frac{m-1}{2}} mn}{1.2\ldots mn.n^m} =$$

$$\text{Gr.}\left(\frac{1.2\ldots n.e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}\right)^m \text{Gr.} \frac{m^{nm+1} n^{\frac{m+1}{2}} n^{nm+\frac{1}{2}m}}{1.2\ldots mn.n^m e^{mn}} = (\sqrt{2\pi})^m\, \text{Gr.} \frac{m^{nm+1} n^{nm+\frac{1}{2}}}{1.2\ldots mne^{mn}}$$

$$= m^{\frac{1}{2}}(\sqrt{2\pi})^m\, \text{Gr.} \frac{(nm)^{nm+\frac{1}{2}}}{1.2\ldots mne^{mn}} = \sqrt{m(2\pi)^m} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = \sqrt{m(2\pi)^{m-1}},$$

so dass endlich

$$\Gamma(a)\,\Gamma\left(a+\frac{1}{m}\right)\Gamma\left(a+\frac{2}{m}\right)\ldots\Gamma\left(a+\frac{m-1}{m}\right) = \frac{\Gamma(ma)}{m^{am}}\sqrt{m(2\pi)^{m-1}}.$$

V.

Man soll die Differentialgleichung

$$(A+A'x+A''y)\left(x\frac{\partial y}{\partial x}-y\right)+(B+B'x+B''y)\frac{\partial y}{\partial x}+C+C'x+C''y=0 \qquad \text{(a)}$$

integriren.

Man setze

$$p=\frac{a'+b'x+c'y}{a+bx+cy}, \quad q=\frac{a''+b''x+c''y}{a+bx+cy}, \qquad \text{(b)}$$

so erhält man, wenn zur Abkürzung $a+bx+cy=z$ gesetzt wird:

$$\left.\begin{aligned} z^2\frac{\partial p}{\partial x} &= \alpha''\left(x\frac{\partial y}{\partial x}-y\right)+\beta''\frac{\partial y}{\partial x}+\gamma'',\\ z^2\frac{\partial q}{\partial x} &= \alpha'\left(x\frac{\partial y}{\partial x}-y\right)+\beta'\frac{\partial y}{\partial x}+\gamma',\end{aligned}\right\}\quad (c)$$

wo

$$\left.\begin{aligned} &\alpha''=bc'-b'c,\ \beta''=ac'-a'c,\ \gamma''=ab'-a'b,\\ &\alpha'=bc''-b''c,\ \beta'=ac''-a''c,\ \gamma'=ab''-a''b.\end{aligned}\right\}\quad (d)$$

Setzt man weiter noch

$$\left.\begin{aligned} &\alpha=b'c''-b''c'.\ \beta=a''c'-a'c'',\ \gamma=a'b''-a''b',\\ &\delta=a(b'c''-b''c')+b(a''c'-a'c'')+c(a'b''-a''b')=a\alpha+b\beta+c\gamma,\end{aligned}\right\}\quad (d')$$

so findet man leicht, dass

$$\left.\begin{aligned} &a\alpha'-b\beta'+c\gamma'=0,\ a\alpha''-b\beta''+c\gamma''=0,\ a'\alpha'-b'\beta'+c'\gamma'=-\delta,\\ &a'\alpha''-b'\beta'+c'\gamma''=0,\ a''\alpha''-b''\beta''+c''\gamma''=\delta,\ a''\alpha'-b''\beta'+c''\gamma'=0.\end{aligned}\right\}\quad (d'')$$

Gesetzt nun, man habe die Gleichung

$$M\frac{\partial p}{\partial x}+N\frac{\partial q}{\partial x}=0, \qquad (e)$$

so ergibt dieselbe, mittelst (c):

$$(M\alpha''+N\alpha')\left(x\frac{\partial y}{\partial x}-y\right)+(M\beta''+N\beta')\frac{\partial y}{\partial x}+M\gamma''+N\gamma'=0. \qquad (e')$$

Multipliziren wir diese Gleichung noch mit z, so wird sie mit (a) zusammenstimmen, wenn identisch:

$$\left.\begin{aligned} z(M\alpha''+N\alpha')+\lambda &= A+A'x+A''y,\\ z(M\beta''+N\beta')-\lambda x &= B+B'x+B''y,\\ z(M\gamma''+N\gamma')+\lambda y &= C+C'x+C''y\end{aligned}\right\}\quad (f)$$

seyn kann. Berücksichtigt man (d''), so folgt aus (f):

$$\left.\begin{aligned} &\lambda(a+bx+cy)=Aa-Bb+Cc+(A'a-B'b+C'c)x+(A''a-B''b+C''c)y,\\ &\lambda(a'+b'x+c'y)-\delta Nz=Aa'-Bb'+Cc'+(A'a'-B'b'+C'c')x+(A''a'-B''b'\\ &\qquad\qquad+C''c')y,\\ &\lambda(a''+b''x+c''y)+\delta Mz=Aa''-Bb''+Cc''+(A'a''-B'b''+C''c')x+(A''a''\\ &\qquad\qquad-B''b''+C''c'')y,\end{aligned}\right\}\quad (f')$$

welche drei Gleichungen natürlich die (f) ersetzen.

Man setze nun $N\delta=-(\lambda'-\lambda)p$, $M\delta=(\lambda''-\lambda)q$, so werden die ersten Seiten der Gleichungen (f') zu $\lambda(a+bx+cy)$, $\lambda'(a'+b'x+c'y)$, $\lambda''(a''+b''x+c''y)$, während für M und N zwei andere Grössen: λ', λ'' eingeführt sind. Die (f') sind nun identisch, wenn:

$$\left.\begin{aligned} &Aa-Bb+Cc=\lambda a,\ A'a-B'b+C'c=\lambda b,\ A''a-B''b+C''c=\lambda c,\\ &Aa'-Bb'+Cc'=\lambda'a',\ A'a'-B'b'+C'c'=\lambda'b',\ A''a'-B''b'+C''c'=\lambda'c',\\ &Aa''-Bb''+Cc''=\lambda''a'',A'a''-B'b''+C'c''=\lambda''b'',A''a''-B''b''+C''c''=\lambda''c''\end{aligned}\right\}\quad (g)$$

ist, und alsdann ist die Gleichung

$$\frac{\lambda''-\lambda'}{\delta}q\frac{\partial p}{\partial x}-\frac{\lambda'-\lambda}{\delta}p\frac{\partial q}{\partial x}=0 \qquad (a')$$

identisch mit (a). Eliminirt man aus den drei ersten Gleichungen (g) die Grössen a, b, c, so erhält man:

$$(A-\lambda)(B'+\lambda)(C''-\lambda)-B''C'(A-\lambda)-A''C(B'+\lambda)-A'B(C''-\lambda)+A''BC'$$
$$+B''A'C=0. \qquad (h)$$

Ganz dieselbe Gleichung erhält man für λ', λ'' aus den übrigen Gleichungen (g). Bestimmt man also aus (h) die drei Wurzeln dieser kubischen Gleichung, und sind λ, λ', λ'' dieselben, so wird (a) zu (a'), wenn man a, b, ... c'' aus (g) be-

stimmt. Da diese Gleichungen nur die Quotienten $\frac{a}{c}$, $\frac{b}{c}$, bestimmen, so bleiben drei dieser Grössen ganz willkürlich.

Die Gleichung (a') gibt nun

$$(\lambda''-\lambda')\frac{1}{p}\frac{\partial p}{\partial x}-(\lambda'-\lambda)\frac{1}{q}\frac{\partial q}{\partial x}=0,\ (\lambda''-\lambda')\,l(p)-(\lambda'-\lambda)\,l(q)=C,$$
$$p^{\lambda''-\lambda'}=Cq^{\lambda'-\lambda},$$

so dass man folgenden Satz erhält:

„Bestimmt man aus (h) die drei Werthe von λ, und sind dieselben $\lambda, \lambda', \lambda''$: ermittelt dann aus (g) sechs der Grössen $a, b, c, a', b', c', a'', b'', c''$, nachdem man drei davon willkürlich angenommen, so ist das Integral der Gleichung (a):

$$(a'+b'x+c'y)^{\lambda''-\lambda}(a''+b''x+c''y)^{\lambda-\lambda'}(a+bx+cy)^{\lambda'-\lambda''}=C."$$

Für den Fall, dass nicht alle Wurzeln der Gleichung (h) von einander verschieden sind, lässt sich obige Auflösung nicht anwenden. Man kann jedoch im Allgemeinen eine andere Auflösung geben, die von diesen Mängeln frei ist.

Man setze nämlich

$$A+A'x+A''y=u,\ y=\frac{u-A'x-A}{A''}\ (A''\text{ nicht Null})$$

so ist, wenn man in (a) einsetzt:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{A''u^2+\beta x+\gamma u+\delta}{A''ux+\beta'x+\gamma'u+\delta'},\quad \frac{\partial x}{\partial u}=\frac{A''ux+\beta'x+\gamma'u+\delta'}{A''u^2+\beta x+\gamma u+\delta},$$

wo $\beta=A'(B''A'-B'A'')+A''(A'C''-A''C')$, $\gamma=A'B''-A''(A+C'')$,

$$\delta=(BA''-B''A)A'+(CA''-C''A)A''$$
$$\beta'=A''B'-A'B'',\ \gamma'=B'',\ \delta'=BA''-B''A.$$

Man setze nun

$$\frac{A''ux+\beta'x+\gamma'u+\delta'}{A''u^2+\beta x+\gamma u+\delta}=z,\quad x=\frac{A''u^2z+\gamma uz+\delta z-\gamma'u-\delta'}{A''u+\beta'-\beta z},$$

$$\frac{\partial x}{\partial u}=z=\frac{\partial}{\partial u}\left[\frac{A''u^2z+\gamma uz+\delta z-\gamma'u-\delta'}{A''u+\beta'-\beta z}\right],$$

$$(A''u+\beta'-\beta z)^2\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{A''u^2z+\gamma uz+\delta z-\gamma'u-\delta'}{A''u+\beta'-\beta z}\right)-z(A''u+\beta'-\beta z)^2=0,\ \text{d. h.}$$

$$\frac{\partial z}{\partial u}[A''^2u^3+A''(\gamma+\beta')u^2+(A''\delta+\beta'\gamma-\beta\gamma')u+\beta'\delta-\beta\delta']$$
$$-\beta^2z^3+(2\beta\beta'-\beta\gamma)z^2+(\beta\gamma'+\beta'\gamma-A''\delta-\beta'^2)z-\beta'\gamma'+A''\delta'=0,$$

woraus nun

$$\frac{1}{\beta^2z^3+(\gamma-2\beta')\beta z^2+(A''\delta+\beta'^2-\beta\gamma'-\beta'\gamma)z+\beta'\gamma'-A''\delta'}\frac{\partial z}{\partial u}$$
$$=\frac{1}{A''^2u^3+A''(\gamma+\beta')u^2+(A''\delta+\beta'\gamma-\beta\gamma')u+\beta'\delta-\beta\delta'}.$$

in welcher Gleichung die Veränderlichen getrennt sind. Ist weder A'' noch β Null, so kann man etwa setzen:

$$A''u+\beta'=\beta v,\ \frac{\partial z}{\partial u}=\frac{A''}{\beta}\frac{\partial z}{\partial v}$$

und erhält:

$$\frac{1}{\varphi(z)}\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{1}{\varphi(v)},\ \varphi(z)=\beta^2z^3+(\gamma-2\beta')\beta z^2+(A''\delta+\beta'^2-\beta\gamma'-\beta'\gamma)z+\beta'\gamma'-A''\delta'.$$

Integrirt man die Gleichung zwischen z und v, oder z und u, setzt dann $z=\frac{A''ux+\beta'x+\gamma'u+\delta}{A''u^2+\beta x+\gamma u+\delta}$, $u=A+A'x+A''y$, so erhält man die Gleichung zwischen x und y.

Ist $A''=0$, so lässt sich die obige Rechnung nicht durchführen. Wäre in diesem Falle

auch noch $B''=0$, so käme die vorgelegte Gleichung auf §. 66 zurück. Ist Letzteres nicht der Fall, so kommt die Gleichung auf

$$y\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial x}(a+bx+cx^2)-y(a'+cx)+a''+b''x=0,\ (c=A')$$

zurück. Hieraus folgt nun

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{y(a'+cx)-a''-b''x}{y+a+bx+cx^2},$$

und wenn man $\frac{\partial y}{\partial x}=u$ setzt, so ist

$$y=\frac{(a+bx+cx^2)u+a''+b''x}{a'+cx-u}.$$

Demnach

$$u=\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{(a+bx+cx^2)u+a''+b''x}{a'+cx-u}\right],$$

welche Gleichung unmittelbar auf die Form

$$\frac{\partial u}{\partial x}[cx^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma]+(-u^3+\alpha' u^2+\beta' u+\gamma')=0$$

führt, in der die Veränderlichen getrennt sind.

VI.

Legt man die Differentialgleichung

$$x^{n-1}(a_n+b_n x)\frac{\partial^n y}{\partial x^n}+x^{n-2}(a_{n-1}+b_{n-1}x)\frac{\partial^{n-1} y}{\partial x^{n-1}}+\ldots+(a_1+b_1 x)\frac{\partial y}{\partial x}+b_0 y=0 \qquad \text{(a}$$

vor, und es hat die Gleichung

$$m(m-1)\ldots(m-n+1)b_n+m(n-1)\ldots(m-n+2)b_{n-1}+\ldots+mb_1+b_0=0 \qquad \text{(b)}$$

eine positive ganze Zahl zur Wurzel, so lässt sich die Gleichung (a) auf eine andere niederern Grades reduziren.

Sey nämlich m eine solche Wurzel der Gleichung (b), so differenziren wir (nach §. 10) die Gleichung (a) mmal nach x und erhalten

$$x^{n-1}(a_n+b_n x)\frac{\partial^{m+n} y}{\partial x^{m+n}}+x^{n-2}(A_{n-1}+B_{n-1}x)\frac{\partial^{m+n-1} y}{\partial x^{m+n-1}}+\ldots$$
$$+x(A_2+B_2 x)\frac{\partial^{m+2} y}{\partial x^{m+2}}+(A_1+B_1 x)\frac{\partial^{m+1} y}{\partial x^{m+1}}=0, \qquad \text{(a')}$$

Setzt man nun hier $\frac{\partial^{m+1} y}{\partial x^{m+1}}=x^\alpha z$, und bestimmt α so, dass

$$\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+2)a_n+\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+3)A_{n-1}+\ldots+\alpha A_2+A_1=0, \qquad \text{(c)}$$

so erhält man, nachdem man durch x dividirt hat:

$$x^{n-2}(a_n+b_n x)\frac{\partial^{n-1} z}{\partial x^{n-1}}+x^{n-3}(C_{n-1}+D_{n-1}x)\frac{\partial^{n-2} z}{\partial x^{n-2}}+\ldots+(C_2+D_2 x)\frac{\partial z}{\partial x}$$
$$+D_1 z=0, \qquad \text{(a'')}$$

welche Gleichung dieselbe Form hat, wie (a), aber um einen Grad niederer ist.

Da, wenn man $\frac{\partial^{-n} y}{\partial x^{-n}}=\int^n y\,\partial x^n$ setzt, nach der Anmerkung in §. 47 die Formel (16) des §. 10 noch gilt, wenn dort n eine negative ganze Zahl ist, so wird man eben so wie oben verfahren, wenn die Gleichung (b) eine negative ganze Zahl zur

Wurzel hat. Man wird in diesem Falle also die (a) dann m mal nach §. 47 integriren, und ganz dieselben Formeln erhalten.

Hat man z. B.

$$x^3\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}+x(7x+1)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+(10x+1)\frac{\partial y}{\partial x}+2y=0,$$

so ist $n=3$, $a_3=0$, $b_3=1$, $a_2=1$, $b_2=7$, $a_1=1$, $b_1=10$, $b_0=2$; mithin die (b):

$$m(m-1)(m-2)+7m(m-1)+10m+2=0, \text{ d. h. } (m+2)(m+1)^2=0.$$

Dieser Gleichung genügt $m=-1$, so dass man nach der Formel:

$$\int yz\,\partial x=y\int z\,\partial x-\frac{\partial y}{\partial x}\int^2 z\,\partial x^2+\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\int^3 z\,\partial x^3-\ldots$$

die vorgelegte Gleichung integrirt. So ist

$$\int x^3\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}\partial x=x^3\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}-3x^2\frac{\partial y}{\partial x}+6xy-6\int y\,\partial x,$$

$$\int x(7x+1)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\partial x=x(7x+1)\frac{\partial y}{\partial x}-(14x+1)y+14\int y\,\partial x,$$

$$\int(10x+1)\frac{\partial y}{\partial x}\partial x=\qquad(10x+1)y-10\int y\,\partial x,$$

$$\int 2y\,\partial x=\qquad 2\int y\,\partial x,$$

so dass also

$$x^3\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+x(4x+1)\frac{\partial y}{\partial x}+2xy=0,\quad x^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+(4x+1)\frac{\partial y}{\partial x}+2y=0,$$

welche Gleichung nun nach frühern Methoden integrirt werden kann. Die zwei Werthe von y, welche ihr genügen, genügen auch der vorgelegten Gleichung. Der eben gefundenen Gleichung genügt $y=\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$.

VII.

Sey die Gleichung

$$(1-x^2)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}-2x\frac{\partial y}{\partial x}+m(m+1)y=0 \qquad \text{(a)}$$

zur Integration vorgelegt.

In §. 79 (f) ist $a_2=1$, $b_2=0$, $c_2=-1$, $a_1=0$, $b_1=-2$, $a_0=m(m+1)$, also hat man dort

$$-n(n-1)-2n+m(m+1)=0,\ n=m \text{ oder } =-(m+1).$$

Wählt man den ersten Werth, so ist

$$l(R)=\frac{1}{m}\int\frac{2m^2u\,\partial u}{-u^2+1}=-m\,l(1-u^2),\ R=(1-u^2)^{-m};$$

$$[(1-u^2)^{-m}(u+x)^{m-1}]_\alpha=[(1-u^2)^{-m}(u+x)^{m-1}]_\beta.$$

Ist $m<0$, so wird für $\alpha=-1$ und $\beta=+1$ diese Gleichung erfüllt seyn; ist aber $m>0$, so genügen ihr $\alpha=-\infty$, $\beta=+\infty$. Man hat also im ersten Falle:

$$y=\int_{-1}^{+1}\frac{(1-u^2)^{-m}(u+x)^m\partial u}{-u^2+1}=\int_{-1}^{+1}\frac{(u+x)^m\partial u}{(1-u^2)^{m+1}}=\int_0^\pi\frac{(x+\cos\varphi)^m\partial\varphi}{\sin^{2m+1}\varphi};$$

dagegen im zweiten:

$$y=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(a+x)^m\partial u}{(1-u^2)^{m+1}}=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(x+\operatorname{tg}\varphi)^m\partial\varphi}{\cos^2\varphi(1-\operatorname{tg}^2\varphi)^{m+1}}=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(\sin\varphi+x\cos\varphi)^m\cos^m\varphi\,\partial\varphi}{\cos^{m+1}2\varphi}.$$

Wählen wir den zweiten Werth von n, so ist

$$l(R)=-\frac{1}{m+1}\int\frac{2(m+1)^2 u\,\partial u}{1-u^2}=(m+1)\,l(1-u^2),\ R=(1-u^2)^{m+1};$$

$$[(1-u^2)^{m+1}(u+x)^{-(m+2)}]_\alpha=[(1-u^2)^{m+1}(u+x)^{-(m+2)}]_\beta.$$

Dieser Gleichung genügen ± 1 für $m+1>0$, wenn nicht $x=\pm 1$; für $m+1<0$ genügen $\pm\infty$. Demnach

$$y=\int_{-1}^{+1}\frac{(1-u^2)^{m+1}(u+x)^{-(m+1)}\partial u}{-u^2+1}=\int_{-1}^{+1}\frac{(1-u^2)^m}{(u+x)^{m+1}}\partial u=\int_0^\pi\frac{\sin^{2m+1}\partial\varphi}{(x+\cos\varphi)^{m+1}},\ m+1>0;$$

$$y=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(1-u^2)^m\partial u}{(u+x)^{m+1}}=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^m 2\varphi\,\partial\varphi}{\cos^{m+1}\varphi(\sin\varphi+x\cos\varphi)^{m+1}},\ m+1<0.$$

Daraus also folgt nun, dass der Gleichung (a) genügt wird durch:

$$1)\ \text{wenn } m>0:\quad \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\frac{(\sin\varphi+x\cos\varphi)^m\cos^m\varphi\,\partial\varphi}{\cos^{m+1}2\varphi}\ \text{und}\ \int_0^\pi\frac{\sin^{2m+1}\varphi\,\partial\varphi}{(x+\cos\varphi)^{m+1}}, \qquad (b)$$

$$2)\ m<0, m+1>0:\int_0^\pi\frac{(x+\cos\varphi)^m}{\sin^{2m+1}\varphi}\partial\varphi\ \text{und}\int_0^\pi\frac{\sin^{2m+1}\varphi\,\partial\varphi}{(x+\cos\varphi)^{m+1}}, \qquad (b')$$

$$3)\ m<0, m+1<0:\int_0^\pi\frac{(x+\cos\varphi)^m}{\sin^{2m+1}\varphi}\partial\varphi\ \text{und}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^m 2\varphi\,\partial\varphi}{\cos^{m+1}\varphi(\sin\varphi+x\cos\varphi)^{m+1}}. \qquad (b'')$$

Was nun aber diese Integrale anbelangt, so ist in (b) das erste nicht zulässig, da für $\varphi=\frac{\pi}{4}$, also innerhalb der Integrationsgränzen, die Grösse unter dem Integralzeichen unendlich wird; für das zweite in (b) darf nicht $x=-\cos\varphi$ seyn, d. h. es muss $x^2>1$ seyn. In (b′) muss eben so in beiden Integralen $x^2>1$ seyn; in (b″) ist das zweite unzulässig, und das erste verlangt, dass $x^2>1$ sey.

Wir haben also immerhin die allgemeine Auflösung der Gleichung (a) noch nicht gefunden. Allein setzt man in (a): $x=zi$, also $\frac{\partial y}{\partial x}=-i\frac{\partial y}{\partial z}, \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=-\frac{\partial^2 y}{\partial z^2}$, so erhält man:

$$(1+z^2)\frac{\partial^2 y}{\partial z^2}+2z\frac{\partial y}{\partial z}-m(m+1)y=0, \qquad (a')$$

welche Gleichung nun wieder mit §. 79 (f) verglichen werde. $a_2=1,\ b_2=0,\ c_2=1,\ a_1=0,\ b_1=2,\ a_0=-m(m+1);\ n(n-1)+2n-m(m+1)=0;\ n=m$ oder $-(m+1)$,

$$l(R)=\frac{1}{m}\int\frac{-2m^2u\,\partial u}{1+u^2}=-m\,l(1+u^2),\ R=(1+u^2)^{-m};$$

$$[(1+u^2)^{-m}(u+z)^{m-1}]_\alpha=[(1+u^2)^{-m}(u+z)^{m-1}]_\beta.$$

Für $m>0$ genügen $u=\pm\infty$, so dass

$$y=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(u^2+1)^{-m}(u+z)^m}{u^2+1}\partial u=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(u+z)^m}{(u^2+1)^{m+1}}\partial u.$$

Da $z=\frac{x}{i}=-ix$, so genügt also der (a) für $m>0$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(u-ix)^m\partial u}{(u^2+1)^{m+1}}=\int_0^{\infty}\frac{(u-ix)^m\partial u}{(u^2+1)^{m+1}}+\int_{-\infty}^{0}\frac{(u-ix)^m\partial u}{(u^2+1)^{m+1}}=$$

$$\int_0^{\infty}\frac{(u-ix)^m\partial u}{(u^2+1)^{m+1}}+\int_0^{\infty}\frac{(-u-ix)^m\partial u}{(u^2+1)^{m+1}}=(-1)^m\int_0^{\infty}\frac{(xi+u)^m+(xi-u)^m}{(u^2+1)^{m+1}}\partial u.$$

$$=(-1)^m i^m\int_0^{\infty}\frac{(x-ui)^m+(x+ui)^m}{(u^2+1)^{m+1}}\partial u,$$

wo man den konstanten Faktor füglich weglassen kann. Setzt man $u=x\operatorname{tg}\varphi$, so ist für $x>0$:

$$y=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(x-ix\operatorname{tg}\varphi)^m+(x+xi\operatorname{tg}\varphi)^m}{(1+x^2\operatorname{tg}^2\varphi)^{m+1}\cos^2\varphi}x\,\partial\varphi$$

$$=x^{m+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(\cos\varphi+i\sin\varphi)^m+(\cos\varphi-i\sin\varphi)^m}{(\cos^2\varphi+x^2\sin^2\varphi)^{m+1}}\cos^m\varphi\,\partial\varphi=2x^{m+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos m\varphi\cos^m\varphi\,\partial\varphi}{(\cos^2\varphi+x^2\sin^2\varphi)^{m+1}}.$$

Ist $x<0$, so ist

$$y=\int_0^{-\frac{\pi}{2}}\frac{(x-ix\operatorname{tg}\varphi)^m+(x+xi\operatorname{tg}\varphi)^m}{(1+x^2\operatorname{tg}^2\varphi)^{m+1}\cos^2\varphi}x\,\partial\varphi=2x^{m+1}\int_0^{-\frac{\pi}{2}}\frac{\cos m\varphi\cos^m\varphi\,\partial\varphi}{(\cos^2\varphi+x^2\sin^2\varphi)^{m+1}}$$

$$=-2x^{m+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^m\varphi\cos m\varphi\,\partial\varphi}{(\cos^2\varphi+x^2\sin^2\varphi)^{m+1}}.$$

Da aber auch $n=-(m+1)$, so ist auch

$$l(R)=-\frac{1}{m+1}\int\frac{-2(m+1)^2u\,\partial u}{u^2+1}=(m+1)l(1+u^2),\ R=(1+u^2)^{m+1};$$

$$[(1+u^2)^{m+1}(u+z)^{-(m+2)}]_\alpha=[(1+u^2)^{m+1}(u+z)^{-(m+2)}]_\beta.$$

Für $m+1<0$, genügen $\pm\infty$, so dass dann

$$y=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(1+u^2)^{m+1}(u+z)^{-(m+1)}}{1+u^2}\partial u=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(u+1)^m}{(u+z)^{m+1}}\partial u.$$

Demnach genügt der (a):

$$y=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(1+u^2)^m\partial u}{(u-ix)^{m+1}}=\int_0^{\infty}(u^2+1)^m\left[\frac{1}{(u-ix)^{m+1}}+\frac{1}{(-u-ix)^{m+1}}\right]\partial u$$

$$=\frac{1}{(-1)^m i^m}\int_0^{\infty}(1+u^2)^m\left[\frac{1}{(x+ui)^{m+1}}+\frac{1}{(x-ui)^{m+1}}\right]\partial u$$

$$=\frac{1}{(-1)^m i^m}\int_0^{\infty}\frac{(1+u^2)^m[(x-ui)^{m+1}+(x+ui)^{m+1}]\partial u}{(x^2+u^2)^{m+1}},$$

d. h.

$$y=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1+x^2tg^2\varphi)^m[(x-xi\,tg\,\varphi)^{m+1}+(x+xi\,tg\,\varphi)^{m+1}]\,x\,\partial\varphi}{\cos^2\varphi\,(x^2+x^2tg^2\varphi)^{m+1}}$$

$$=\frac{2}{x^m}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(\cos^2\varphi+x^2\sin^2\varphi)^m\cos(m+1)\varphi}{\cos^{m+1}\varphi}\partial\varphi.$$

Fasst man Alles zusammen, so ergibt sich hiernach, dass der (a) genügt wird durch:

1) wenn $m>0$: $x^{m+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^m\varphi\cos m\varphi}{(\cos^2\varphi+x^2\sin^2\varphi)^{m+1}}\partial\varphi$ und $\int_0^{\pi}\frac{\sin^{2m+1}\varphi\,\partial\varphi}{(x+\cos\varphi)^{m+1}}\,(x^2>1)$;

2) $m<0,\ m+1>0$: $\int_0^{\pi}\frac{(x+\cos\varphi)^m\,\partial\varphi}{\sin^{2m+1}\varphi}\,(x^2>1)$ und $\int_0^{\pi}\frac{\sin^{2m+1}\varphi\,\partial\varphi}{(x+\cos\varphi)^{m+1}}\,(x^2>1)$;

3) $m+1<0$: $\int_0^{\pi}\frac{(x+\cos\varphi)^m\,\partial\varphi}{\sin^{2m+1}\varphi}\,(x^2>1)$ und

$$\frac{1}{x^m}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(m+1)\varphi\,[\cos^2\varphi+x^2\sin^2\varphi]^m}{\cos^{m+1}\varphi}\partial\varphi.$$

Dass hiemit das allgemeine Integral gefunden ist, ist klar.

VIII.

In einer vertikal stehenden Ebene soll eine Kurve konstruirt werden so, dass ein schwerer Körper, der auf ihr herabfällt, immer in derselben Zeit in dem tiefsten Punkte derselben angelangt, von wo aus (auf der Kurve) er auch ohne Anfangsgeschwindigkeit gegangen seyn mag, wenn man von der Reibung und dem Luftwiderstand absieht. (Tautochrone).

Sey durch den tiefsten Punkt die Axe der x vertikal gegen die Richtung der Schwere gerichtet; y die Ordinate eines Punktes, s der zum Punkt (x, y) gehörige, vom Anfangspunkt aus gerechnete Kurvenbogen. (Man vergleiche etwa Fig. 25, wenn AM vertikal nach oben gerichtet ist, $AM=x$, $MN=y$, $AN=s$.) Ist p das Gewicht des Körpers, t die vom Anfang der Bewegung gerechnete Zeit, so hat man:

$$\frac{p}{g}\frac{\partial^2x}{\partial t^2}=-p,\ \frac{p}{g}\frac{\partial^2y}{\partial t^2}=0;\ \frac{\partial^2x}{\partial t^2}=-g,\ \frac{\partial^2y}{\partial t^2}=0;\ \left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)^2=\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2,$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)^2=\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial^2x}{\partial t^2}+\frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial^2y}{\partial t^2}=-g\frac{\partial x}{\partial t};\ \left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)^2=-2gx+C.$$

Ist nun h die Abszisse des Ausgangspunkts, so ist für $x=h$: $\frac{\partial s}{\partial t}=0$, also $C=2gh$ und $\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)^2=2g(h-x)$, $\frac{\partial s}{\partial t}=-\sqrt{2g(h-x)}$, wo man das negative Zeichen wählen muss, da s abnimmt mit wachsendem t. Demnach:

$$\frac{\partial t}{\partial s}=-\frac{1}{\sqrt{2g(h-x)}},\ t=-\int\frac{\partial s}{\sqrt{2g(h-x)}}.$$

Ist nun $s=f(x)$, so ist, wenn τ die Zeit des Falles:

$$\tau=\int_0^h\frac{f'(x)\,\partial x}{\sqrt{2g(h-x)}}=\sqrt{\frac{h}{2g}}\int_0^1\frac{f'(hz)\,\partial z}{\sqrt{1-z}}.$$

Nach den Bedingungen der Aufgabe soll diese Grösse unabhängig von h seyn, so dass $\frac{\partial \tau}{\partial h}=0$ seyn muss. Demnach:

$$\frac{1}{2\sqrt{2gh}}\int_0^1\frac{f'(hz)\,\partial z}{\sqrt{1-z}}+\sqrt{\frac{h}{2g}}\int_0^1\frac{z f''(hz)\,\partial z}{\sqrt{1-z}}=0,$$

d. h. $$\frac{1}{2\sqrt{2gh}}\int_0^1\frac{f'(hz)+2hzf''(hz)}{\sqrt{1-z}}\partial z=0,\quad \frac{1}{2h\sqrt{2g}}\int_0^h\frac{f'(x)+2xf''(x)}{\sqrt{h-x}}\,\partial x=0.$$

Da nun nicht $\frac{1}{2h\sqrt{2g}}=0$, so muss das bestimmte Integral Null seyn, was auch h seyn mag. Dies ist nur möglich, wenn $f'(x)+2xf''(x)=0$, da man ja etwa immer h klein genug wählen kann, dass $f'(x)+2xf''(x)$ von $x=0$ bis $x=h$ immer dasselbe Zeichen hat, wo dann sicher $\int_0^h\frac{f'(x)+2xf''(x)}{\sqrt{h-x}}\partial x$ nicht Null wäre. Aber $f(x)=s$, also

$$\frac{\partial s}{\partial x}+2x\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}=0,\quad \frac{1}{\frac{\partial s}{\partial x}}\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}=-\frac{1}{2x},\quad l\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)=-\frac{1}{2}l(x)+C',\quad \frac{\partial s}{\partial x}=\frac{C}{\sqrt{x}},$$

$$s=2C\sqrt{x}+C'=2C\sqrt{x},$$

da für $x=0$ auch $s=0$. Diese Gleichung stellt aber eine Zykloide dar. (§. 55.) Jetzt ist

$$\tau=\int_0^h\frac{C}{\sqrt{x}}\cdot\frac{\partial x}{\sqrt{2g(h-x)}}=\frac{C\pi}{\sqrt{2\pi}},$$

was wirklich von h unabhängig ist. (Man vergl. hiemit: Poisson, Mechanik, I, §. 197.)

IX.

Sey $f(x)$ eine Funktion von x so beschaffen, dass $f(x)$, $f'(x)$, ..., $f^{n-1}(x)$ Null sind für $x=a$ und $x=b$, so ist

$$\int_a^b f(x)F^n(x)\,\partial x=(-1)^n\int_a^b f^n(x)F(x)\,\partial x. \qquad (a)$$

Dieser Satz folgt ganz unmittelbar aus dem nachstehenden Schema:

$$\int f(x)F^n(x)\partial x=f(x)F^{n-1}(x)-\int f'(x)F^{n-1}(x)\partial x,$$

$$\int f'(x)F^{n-1}(x)\partial x=f'(x)F^{n-2}(x)-\int f''(x)F^{n-2}(x)\partial x,$$

$$\vdots$$

$$\int f^{n-1}(x)F'(x)\partial x=f^{n-1}(x)F(x)-\int f^n(x)F(x)\partial x.$$

Dass dabei $f^n(x)$ und $F^n(x)$ innerhalb der Integrationsgränzen endlich seyn müssen, ist selbst verständlich.

Als spezielles Beispiel wollen wir $a=-1$, $b=+1$, $f(x)=(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}$ setzen, wo n (wie eben) eine positive ganze Zahl ist, so sind alle Bedingungen erfüllt und es ist:

$$\int_{-1}^{+1}(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}F^n(x)\,\partial x=(-1)^n\int_{-1}^{+1}\frac{\partial^n(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}}{\partial x^n}F(x)\,\partial x. \qquad \text{(b)}$$

Nun ist aber

$$\frac{\partial^{n-1}(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}}{\partial x^{n-1}}=(-1)^{n-1}\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{n}\sin(n\varphi),\text{ wenn } x=\cos\varphi. \qquad \text{(b')}$$

Denn für $n=2, 3, \ldots$ gilt der Satz. Es ist nämlich

$$\frac{\partial(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}{\partial x}=-\frac{1.3}{2}(1-x^2)^{\frac{1}{2}}2x=-\frac{1.3}{2}2\cos\varphi.\sin\varphi=-\frac{1.3}{2}\sin 2\varphi,$$

$$\frac{\partial^2(1-x^2)^{\frac{5}{2}}}{\partial x^2}=-\frac{5}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left[2x(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\right]=-5\left[(1-x^2)^{\frac{3}{2}}-3x^2(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\right]=-5\,[\sin^3\varphi-$$

$$3\cos^2\varphi\sin\varphi]=5\sin 3\varphi=\frac{1.3.5}{3}\sin 3\varphi.$$

Sey nun der Satz (b′) wahr für ein bestimmtes n, so fragt es sich, ob er für das folgende n auch noch gilt. Sey also

$$\frac{\partial^{n-1}(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}}{\partial x^{n-1}}=y_n=(-1)^{n-1}\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{n}\sin n\varphi,$$

so ist

$$y_{n+1}=\frac{\partial^n(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x^n}=\int_1^x\frac{\partial^{n+1}(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x^{n+1}}\partial x=-\int_0^\varphi\frac{\partial^{n+1}(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x^{n+1}}\sin\varphi\,\partial\varphi,$$

wenn man $x=\cos\varphi$ setzt. Aber

$$\frac{\partial^{n+1}(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x^{n+1}}=\frac{\partial^{n+1}\left[(1-x^2)(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}\right]}{\partial x^{n+1}}=(1-x^2)\frac{\partial^2 y_n}{\partial x^2}-2(n+1)x\frac{\partial y_n}{\partial x}-n(n+1)y_n,$$

oder wenn $x=\cos\varphi$, $\frac{\partial y}{\partial x}=-\frac{1}{\sin\varphi}\frac{\partial y}{\partial\varphi}$, $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{1}{\sin^2\varphi}\frac{\partial^2 y}{\partial\varphi^2}-\frac{\cos\varphi}{\sin^3\varphi}\frac{\partial y}{\partial\varphi}$:

$$\frac{\partial^{n+1}(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x^{n+1}}=\frac{\partial^2 y_n}{\partial\varphi^2}+(2n+1)\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}\frac{\partial y_n}{\partial\varphi}-n(n+1)y_n,$$

d. h.

$$\frac{\partial^{n+1}(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}}{\partial x^{n+1}}=(-1)^n 1.3\ldots(2n-1)n\sin n\varphi+(-1)^{n-1}1.3\ldots(2n-1)(2n+1)$$

$$\cos n\varphi\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}-(-1)^{n-1}1.3\ldots(2n-1)(n+1)\sin n\varphi$$

$$=(-1)^n 1.3\ldots(2n-1)\left[n\sin n\varphi-(2n+1)\frac{\cos\varphi\cos n\varphi}{\sin\varphi}+(n+1)\sin n\varphi\right]$$

$$=(-1)^n.1.3\ldots(2n+1)\left[\sin n\varphi-\frac{\cos\varphi\cos n\varphi}{\sin\varphi}\right]$$

$$=(-1)^{n-1}.1.3\ldots(2n+1)\frac{\cos(n+1)\varphi}{\sin\varphi},$$

so dass

$$y_{n+1}=(-1)^n\int_0^\varphi 1.3\ldots(2n+1)\frac{\cos(n+1)\varphi}{\sin\varphi}\sin\varphi\,\partial\varphi=(-1)^n\frac{1.3..(2n+1)\sin(n+1)\varphi}{n+1},$$

wodurch nun der Satz (b′) bewiesen ist.

Setzt man in der Formel (b) nun $x = \cos\varphi$, so ist

$$\int_0^\pi \sin^{2n-1}\varphi\, F^n(\cos\varphi)\sin\varphi\, \partial\varphi = (-1)^n \int_0^\pi (-1)^{n-1} 1.3\ldots(2n-1)\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\sin n\varphi}{n}\right]$$
$$F(\cos\varphi)\sin\varphi\,\partial\varphi,$$

und da $\frac{\partial}{\partial x}\frac{\sin n\varphi}{n} = \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\sin n\varphi}{n}\right)\cdot\left(-\frac{1}{\sin\varphi}\right) = -\frac{\cos n\varphi}{\sin\varphi}$, so ist

$$\left.\begin{aligned}
&\int_0^\pi \sin^{2n}\varphi\, F^n(\cos\varphi)\,\partial\varphi = 1.3\ldots(2n-1\int_0^\pi \cos n\varphi\, F(\cos\varphi)\,\partial\varphi,\\
&\int_0^\pi \cos n\varphi\, F(\cos\varphi)\,\partial\varphi = \frac{1}{1.3.5\ldots 2n-1}\int_0^\pi \sin^{2n}\varphi\, F^n(\cos\varphi)\,\partial\varphi.
\end{aligned}\right\} \quad (c)$$

Als Anwendung dieses Satzes wollen wir $F(u) = \frac{1}{\sqrt{1-2au+a^2}}$, $F^n(u) = \frac{1.3\ldots(2n-1)a^n}{(1-2au+a^2)^{n+\frac{1}{2}}}$ setzen, so dass

$$\int_0^\pi \frac{\cos n\varphi\,\partial\varphi}{\sqrt{1-2a\cos\varphi+a^2}} = a^n \int_0^\pi \frac{\sin^{2n}\varphi\,\partial\varphi}{(1-2a\cos\varphi+a^2)^{n+\frac{1}{2}}}.$$

Bestimmt man ψ aus der Gleichung

$$\frac{\sin\varphi}{\sqrt{1-2a\cos\varphi+a^2}} = \sin\psi,$$

so sind die Gränzen von ψ auch 0 und π, und da $1-2a\cos\varphi+a^2-\sin^2\varphi = \cos^2\varphi - 2a\cos\varphi + a^2 = (\cos\varphi - a)^2$, so ist $1-2a\cos\varphi+a^2-\sin^2\varphi > 0$, $1-2a\cos\varphi+a^2 > \sin^2\varphi$, $\sqrt{1-2a\cos\varphi+a^2} > \sin\varphi$, so dass ψ möglich ist; auch ist $1-2a\cos\varphi+a^2$ von $\varphi=0$ bis $\varphi=\pi$ nicht Null, da sonst $\cos\varphi = \frac{1+a^2}{2a}$ seyn müsste und immer $1+a^2-2a = (1-a)^2$, d. h. positiv ist, so dass bei positivem a: $1+a^2 > 2a$, $\frac{1+a^2}{2a} > 1$, und bei negativem a: $\frac{1+a^2}{2a} < -1$ ist, mithin nie $= \cos\varphi$ werden kann (den Fall ausgenommen, wo $a^2 = 1$). Alsdann ist, wenn wir $a^2 < 1$ annehmen:

$$\frac{1}{\sqrt{1-a^2\sin^2\psi}} = \frac{\sqrt{1-2a\cos\varphi+a^2}}{1-a\cos\varphi};\quad \cos\psi = \frac{\cos\varphi(1-2a\cos\varphi+a^2)-a\sin^2\varphi}{(1-2a\cos\varphi+a^2)^{\frac{3}{2}}}\frac{\partial\varphi}{\partial\psi};$$

$$\cos\psi = \pm\sqrt{\frac{1-2a\cos\varphi+a^2-\sin^2\varphi}{1-2a\cos\varphi+a^2}} = \pm\sqrt{\frac{\cos^2\varphi-2a\cos\varphi+a^2}{1-2a\cos\varphi+a^2}},$$

wo das obere Zeichen für $\psi < \frac{\pi}{2}$, das untere für $\psi > \frac{\pi}{2}$ gilt. Aber für $\psi = \frac{\pi}{2}$ ist $\sin\varphi = \sqrt{1-2a\cos\varphi+a^2}$, $\cos^2\varphi - 2a\cos\varphi + a^2 = 0$; da für $\psi=0$ auch $\varphi=0$ und dann $\cos^2\varphi - 2a\cos\varphi + a^2 = 1-2a+a^2 = (1-a)^2$, so ist für $\psi < \frac{\pi}{2}$: $\sqrt{\cos^2\varphi - 2a\cos\varphi + a^2} = \cos\varphi - a$; für $\psi = \pi$ ist $\varphi = \pi$, also $\cos^2\varphi - 2a\cos\varphi + a^2 = (a+1)^2$, so dass für $\psi > \frac{\pi}{2}$: $\sqrt{\cos^2\varphi - 2a\cos\varphi + a^2} = a - \cos\varphi$. Mithin

$$\cos\psi = +\frac{\cos\varphi - a}{\sqrt{1-2a\cos\varphi+a^2}}\left(\psi < \frac{\pi}{2}\right) \text{ oder } -\frac{a-\cos\varphi}{\sqrt{1-2a\cos\varphi+a^2}}\left(\psi > \frac{\pi}{2}\right),$$

so dass immer

$$\cos\psi=\frac{\cos\varphi-a}{\sqrt{1-2a\cos\varphi+a^2}},$$

und

$$\frac{\cos\varphi(1-2a\cos\varphi+a^2)-a\sin^2\varphi}{(1-2a\cos\varphi+a^2)^{\frac{3}{2}}}\frac{\partial\varphi}{\partial\psi}=\frac{\cos\varphi-a}{(1-2a\cos\varphi+a^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\frac{(1-a\cos\varphi)(\cos\varphi-a)}{1-2a\cos\varphi+a^2}\frac{\partial\varphi}{\partial\psi}=\cos\varphi-a,\quad \frac{1-a\cos\varphi}{1-2a\cos\varphi+a^2}\frac{\partial\varphi}{\partial\psi}=1;$$

demnach

$$\frac{1}{\sqrt{1-2a\cos\varphi+a^2}}\frac{\partial\varphi}{\partial\psi}=\frac{\sqrt{1-2a\cos\varphi+a^2}}{1-a\cos\varphi}=\frac{1}{\sqrt{1-a^2\sin^2\psi}},$$

und

$$\int_0^\pi\frac{\sin^{2n}\varphi\,\partial\varphi}{(1-2a\cos\varphi+a^2)^{n+\frac{1}{2}}}=\int_0^\pi\left(\frac{\sin\varphi}{\sqrt{1-2a\cos\varphi+a^2}}\right)^{2n}\frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-2a\cos\varphi+a}}$$

$$=\int_0^\pi\frac{\sin^{2n}\psi\,\partial\psi}{\sqrt{1-a^2\sin^2\psi}},$$

mithin endlich

$$\int_0^\pi\frac{\cos n\varphi\,\partial\varphi}{\sqrt{1-2a\cos\varphi+a^2}}=a^n\int_0^\pi\frac{\sin^{2n}\psi\,\partial\psi}{\sqrt{1-a^2\sin^2\psi}},\quad a^2<1. \tag{d}$$

Das letzte Integral gehört direkt zu den elliptischen (§. 100).

Gesetzt also etwa, man solle in der Gleichung

$$\frac{1}{\sqrt{1-2a\cos x+a^2}}=\frac{1}{2}A_0+A_1\cos x+A_2\cos 2x+\ldots.$$

die Koeffizienten bestimmen, so hätte man nach §. 96:

$$A_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\frac{\cos nx\,\partial x}{\sqrt{1-2a\cos x+a^2}}=\frac{2a^n}{\pi}\int_0^\pi\frac{\sin^{2n}x\,\partial x}{\sqrt{1-a^2\sin^2x}}=\frac{4a^n}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{2n}x\,\partial x}{\sqrt{1-a^2\sin^2x}}.$$

Diese Entwicklung kommt in den Anwendungen häufig vor.

X.

Ueber einer Ellipse, deren Halbaxen a und b sind, ist ein Kegel errichtet, dessen Spitze senkrecht über dem Mittelpunkte der Ellipse in der Entfernung c liegt. Um die Spitze beschreibt man eine Kugel mit dem Halbmesser r und will denjenigen Theil der Kugelfläche kennen, der innerhalb des Kegels liegt.

Die Gleichung der Kegelfläche ist $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$; der Kugelfläche: $x^2+y^2+z^2=r^2$, wenn man die Kegelspitze als Anfangspunkt rechtwinklicher Koordinaten und die Axen der x und y parallel den Hauptaxen der Ellipse nimmt. Der Inhalt des gesuchten Flächenstücks ist gegeben durch das doppelte Integral

$$r\iint\frac{\partial x\,\partial y}{\sqrt{r^2-x^2-y^2}}\quad (\text{§. 58, II}), \tag{a}$$

wenn dasselbe auf alle Werthe von x und y ausgedehnt wird, die den Punkten der Projektion der gesuchten Fläche auf die Ebene der xy entsprechen. Was nun aber diese Projektion anbelangt, so wird man die Gleichung ihrer Begränzungskurve erhalten, wenn man z zwischen den Gleichungen der beiden Flächen eliminirt. Diese Gleichung ist demnach:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{r^2-x^2-y^2}{c^2},\quad x^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{c^2}\right)+y^2\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)=\frac{r^2}{c^2}.$$

Setzt man in dem Integrale (a) rx, ry an die Stelle von x, y, so ist die gesuchte Fläche

$= r^2 \int\int \frac{\partial x \, \partial y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$, ausgedehnt auf alle positiven oder negativen Werthe von x und y, für die $\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 \overset{=}{<} 1$, wo $\alpha^2 = 1 + \frac{c^2}{a^2}$, $\beta^2 = 1 + \frac{c^2}{b^2}$. Man sieht leicht, dass man, wenn man das Integral nur auf die positiven Werthe von x und y ausdehnt, für die $\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 \overset{=}{<} 1$, den vierten Theil der Fläche enthält. Dieselbe ist also endlich =

$$4 r^2 \int_0^{\frac{1}{\alpha}} \partial x \int_0^{\frac{1}{\beta}\sqrt{1-\alpha^2 x^2}} \frac{\partial y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}. \qquad (a')$$

Wir wollen nun neue Veränderliche ϱ, ω einführen so, dass $\alpha x = \varrho \cos\omega$, $\beta y = \varrho \sin\omega$, so ist $\frac{\partial x}{\partial \varrho} = \frac{\cos\omega}{\alpha}$, $\frac{\partial x}{\partial \omega} = -\frac{\varrho \sin\omega}{\alpha}$, $\frac{\partial y}{\partial \varrho} = \frac{\sin\omega}{\beta}$, $\frac{\partial y}{\partial \omega} = \frac{\varrho\cos\omega}{\beta}$; $\frac{\partial x}{\partial \varrho}\frac{\partial y}{\partial \omega} - \frac{\partial x}{\partial \omega}\frac{\partial y}{\partial \varrho} = \frac{\varrho}{\alpha\beta}$. Was weiter die neuen Gränzen anbelangt, so ist zunächst (§. 110, III):

$$\int_0^{\frac{1}{\alpha}} \partial x \int_0^{\frac{1}{\beta}\sqrt{1-\alpha^2 x^2}} \frac{\partial y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} = \int_0^{\frac{1}{\alpha}} \sqrt{1-\alpha^2 x^2}\, \partial x \int_0^{\frac{1}{\beta}} \frac{\partial y}{\sqrt{1-x^2-(1-\alpha^2 x^2) y^2}},$$

und man hätte zu setzen: $\alpha x = \varrho\cos\omega$, $\beta\sqrt{1-\alpha^2 x^2}\, y = \varrho \sin\omega$, woraus, wenn man ϱ eliminirt: $\frac{\alpha x}{\beta\sqrt{1-\alpha^2 x^2}\, y} = \operatorname{cotg}\omega$. Für $x = 0$ folgt hieraus $\omega = \frac{\pi}{2}$, für $x = \frac{1}{\alpha}$: $\omega = 0$. Da $\alpha x = \varrho\cos\omega$, so ist $\beta\sqrt{1-\varrho^2\cos^2\omega}\, y = \varrho\sin\omega$, so dass für $y = 0$ auch $\varrho = 0$, für $y = \frac{1}{\beta}$ ist $\sqrt{1-\varrho^2\cos^2\omega} = \varrho\sin\omega$, also $\varrho = 1$, so dass (§. 52, II):

$$\int_0^{\frac{1}{\alpha}} \partial x \int_0^{\frac{1}{\beta}\sqrt{1-\alpha^2 x^2}} \frac{\partial y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \partial\omega \int_0^1 \frac{\varrho}{\alpha\beta} \frac{\partial\varrho}{\sqrt{1-\varrho^2\left(\frac{\cos^2\omega}{\alpha^2}+\frac{\sin^2\omega}{\beta^2}\right)}}$$

$$= \frac{1}{\alpha\beta}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \partial\omega \int_0^1 \frac{\varrho\,\partial\varrho}{\sqrt{1-\varrho^2\left(\frac{\cos^2\omega}{\alpha^2}+\frac{\sin^2\omega}{\beta^2}\right)}}$$

$$= \frac{1}{\alpha\beta}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \partial\omega \left[\frac{1}{\frac{\cos^2\omega}{\alpha^2}+\frac{\sin^2\omega}{\beta^2}} - \frac{\sqrt{1-\left(\frac{\cos^2\omega}{\alpha^2}+\frac{\sin^2\omega}{\beta^2}\right)}}{\frac{\cos^2\omega}{\alpha^2}+\frac{\sin^2\omega}{\beta^2}}\right]$$

$$= \alpha\beta\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial\omega}{\alpha^2\sin^2\omega+\beta^2\cos^2\omega} - \alpha\beta\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{1-\left(\frac{\cos^2\omega}{\alpha^2}+\frac{\sin^2\omega}{\beta^2}\right)}\,\partial\omega}{\alpha^2\sin^2\omega+\beta^2\cos^2\omega}.$$

Wir wollen $a > b$ voraussetzen, so dass $\beta^2 > \alpha^2$ ist; hiernach ist das erste Integral =

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial\omega}{\beta^2-(\beta^2-\alpha^2)\sin^2\omega} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial\omega}{\beta^2-(\beta^2-\alpha^2)\cos^2\omega} = \frac{1}{2\beta}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{\beta-\cos\omega\sqrt{\beta^2-a^2}}\right.$$

$$+\frac{1}{\beta+\cos\omega\sqrt{\beta^2-\alpha^2}}\Bigg]\partial\omega=\frac{1}{2\beta}\Bigg[\frac{2}{\alpha}a^2c\left(tg=\sqrt{\frac{\beta+\sqrt{\beta^2-\alpha^2}}{\beta-\sqrt{\beta^2-\alpha^2}}}\right)$$

$$+\frac{2}{\alpha}arc\left(tg=\sqrt{\frac{\beta-\sqrt{\beta^2-\alpha^2}}{\beta+\sqrt{\beta^2-\alpha^2}}}\right)\Bigg]=\frac{1}{\alpha\beta}\,\frac{\pi}{2}\ (\text{§. 50, IV}).$$

Was das zweite obiger Integrale betrifft, so kommt es auf elliptische Integrale zurück. Setzt man nämlich $\sin\omega=x$, so ist es, da x, $\cos\omega$ nur positiv sind:

$$\int_0^1\frac{\sqrt{1-\frac{x^2}{\beta^2}-\frac{1-x^2}{\alpha^2}}}{\alpha^2x^2+\beta^2(1-x^2)}\frac{\partial x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\int_0^1\frac{1-\frac{1}{\alpha^2}+\left(\frac{1}{\alpha^2}-\frac{1}{\beta^2}\right)x^2}{(\alpha^2-\beta^2)x^2+\beta^2}\,\frac{\partial x}{\sqrt{\left[1-\frac{1}{\alpha^2}+\left(\frac{1}{\alpha^2}-\frac{1}{\beta^2}\right)x^2\right](1-x^2)}}$$

$$=\frac{1}{\alpha\beta}\int_0^1\frac{\beta^2(\alpha^2-1)+(\beta^2-\alpha^2)x^2}{\beta^2-(\beta^2-\alpha^2)x^2}\,\frac{\partial x}{\sqrt{[\beta^2(\alpha^2-1)+(\beta^2-\alpha^2)x^2](1-x^2)}}$$

$$=\frac{\sqrt{\alpha^2-1}}{\alpha}\int_0^1\frac{1+n^2x^2}{\beta^2-(\beta^2-\alpha^2)x^2}\,\frac{\partial x}{\sqrt{(1+n^2x^2)(1-x^2)}},$$

wo $n^2=\frac{\beta^2-\alpha^2}{\beta^2(\alpha^2-1)}$, also da $\alpha^2>1$, jedenfalls $n^2>0$ ist. Setzt man hier (§. 102) $x=\cos\varphi$, so ist

$$\int_0^1\frac{1+n^2x^2}{\beta^2-(\beta^2-\alpha^2)x^2}\,\frac{\partial x}{\sqrt{(1+n^2x^2)(1-x^2)}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+n^2\cos^2\varphi}{\beta^2-(\beta^4-\alpha^2)\cos^2\varphi}\,\frac{\partial\varphi}{\sqrt{1+n^2\cos^2\varphi}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+n^2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+n^2\cos^2\varphi}{\beta^2-(\beta^2-\alpha^2)\cos^2\varphi}\,\frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}},$$

wo $e^2=\frac{n^2}{1+n^2}=\frac{\beta^2-\alpha^2}{\alpha^2(\beta^2-1)}$, $1+n^2=\frac{\alpha^2(\beta^2-1)}{\beta^2(\alpha^2-1)}$, d. h. $e^2=\frac{a^2-b^2}{a^2+c^2}$, $1+n^2=\frac{a^2+c^2}{b^2+c^2}$.
Nun ist aber $\frac{1+n^2\cos^2\varphi}{\beta^2-(\beta^4-\alpha^2)\cos^2\varphi}=-\frac{n^2}{\beta^2-\alpha^2}+\frac{\alpha^2}{\alpha^2-1}\,\frac{1}{\beta^2-(\beta^2-\alpha^2)\cos^2\varphi}=-\frac{1}{\beta^2(\alpha^2-1)}$
$+\frac{\alpha^2}{\alpha^2-1}\,\frac{1}{\alpha^2+(\beta^2-\alpha^2)\sin^2\varphi}=-\frac{1}{\beta^2(\alpha^2-1)}+\frac{1}{\alpha^2-1}\,\frac{1}{1+\frac{\beta^2-\alpha^2}{\alpha^2}\sin^2\varphi}$, so dass

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+n^2\cos^2\varphi}{\beta^2-(\beta^2-\alpha^2)\cos^2\varphi}\,\frac{\partial\varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}=-\frac{1}{\beta^2(\alpha^2-1)}F\left(\frac{\pi}{2},e\right)$$

$$+\frac{1}{\alpha^2-1}\Pi\left(\frac{\pi}{2},\frac{\beta^2-\alpha^2}{\alpha^2},e\right),$$

mithin endlich

$$\int_0^{\frac{1}{\alpha}}\partial x\int_0^{\frac{1}{\beta}\sqrt{1-\alpha^2x^2}}\frac{\partial x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}=\frac{\pi}{2}-\frac{\beta^2}{\alpha\sqrt{\beta^2-1}}\Pi\left(\frac{\pi}{2},\frac{\beta^2-\alpha^2}{\alpha^2},e\right)+\frac{1}{\alpha\sqrt{\beta^2-1}}F\left(\frac{\pi}{2},e\right)$$

$$=\frac{\pi}{2}-\frac{a(b^2+c^2)}{bc\sqrt{a^2+c^2}}\Pi\left(\frac{\pi}{2},\frac{(a^2-b^2)c^2}{b^2(a^2+c^2)},e\right)+\frac{ab}{c\sqrt{a^2+c^2}}F\left(\frac{\pi}{2},e\right);$$
$$e=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2+c^2}}.$$

Setzt man in der Formel (h) des §. 99: $tg^2\alpha=\frac{c^2}{b^2}$, also $e^2 tg^2\alpha=\frac{(a^2-b^2)c^2}{b^2(a^2+c^2)}$, $\sin^2\alpha=\frac{c^2}{b^2+c^2}$, $\cos^2\alpha=\frac{b^2}{b^2+c^2}$, $\frac{(1-e^2)\sin^2\alpha}{1+e^2 tg^2\alpha}=\frac{b^2c^2}{a^2(b^2+c^2)}$, $1+e^2tg^2\alpha=\frac{a^2(b^2+c^2)}{b^2(a^2+c^2)}$, $\varphi=\frac{\pi}{2}$, $k=-(\cos^2\alpha+e^2\sin^2\alpha)$, so ist

$$\Pi\left(\frac{\pi}{2},\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\frac{c^2}{b^2},e\right)=\frac{b^2c^2}{a^2(b^2+c^2)}\Pi\left(\frac{\pi}{2},k,e\right)+\frac{b^2(a^2+c^2)}{a^2(b^2+c^2)}F\left(\frac{\pi}{e},e\right)$$
$$+\frac{bc\sqrt{a^2+c^2}}{a(b^2+c^2)}\frac{\pi}{2},\ -\frac{a(b^2+c^2)}{bc\sqrt{a^2+c^2}}\Pi\left(\frac{\pi}{2},\frac{a^2-b^2}{a^2+c^2}\frac{c^2}{b^2},e\right)=\frac{bc}{a\sqrt{a^2+c^2}}\Pi\left(\frac{\pi}{2},k,e\right)$$
$$-\frac{b\sqrt{a^2+c^2}}{ac}F\left(\frac{\pi}{2},e\right)-\frac{\pi}{2}.$$

Ferner nach (d) in §. 104:

$$\frac{bc}{a\sqrt{a^2+c^2}}\left[\Pi\left(\frac{\pi}{2},k,e\right)-F\left(\frac{\pi}{2},e\right)\right]=\frac{\pi}{2}-E\left(\frac{\pi}{2},e\right)F(\alpha,e_1)$$
$$+F\left(\frac{\pi}{2},e\right)F(\alpha,e_1)-F\left(\frac{\pi}{2},e\right)E(\alpha,e_1),$$

so dass also

$$-\frac{a(b^2+c^2)}{bc\sqrt{a^2+c^2}}\Pi\left(\frac{\pi}{2},\frac{a^2-b^2}{a^2+c^2}\frac{c^2}{b^2},e\right)=-E\left(\frac{\pi}{2},c\right)F(\alpha,e_1)+F\left(\frac{\pi}{2},e\right)F(\alpha,e_1)$$
$$-F\left(\frac{\pi}{2},e\right)E(\alpha,e_1)-\frac{ab}{c\sqrt{a^2+c^4}}F\left(\frac{\pi}{2},e\right),$$

und endlich die Fläche =

$$4r^2\left[\frac{\pi}{2}-E\left(\frac{\pi}{2},e\right)F(\alpha,e_1)+F\left(\frac{\pi}{2},e\right)F(\alpha,e_1)-F\left(\frac{\pi}{2},e\right)E(\alpha,e_1)\right],$$
$$\text{wo } e=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2+c^2}},\ e_1=\sqrt{\frac{b^2+c^2}{a^2+c^2}},\ tg\,\alpha=\frac{c}{b}.$$

Für $a=b$ ist die Ellipse ein Kreis. Alsdann ist $e=0$, $e_1=1$, also $E\left(\frac{\pi}{2},e\right)=F\left(\frac{\pi}{2},e\right)=\frac{\pi}{2}$, $E(\alpha,e_1)=\int_0^\alpha\sqrt{1-\sin^2\varphi}\,\partial\varphi=\sin\alpha=\frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}}$, und die Fläche = $4r^2\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}}\right)=2r^2\pi\left(1-\frac{c}{\sqrt{a^2+c^2}}\right)$, wie man sehr leicht auch auf elementarem Wege finden kann.

XI.

1.) Wir wollen uns das Integral

$$\int_0^\infty f\left[\left(ax-\frac{b}{x}\right)^2\right]\partial x$$

zur Umformung vorlegen, wenn $a>0$, $b>0$. Man setze $ax-\frac{b}{x}=z$, also $x=\frac{z}{2a}\pm\frac{1}{2a}\sqrt{4ab+z^2}$, $\frac{\partial x}{\partial z}=\frac{1}{4a}\pm\frac{z}{2a\sqrt{4ab+z^2}}$. Die Grösse $ax-\frac{b}{x}$ erreicht von

$x=0$ bis $x=\infty$ kein Maximum oder Minimum, sondern wächst von $-\infty$ zu $+\infty$, so dass also die Gränzen von z sind $-\infty$ und $+\infty$. Daraus aber folgt sofort, dass nur das obere Zeichen gelten kann, man also hat:

$$\int_0^\infty f\left[\left(ax-\frac{b}{x}\right)^2\right]\partial x=\int_{-\infty}^{+\infty} f(z^2)\left(\frac{1}{2a}+\frac{z}{2a\sqrt{4ab+z^2}}\right)\partial z$$

$$=\frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{+\infty} f(z^2)\partial z+\frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(z^2)z\,\partial z}{\sqrt{4ab+z^2}}.$$

Aber (§. 49):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(z^2)\partial z=2\int_0^\infty f(z^2)\partial z,\quad \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{z f(z^2)\partial z}{\sqrt{4ab+z^2}}=0,$$

so dass endlich

$$\int_0^\infty f\left[\left(ax-\frac{b}{x}\right)^2\right]\partial x=\frac{1}{a}\int_0^\infty f(x^2)\partial x,\ a>0,\ b>0. \qquad (a)$$

Setzt man in dieser Formel etwa statt $f(z)$: $f(2ab+z)$, so ist

$$f\left[\left(ax-\frac{b}{x}\right)^2\right]=f\left[2ab+\left(ax-\frac{b}{x}\right)^2\right]=f\left(a^2x^2+\frac{b^2}{x^2}\right),\ f(x^2)=f(2ab+x^2),$$

so dass auch

$$\int_0^\infty f\left(a^2x^2+\frac{b^2}{x^2}\right)\partial x=\frac{1}{a}\int_0^\infty f(2ab+x^2)\partial x,\ a>0,\ b>0. \qquad (b)$$

Uebrigens lässt sich diese Formel leicht aus §. 50, VIII ableiten. Setzt man dort nämlich $f(x)=F[x^2-2ab]$, so ist $f\left(ax+\frac{b}{x}\right)=F\left[\left(ax+\frac{b}{x}\right)^2-2ab\right]$ $=F\left(a^2x^2+\frac{b^2}{x^2}\right)$, $f(\sqrt{x^2+4ab})=F(x^2+4ab-2ab)=F(x^2+2ab)$, so dass

$$\int_0^\infty F\left(a^2x^2+\frac{b^2}{x^2}\right)\partial x=\frac{1}{a}\int_0^\infty F(x^2+2ab)\,\partial x.$$

2.) Setzt man das bestimmte Integral $\int_0^\infty\frac{l(1+a^2x^2)}{b^2+x^2}\partial x$, in dem a und b positiv sind, gleich y, so ist

$$\frac{\partial y}{\partial a}=\int_0^\infty\frac{2ax^2\partial x}{(b^2+x^2)(1+a^2x^2)}=\frac{2a}{1-a^2b^2}\int_0^\infty\left(\frac{-b^2}{b^2+x^2}+\frac{1}{1+a^2x^2}\right)\partial x=\frac{\pi}{1+ab},$$

$$y=\pi\int\frac{\partial a}{1+ab}\partial x=\frac{\pi}{b}l(1+ab)+C,$$

wo C unabhängig ist von a. Für $a=0$ ist aber $y=0$, also $C=0$, so dass

$$\int_0^\infty\frac{l(1+a^2x^2)}{b^2+x^2}\partial x=\frac{\pi}{b}l(1+ab);\ a>0,\ b>0.$$

XII. Die Abel'schen Funktionen.

1) Angenommen, es sey

$$\Theta_1(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n,\quad \Theta_2(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_m x^m; \qquad (1)$$

ferner seyen $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ zwei ganze Funktionen von x, so dass ihr Produkt $\varphi_1(x)\ \varphi_2(x)$, das wir durch $\varphi(x)$ bezeichnen wollen, éine eben solche Funktion von x sey; α sey eine unveränderliche Grösse, dagegen seyen von den Grössen a_0, ..., a_n, c_0, ..., c_m entweder alle oder doch mehrere abhängig von einer Grösse z, also veränderlich mit dieser letztern.

Setzt man nun.

$$F(x) = \Theta_1(x)^2 \varphi_1(x) - \Theta_2(x)^2 \varphi_2(x) = A(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_r), \qquad (2)$$

so wird die Grösse A, so wie jede der Grössen $x_1, \ldots, x_r$ unabhängig von x seyn, dagegen abhängig von den in $\Theta_1(x)$, $\Theta_2(x)$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ vorkommenden Koeffizienten, also auch abhängig von z. Die $x_1, \ldots, x_r$ sind die, sämmtlich als ungleich vorausgesetzten Wurzeln der Gleichung $F(x) = 0$, d. h. $\Theta_1(x)^2\ \varphi_1(x) - \Theta_2(x)^2\ \varphi_2(x) = 0$, so dass wenn x_e eine dieser Wurzeln ist, nothwendig die Gleichung $F(x_e) = 0$ stattfindet, und zwar identisch, d. h. so, dass alle Glieder der Grösse $F(x_e)$ sich gegenseitig aufheben. In der Grösse $F(x_e)$ kommt nun x_e vor, nebst den veränderlichen Grössen $a_0, \ldots, c_m$, die sämmtlich von z abhängen. Also, da $F(x_e) = 0$ ist, so ist auch $\frac{\partial}{\partial z} F(x_e) = 0$, d. h.

$$\frac{\partial F(x_e)}{\partial x_e}\frac{\partial x_e}{\partial z} + \frac{\partial F(x_e)}{\partial a_0}\frac{\partial a_0}{\partial z} + \ldots + \frac{\partial F(x_e)}{\partial c_m}\frac{\partial c_m}{\partial z} = 0,$$

wo natürlich hier partielle Differentialquotienten verstanden sind. Aus der Gleichung (2) folgt, dass

$$\frac{\partial F(x_e)}{\partial a} = 2\Theta_1(x_e)\varphi_1(x_e)\frac{\partial \Theta_1(x_e)}{\partial a},\quad \frac{\partial F(x_e)}{\partial c} = -2\Theta_2(x_e)\ \varphi_2(x_e)\ \frac{\partial \Theta_2(x_e)}{\partial c}$$

ist, so dass

$$\frac{\partial F(x_e)}{\partial a_0}\frac{\partial a_0}{\partial z} + \ldots + \frac{\partial F(x_e)}{\partial c_m}\frac{\partial c_m}{\partial z} = 2\Theta_1(x_e)\ \varphi_1(x_e)\left[\frac{\partial \Theta_1(x_e)}{\partial a_0}\frac{\partial a_0}{\partial z} + \ldots + \frac{\partial \Theta_1(x_e)}{\partial a_n}\frac{\partial a_n}{\partial z}\right]$$

$$-2\Theta_2(x_e)\ \varphi_2(x_e)\left[\frac{\partial \Theta_2(x_e)}{\partial c_0}\frac{\partial c_0}{\partial z} + \ldots + \frac{\partial \Theta_2(x_e)}{\partial c_m}\frac{\partial c_m}{\partial z}\right]$$

seyn wird. Die vorstehende Gleichung gibt demnach:

$$\frac{\partial F(x_e)}{\partial x_e}\frac{\partial x_e}{\partial z} = 2\Theta_2(x_e)\ \varphi_2(x_e)\left[\frac{\partial \Theta_2(x_e)}{\partial c_0}\frac{\partial c_0}{\partial z} + \ldots + \frac{\partial \Theta_2(x_e)}{\partial c_m}\frac{\partial c_m}{\partial z}\right]$$

$$-2\Theta_1(x_e)\ \varphi_1(x_e)\left[\frac{\partial \Theta_1(x_e)}{\partial a_0}\frac{\partial a_0}{\partial z} + \ldots + \frac{\partial \Theta_1(x_e)}{\partial a_n}\frac{\partial a_n}{\partial z}\right].$$

Bezeichnet man den nach x genommenen Differentialquotienten von F(x) mit F'(x), wobei also $a_0, \ldots, c_m$ konstant sind, so ist $\frac{\partial F(x_e)}{\partial x_e} = F'(x_e)$; ist ferner f(x)

eine ganze Funktion von x und bezeichnet man durch $\Sigma\Psi(x_e)$ den Werth der Grösse $\Psi(x_1)+\Psi(x_2)+\ldots+\Psi(x_r)$, so folgt aus der vorstehenden Gleichung:

$$\frac{f(x_e)\frac{\partial x_e}{\partial z}}{(x_e-\alpha)\sqrt{\varphi(x_e)}}=\frac{2\Theta_2(x_e)\varphi_2(x_e)f(x_e)}{(x_e-\alpha)F'(x_e)\sqrt{\varphi(x_e)}}\left[\frac{\partial\Theta_2(x_e)}{\partial c_0}\frac{\partial c_0}{\partial z}+\ldots+\frac{\partial\Theta_2(x_e)}{\partial c_m}\frac{\partial c_m}{\partial z}\right]$$
$$-\frac{2\Theta_1(x_e)\varphi_1(x_e)f(x_e)}{(x_e-\alpha)F'(x_e)\sqrt{\varphi(x_e)}}\left[\frac{\partial\Theta_1(x_e)}{\partial a_0}\frac{\partial a_0}{\partial z}+\ldots+\frac{\partial\Theta_1(x_e)}{\partial a_n}\frac{\partial a_n}{\partial z}\right].$$

Aber aus $F(x_e)=0$ folgt

$$\Theta_1(x_e)\sqrt{\varphi_1(x_e)}=\pm\Theta_2(x_e)\sqrt{\varphi_2(x_e)},$$

also da $\varphi_1(x_e)\,\varphi_2(x_e)=\varphi(x_e)$:

$$\Theta_1(x_e)\,\varphi_1(x_e)=\pm\Theta_2(x_e)\sqrt{\varphi(x_e)},$$
$$\Theta_2(x_e)\,\varphi_2(x_e)=\pm\Theta_1(x_e)\sqrt{\varphi(x_e)}.$$

wo in beiden Gleichungen dasselbe Zeichen gilt, indem $\varphi_1(x_e)$, $\varphi_2(x_e)$ nothwendig von gleichem Zeichen sind (da $\Theta_1(x_e)^2\varphi_1(x_e)\varphi_2(x_e)=\Theta_1(x_e)^2\varphi(x_e)=\Theta_2(x_0)^2\varphi_2(x_e)^2$).

Bezeichnet man also durch ε_e die Grösse $+1$ oder -1, so ist

$$\Theta_1(x_e)\varphi_1(x_e)=\varepsilon_e\Theta_2(x_e)\sqrt{\varphi(x_e)},\quad \Theta_2(x_e)\varphi_2(x_e)=\varepsilon_e\Theta_1(x_e)\sqrt{\varphi(x_e)}, \tag{3}$$

worin also ε_e entweder $+1$ oder -1 ist (dasselbe aber in beiden Gleichungen). Demnach ist

$$\Sigma\frac{\varepsilon_e f(x_e)}{(x_e-\alpha)\sqrt{\varphi(x_e)}}\frac{\partial x_e}{\partial z}=\Sigma\frac{2\Theta_1(x_e)f(x_e)}{(x_e-\alpha)F'(x_e)}\left[\frac{\partial\Theta_2(x_e)}{\partial c_0}\frac{\partial c_0}{\partial z}+\ldots+\frac{\partial\Theta_2(x_e)}{\partial c_m}\frac{\partial c_m}{\partial z}\right]$$
$$-\Sigma\frac{2\Theta_2(x_e)f(x_e)}{(x_e-\alpha)F'(x_e)}\left[\frac{\partial\Theta_1(x_e)}{\partial a_0}\frac{\partial a_0}{\partial z}+\ldots+\frac{\partial\Theta_1(x_e)}{\partial a_n}\frac{\partial a_n}{\partial z}\right].$$

Die Grösse zweiter Seite dieser Gleichung kann durch

$$\Sigma\frac{\lambda(x_e)}{(x_e-\alpha)F'(x_e)}$$

dargestellt werden, wo sicherlich $\lambda(x)$ eine ganze Funktion von x ist. Setzt man endlich noch

$$\frac{\lambda(x)-\lambda(\alpha)}{x-\alpha}=\lambda_1(x),\quad \lambda(x)-\lambda(\alpha)=(x-\alpha)\lambda_1(x),$$

so ist bekanntlich auch $\lambda_1(x)$ eine ganze Funktion von x und man hat:

$$\Sigma\frac{\varepsilon_e f(x_e)}{(x_e-\alpha)\sqrt{\varphi(x_e)}}\frac{\partial x_e}{\partial z}=\Sigma\frac{\lambda_1(x_e)}{F'(x_e)}+\lambda(\alpha)\Sigma\frac{1}{(x_e-\alpha)F'(x_e)}$$
$$=\Sigma\frac{\lambda_1(x_e)}{F'(x_e)}-\frac{\lambda(\alpha)}{F(\alpha)}\ (\S.\ 38).$$

Da (nach §. 38) $\Sigma\frac{x_e^r}{F'(x_e)}$ gleich dem Koeffizienten von $\frac{1}{\alpha}$ in der Entwicklung von $\frac{\alpha^r}{F(\alpha)}$ nach fallenden Potenzen von α, so ist, da $\lambda_1(x)$ eine ganze Funktion von

x, $\Sigma \frac{\lambda_1(x_e)}{F'(x_e)}$ gleich dem Koeffizienten von $\frac{1}{\alpha}$ in der Entwicklung von $\frac{\lambda_1(\alpha)}{F(\alpha)}$ nach fallenden Potenzen von α. Aber $\frac{\lambda_1(x)}{F(x)} = \frac{\lambda(x)}{(x-\alpha)F(x)} - \frac{\lambda(\alpha)}{(x-\alpha)F(x)}$, und $\Sigma \frac{\lambda_1(x_e)}{F'(x_e)}$ auch gleich dem Koeffizienten von $\frac{1}{x}$ in der Entwicklung von $\frac{\lambda_1(x)}{F(x)}$ nach fallenden Potenzen von x; also ist, weil $\frac{\lambda(\alpha)}{(x-\alpha)F(x)}$ sicher $\frac{1}{x}$ nicht enthält, endlich $\Sigma \frac{\lambda_1(x_e)}{F'(x_e)}$ gleich jenem Koeffizienten in der Entwicklung von $\frac{\lambda(x)}{(x-\alpha)F(x)}$. Ist also

$$\frac{\lambda(x)}{(x-\alpha)F(x)} = E_0 x^s + \ldots + E_s + \frac{E_{s+1}}{x} + \ldots, \tag{4}$$

so ist $\Sigma \frac{\lambda_1(x_e)}{F'(x_e)} = E_{s+1}$, und mithin:

$$\Sigma \frac{\varepsilon_e f(x_e)}{(x_e-\alpha)\sqrt{\varphi(x_e)}} \frac{\partial x_e}{\partial z} = E_{s+1} - \frac{\lambda(\alpha)}{F(\alpha)},$$

$$\int \partial z \, \Sigma \frac{\varepsilon_e f(x_e)}{(x_e-\alpha)\sqrt{\varphi(x_e)}} \frac{\partial x_e}{\partial z} = \int E_{s+1} \partial z - \int \frac{\lambda(\alpha)}{F(\alpha)} \partial z + C,$$

wo C von z unabhängig ist. Bezeichnet man aber

$$\int \frac{f(x)\,\partial x}{(x-\alpha)\sqrt{\varphi(x)}} \text{ durch } \psi(x),$$

so ist die erste Seite $= \varepsilon_1 \psi(x_1) + \varepsilon_2 \psi(x_2) + \ldots + \varepsilon_r \psi(x_r)$, da in $f(x)$, $\varphi(x)$ keine andern von z abhängenden Grössen vorkommen, als x_e. Ferner ist

$$\frac{\lambda(\alpha)}{F(\alpha)} = 2 \frac{\Theta_1(\alpha) \frac{\partial \Theta_2(\alpha)}{\partial z} - \Theta_2(\alpha) \frac{\partial \Theta_1(\alpha)}{\partial z}}{\Theta_1(\alpha)^2 \varphi_1(\alpha) - \Theta_2(\alpha)^2 \varphi_2(\alpha)} f(\alpha)$$

$$= \frac{f(\alpha)}{\sqrt{\varphi(\alpha)}} \frac{\partial}{\partial z} l \left(\frac{\Theta_1(\alpha)\sqrt{\varphi_1(\alpha)} + \Theta_2(\alpha)\sqrt{\varphi_2(\alpha)}}{\Theta_1(\alpha)\sqrt{\varphi_1(\alpha)} - \Theta_2(\alpha)\sqrt{\varphi_2(\alpha)}} \right),$$

da $\varphi_1(\alpha)$, $\varphi_2(\alpha)$ von z unabhängig sind, auch $\Theta_1(\alpha)$, $\Theta_2(\alpha)$ kein x_e enthalten. Also ist

$$\int \frac{\lambda(\alpha)}{F(\alpha)} \partial z = \frac{f(\alpha)}{\sqrt{\varphi(\alpha)}} l \left(\frac{\Theta_1(\alpha)\sqrt{\varphi_1(\alpha)} + \Theta_2(\alpha)\sqrt{\varphi_2(\alpha)}}{\Theta_1(\alpha)\sqrt{\varphi_1(\alpha)} - \Theta_2(\alpha)\sqrt{\varphi_2(\alpha)}} \right).$$

Da eben so $\frac{\lambda(x)}{(x-\alpha)F(x)} = \frac{f(x)}{(x-\alpha)\sqrt{\varphi(x)}} \frac{\partial}{\partial z} l \left(\frac{\Theta_1(x)\sqrt{\varphi_1(x)} + \Theta_2(x)\sqrt{\varphi_2(x)}}{\Theta_1(x)\sqrt{\varphi_1(x)} - \Theta_2(x)\sqrt{\varphi_2(x)}} \right)$,

so ist E_{s+1} der Koeffizient von $\frac{1}{x}$ in der Entwicklung dieser letzteren Grösse, d. h. es ist

$$\int \frac{\lambda(x)}{(x-\alpha)F(x)} \partial z = \frac{f(x)}{(x-\alpha)\sqrt{\varphi(x)}} l \left(\frac{\Theta_1(x)\sqrt{\varphi_1(x)} + \Theta_2(x)\sqrt{\varphi_2(x)}}{\Theta_1(x)\sqrt{\varphi_1(x)} - \Theta_2(x)\sqrt{\varphi_2(x)}} \right) = x^s \int E_0 \partial z + \ldots$$

$$+ \int E_s \partial z + \frac{1}{x} \int E_{s+1} \partial z + \ldots,$$

so dass, wenn man durch $K\Psi(x)$ den Koeffizienten von $\frac{1}{x}$ in der Entwicklung von $\Psi(x)$ nach fallenden Potenzen von x bezeichnet, man hat

$$\int E_{s+1}\,\partial z = K.\frac{f(x)}{(x-\alpha)\sqrt{\varphi(x)}}.\left(\frac{\Theta_1(x)\sqrt{\varphi_1(x)}+\Theta_2(x)\sqrt{\varphi_2(x)}}{\Theta_1(x)\sqrt{\varphi_1(x)}-\Theta_2(x)\sqrt{\varphi_2(x)}}\right),$$

so dass endlich:

$$\varepsilon_1\psi(x_1)+\varepsilon_2\psi(x_2)+\ldots+\varepsilon_r\psi(x_r)=$$
$$K.\frac{f(x)}{(x-\alpha)\sqrt{\varphi(x)}}\,l\left(\frac{\Theta_1(x)\sqrt{\varphi_1(x)}+\Theta_2(x)\sqrt{\varphi_2(x)}}{\Theta_1(x)\sqrt{\varphi_1(x)}-\Theta_2(x)\sqrt{\varphi_2(x)}}\right)$$
$$-\frac{f(\alpha)}{\sqrt{\varphi(\alpha)}}\,l\left(\frac{\Theta_1(\alpha)\sqrt{\varphi_1(\alpha)}+\Theta_2(\alpha)\sqrt{\varphi_2(\alpha)}}{\Theta_1(\alpha)\sqrt{\varphi_1(\alpha)}-\Theta_2(\alpha)\sqrt{\varphi_2(\alpha)}}\right)+C, \qquad (I)$$

worin C unabhängig von $x_1,\ldots,x_r$ und den Koeffizienten in $\Theta_1(x)$, $\Theta_2(x)$; letztere Grössen durch (1) gegeben sind, $\varphi_1(x)$ und $\varphi_2(x)$ ganze Funktionen von x, $\varphi(x)=\varphi_1(x)\varphi_2(x)$, f(x) eine ganze Funktion von x ist, $x_1,\ldots,x_r$ die Wurzeln der Gleichung $\Theta_1(x)^2\varphi_1(x)=\Theta_2(x)^2\varphi_2(x)$ sind, und $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_r$ gleich $+1$ oder -1, je nachdem die Gleichungen (3) dies verlangen. Endlich ist $\psi(x)=\int\frac{f(x)\,\partial x}{(x-\alpha)\sqrt{\varphi(x)}}$. Hierin besteht das Abel'sche Theorem.

Man wird beachten, dass in dem Satze (I) von z nichts mehr vorkommt, so dass also diese Grösse weiter nicht zu beachten ist. Ferner ist klar, dass in $\Theta_1(x)$, $\Theta_2(x)$ einer der $m+n+2$ vorkommenden Koeffizienten $=1$ gesetzt werden kann, ohne der Allgemeinheit Eintrag zu thun, da man in den vorkommenden Quotienten ja durch einen Koeffizienten dividiren kann. Endlich haben wir die Grössen $x_1,\ldots,x_r$ sämmtlich ungleich vorausgesetzt. Allein auf der zweiten Seite der Gleichung (I) kommt von diesen Nichts vor; denkt man sich also, es seyen zwei oder mehrere derselben nahezu gleich, so bleibt die zweite Seite ungeändert, so dass, wenn mehrere gleich sind, immerhin die Gleichung (I) gelten wird. Aus (3) folgt, dass dann auch die ε gleich sind, so dass wenn:

$$\Theta_1(x)^2\varphi_1(x)-\Theta_2(x)^2\varphi_2(x)=A(x-x_1)^{m_1}(x-x_2)^{m_2}\ldots(x-x_r)^{m_r} \qquad (5)$$

auch

$$m_1\varepsilon_1\psi(x_1)+m_2\varepsilon_2\psi(x_2)+\ldots+m_r\varepsilon_r\psi(x_r)=$$
$$K.\frac{f(x)}{(x-\alpha)\sqrt{\varphi(x)}}\,l\left(\frac{\Theta_1(x)\sqrt{\varphi_1(x)}+\Theta_2(x)\sqrt{\varphi_2(x)}}{\Theta_1(x)\sqrt{\varphi_1(x)}-\Theta_2(x)\sqrt{\varphi_2(x)}}\right)$$
$$-\frac{f(\alpha)}{\sqrt{\varphi(\alpha)}}\,l\left(\frac{\Theta_1(\alpha)\sqrt{\varphi_1(\alpha)}+\Theta_2(\alpha)\sqrt{\varphi_2(\alpha)}}{\Theta_1(\alpha)\sqrt{\varphi_1(\alpha)}-\Theta_2(\alpha)\sqrt{\varphi_2(\alpha)}}\right)+C. \qquad (II)$$

2) Enthält die Grösse f(x) den Faktor $x-\alpha$, ist also $f(x)=(x-\alpha)F(x)$, so wird $f(\alpha)=0$, also erhält man aus (II):

$$m_1\varepsilon_1\psi(x_1)+m_2\varepsilon_2\psi(x_2)+\ldots+m_r\varepsilon_r\psi(x_r)=$$
$$K.\frac{F(x)}{\sqrt{\varphi(x)}}.\left(\frac{\Theta_1(x)\sqrt{\varphi_1(x)}+\Theta_2(x)\sqrt{\varphi_2(x)}}{\Theta_1(x)\sqrt{\varphi_1(x)}-\Theta_2(x)\sqrt{\varphi_2(x)}}\right)+C, \qquad (III)$$

worin $\psi(x)=\int\frac{F(x)\,\partial x}{\sqrt{\varphi(x)}}$, sonst aber dieselben Zeichen auch dieselbe Bedeutung wie in (II) haben.

Ist ferner $f(x)^2$ von niedererem Grade als $\varphi(x)$, so ist in (II) das erste Glied der zweiten Seite Null, da dann die dortige Grösse höchstens mit $\frac{1}{x^2}$ anfängt, so

dass alsdann nur das Uebrige stehen bleibt. Wäre dann zugleich wieder $f(x) = (x-\alpha)F(x)$, so fiele auch noch das zweite Glied weg, so dass nur C stehen bliebe.

Dass man durch mehrmalige Differentiation nach (α) in den Theoremen (I) etc. Integrale von der Form $\int \frac{f(x)\partial x}{(x-\alpha)^n \sqrt{\varphi(x)}}$ auf der ersten Seite erhalten kann, ist klar.

3) Wir haben im Seitherigen vorausgesetzt, man kenne die Koeffizienten $a_0, \ldots, c_m$, die, wenn einer $=1$ gesetzt wird, noch ihrer $m+n+1$ sind, und bestimme dann $x_1, \ldots, x_r$. Man kann nun aber auch umgekehrt die letzteren Grössen als gegeben ansehen und die ersten bestimmen.

Sey also zur Abkürzung $m+n+1=\varrho$, und nehmen wir $r \overline{\overline{>}} \varrho$ an, so kann man alle Grössen $a_0, \ldots, c_m$ bestimmen, wenn man ϱ der Grössen $x_1, \ldots, x_r$ als gegeben ansieht. Wählt man in (3) die Grössen ε nach Belieben gleich $+1$ oder -1, z. B. die ϱ' ersten $=+1$, die $\varrho-\varrho'$ folgenden $=-1$, so hat man zur Bestimmung von $a_0, \ldots, c_m$:

$$\left.\begin{array}{l}\Theta_1(x_1)\sqrt{\varphi_1(x_1)}=\Theta_2(x_1)\sqrt{\varphi_2(x_1)}, \ldots, \Theta_1(x_{\varrho'})\sqrt{\varphi_1(x_{\varrho'})}=\Theta_2(x_{\varrho'})\sqrt{\varphi_2(x_{\varrho'})},\\ \Theta_1(x_{\varrho'+1})\sqrt{\varphi_1(x_{\varrho'+1})}=-\Theta_2(x_{\varrho'+1})\sqrt{\varphi_2(x_{\varrho'+1})}, \ldots, \Theta_1(x_\varrho)\sqrt{\varphi_1(x_\varrho)}=\\ \qquad -\Theta_2(x_\varrho)\sqrt{\varphi_2(x_\varrho)}.\end{array}\right\}(6)$$

Was die Grössen $x_{\varrho+1}, \ldots, x_r$ anbelangt, so sind sie die Wurzeln der Gleichung

$$\frac{\Theta_1(x)^2\varphi_1(x)-\Theta_2(x)^2\varphi_2(x)}{(x-x_1)\ldots(x-x_\varrho)}=0, \qquad (7)$$

deren Grad $\overline{\overline{>}}\,1$ seyn muss. Bestimmt man für diese Wurzeln die Grössen ε aus (3), so heisst die erste Seite in (I):

$$\psi(x_1)+\ldots+\psi(x_{\varrho'})-\psi(x_{\varrho'+1})-\ldots-\psi(x_\varrho)+\varepsilon_{\varrho+1}\psi(x_{\varrho+1})+\ldots+\varepsilon_r\psi(x_r),$$

während die zweite natürlich ungeändert bleibt.

4) Als Beispiel hiezu wählen wir $\Theta_1(x)=(a_0+x^2)x$, $\Theta_2(x)=c_0$, $\varphi_1(x)=1$, $\varphi_2(x)=(1-x^2)(1-e^2x^2)$, $(e^2<1)$; die Grösse $\Theta_1(x)^2\varphi_1(x)-\Theta_2(x)^2\varphi_2(x)=(a_0+x^2)^2x^2-c_0^2(1-x^2)(1-e^2x^2)$ enthält alsdann nur gerade Potenzen von x, so dass sie die Form $(x^2-x_1^2)(x^2-x_2^2)(x^2-x_3^2)$ annimmt. Setzt man x_1, x_2 als gegeben, und zwischen 0 und 1 liegend voraus; setzt weiter in (7) den Nenner vom vierten Grade $=(x-x_1)(x+x_1)(x-x_2)(x+x_2)$ voraus, so ist diese Gleichung vom zweiten Grade und hat die Wurzeln $+x_3$ und $-x_3$. Da ausserdem aus $(a_0+x^2)^2x^2-c_0^2(1-x^2)(1-e^2x^2)=(x^2-x_1^2)(x^2-x_2^2)(x^2-x_3^2)$ folgt $(x_1x_2x_3)^2=c_0^2$, so ist $x_1x_2x_3=\pm c_0$, wo das Zeichen so gewählt werde, dass x_3 positiv sey. Wir wollen weiter annehmen, dass zu $+x_1$ und x_2 die Grösse $\varepsilon=-1$, zu $-x_1$ und $-x_2$ die $+1$ gehöre, so ist

$$(a_0+x_1^2)x_1+c_0\sqrt{\varphi(x_1)}=0,\ (a_0+x_2^2)x_2+c_0\sqrt{\varphi(x_2)}=0,\ \varphi(x)=(1-x^2)(1-e^2x^2),$$

woraus

$$a_0=\frac{x_2^3\sqrt{\varphi(x_1)}-x_1^3\sqrt{\varphi(x_2)}}{x_1\sqrt{\varphi(x_2)}-x_2\sqrt{\varphi(x_1)}}=-\frac{x_1x_2\sqrt{\varphi(x_1)\varphi(x_2)}+x_1^2+x_2^2-x_1^2x_2^2(1+e^2)}{1-e^2x_1^2x_2^2},$$

$$c_0=\frac{x_2x_1^3-x_1x_2^3}{x_1\sqrt{\varphi(x_2)}-x_2\sqrt{\varphi(x_1)}}=x_1x_2\frac{x_1\sqrt{\varphi(x_2)}+x_2\sqrt{\varphi(x_1)}}{1-e^2x_1^2x_2^2};$$

da hiernach $c_0>0$, so ist $x_3=\frac{c_0}{x_1x_2}=\frac{x_1\sqrt{\varphi(x_2)}+x_2\sqrt{\varphi(x_1)}}{1-e^2x_1^2x_2^2}$. Wir haben x_1, x_2 zwischen 0 und 1 vorausgesetzt; demnach lassen sich zwei Winkel φ_1, φ_2 zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ bestim-

men, so dass $\sin\varphi_1 = x_1$, $\sin\varphi_2 = x_2$; alsdann ist $x_3 =$

$$\frac{\sin\varphi_1 \cos\varphi_2 \sqrt{1-e^2\sin^2\varphi_2} + \sin\varphi_2 \cos\varphi_1 \sqrt{1-e^2\sin^2\varphi_1}}{1-e^2\sin^2\varphi_1 \sin^2\varphi_2};$$

daraus folgt leicht

$$1-x_3^2 = \left(\frac{\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2\sqrt{(1-e^2\sin^2\varphi_1)(1-e^2\sin^2\varphi_2)}}{1-e^2\sin^2\varphi_1\sin^2\varphi_2}\right)^2,$$

so dass $1-x_3^2 > 0$ ist; demnach, da x_3 positiv, liegt auch x_3 zwischen 0 und 1. Setzt man also $x_3 = \sin\varphi_3$, so ist

$$\sin\varphi_3 = \frac{\sin\varphi_1\cos\varphi_2\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi_2} + \sin\varphi_2\cos\varphi_1\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi_1}}{1-e^2\sin^2\varphi_1\sin^2\varphi_2}, \qquad (a)$$

$$\cos^2\varphi_3 = \left(\frac{\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2\sqrt{(1-e^2\sin^2\varphi_1)(1-e^2\sin^2\varphi_2)}}{1-e^2\sin^2\varphi_1\sin^2\varphi_2}\right)^2.$$

Was nun ε_3 (das zu x_3), ε'_3 (das zu $-x_3$ gehört) anbelangt, so ist aus (S):

$$(a_0+x_3^2)x_3 = \varepsilon_3 c_0\sqrt{\varphi(x_3)},\ -(a_0+x_3^2)x_3 = \varepsilon'_3 c_0\sqrt{\varphi(x_3)}, \text{ also } \varepsilon'_3 = -\varepsilon_3.$$

Da x_3, $c_0\sqrt{\varphi(x_3)}$ positiv sind, so ist $\varepsilon_3 = +1$, wenn $a_0+x_3^2>0$, gleich -1, wenn $a_0+x_3^2<0$. Aber

$$a_0+x_3^2 = \frac{x_1 x_2}{(1-e^2x_1^2x_2^2)^2}\Big\{(1+e^2x_1^2x_2^2)\sqrt{\varphi(x_1)\varphi(x_2)} - x_1x_2[(1-e^2x_1^2)(1-e^2x_2^2)$$
$$+e^2(1-x_1^2)(1-x_2^2)]\Big\},$$

so dass es sich bloss um das Zeichen der eingeklammerten Grösse handelt. Dieselbe ist aber

$$(1+e^2\sin^2\varphi_1\sin^2\varphi_2)\cos\varphi_1\cos\varphi_2\sqrt{(1-e^2\sin^2\varphi_1)(1-e^2\sin^2\varphi_2)}$$
$$-\sin\varphi_1\sin\varphi_2[(1-e^2\sin^2\varphi_1)(1-e^2\sin^2\varphi_2)+e^2\cos^2\varphi_1\cos^2\varphi_2] = (1+e^2\sin^2\varphi_1\sin^2\varphi_2)$$
$$[\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2\sqrt{(1-e^2\sin^2\varphi_1)(1-e^2\sin^2\varphi_2)}]\sqrt{(1-e^2\sin^2\varphi_1)(1-e^2\sin^2\varphi_2)}$$
$$+e^2\sin^3\varphi_1\sin^3\varphi_2(1-e^2\sin^2\varphi_1)(1-e^2\sin^2\varphi_2) - e^2\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cos^2\varphi_1\cos^2\varphi_2$$
$$= (1+e^2\sin^2\varphi_1\sin^2\varphi_2)\sqrt{(1-e^2\sin^2\varphi_1)(1-e^2\sin^2\varphi_2)}[\cos\varphi_1\cos\varphi_2$$
$$-\sin\varphi_1\sin\varphi_2\sqrt{(1-e^2\sin^2\varphi_1)(1-e^2\sin^2\varphi_2)}]$$
$$+e^2\sin\varphi_1\sin\varphi_2[\sin\varphi_1\sin\varphi_2\sqrt{(1-e^2\sin^2\varphi_1)(1-e^2\sin^2\varphi_2)}$$
$$+\cos\varphi_1\cos\varphi_2][\sin\varphi_1\sin\varphi_2\sqrt{(1-e^2\sin^2\varphi_1)(1-e^2\sin^2\varphi_2)} - \cos\varphi_1\cos\varphi_2]$$
$$= [(1+e^2\sin^2\varphi_1\sin^2\varphi_2)\sqrt{(1-e^2\sin^2\varphi_1)(1-e^2\sin^2\varphi_2)}$$
$$-e^2\sin^2\varphi_1\sin^2\varphi_2\sqrt{(1-e^2\sin^2\varphi_1)(1-e^2\sin^2\varphi_2)} - e^2\sin\varphi_1\sin\varphi_2\cos\varphi_1\cos\varphi_2]$$
$$[\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2\sqrt{(1-e^2\sin^2\varphi_1)(1-e^2\sin^2\varphi_2)}].$$

Aber aus (a) folgt

$$\cos\varphi_3 = \frac{\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2\sqrt{(1-e^2\sin^2\varphi_1)(1-e^2\sin^2\varphi_2)}}{1-e^2\sin^2\varphi_1\sin^2\varphi_2}, \qquad (a')$$

da für kleine φ_1, φ_2 auch φ_3 klein, also $\cos\varphi_3>0$, was mit der zweiten Seite wirklich der Fall ist. Da ferner in dem so eben erhaltenen Ausdruck der erste Faktor $=$

$$\sqrt{(1-e^2\sin^2\varphi_1)(1-e^2\sin^2\varphi_2)} - e^2\sin\varphi_1\cos\varphi_1\sin\varphi_2\cos\varphi_2$$

und dieser immer positiv ist,* so hat also $a_0+x_3^2$ dasselbe Zeichen, wie $\cos\varphi_3$, bestimmt aus (a'), wo wir φ_3 von 0 bis π gehen lassen wollen. Ist also $\cos\varphi_3>0$, so ist $\varepsilon_3 = +1$, für $\cos\varphi_3<0$, ist $\varepsilon_3 = -1$. Sind φ_1, φ_2 nahe an 0, so hat das Erstere, für φ_1, φ_2 nahe an $\frac{\pi}{2}$ dagegen das Letztere Statt.

---

* Denn $\left[\sqrt{(1-e^2\sin^2\varphi_1)(1-e^2\sin^2\varphi_2)}\right]^2 - [e^2\sin\varphi_1\cos\varphi_1\sin\varphi_2\cos\varphi_2]^2 =$ $= (1-e^2\sin^2\varphi_1\sin^2\varphi_2)[(1-e^2\sin^2\varphi_1)(1-e^2\sin^2\varphi_2)+e^2(1-e^2)\sin^2\varphi_1\sin^2\varphi_2]$, also positiv, woraus die Behauptung folgt.

Setzen wir nun in (I) $f(x) = x - \alpha$, und beachten das in Nr. 2 Gesagte, ferner dass $\psi(x) = \int \frac{\partial x}{\sqrt{\varphi(x)}} = \int \frac{\partial \varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}$, so ist

$$-\psi(x_1) + \psi(-x_1) - \psi(x_2) + \psi(-x_2) + \psi(x_3) - \psi(-x_3) = C \ (\cos\varphi_3 > 0),$$
$$-\psi(x_1) + \psi(-x_1) - \psi(x_2) + \psi(\quad x_3) - \psi(x_3) + \psi(-x_3) = C \ (\cos\varphi_3 < 0).$$

Da das Erstere für $x_1 = x_2 = 0$ stattfindet und dann auch $x_3 = 0$ ist; das Letztere für $x_1 = x_2 = 1$, wo abermals $x_3 = 0$; da ferner C von x_1, x_2, x_3 unabhängig, so ist auch:

$$-\psi(x_1) + \psi(0) + \psi(-x_1) - \psi(\quad 0) - \psi(x_2) + \psi(0) + \psi(-x_2) - \psi(-0) + \psi(x_3)$$
$$-\psi(0) - \psi(-x_3) + \psi(-0) = 0,$$

d. h. da $\psi(x) - \psi(0) = \int_0^\varphi \frac{\partial \varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}} = F(\varphi, e)$, $\psi(-x) - \psi(-0) = -F(\varphi, e)$:

$$-2F(\varphi_1, e) - 2F(\varphi_2, e) + 2F(\varphi_3, e) = 0, \quad F(\varphi_1, e) + F(\varphi_2, e) = F(\varphi_3, e), \ \cos\varphi_3 > 0.$$

Im andern Falle setzt man $x_1 = x_2 = 1$, $x_3 = 0$ und hat:

$$-\psi(x_1) + \psi(1) + \psi(-x_1) - \psi(-1) - \ldots - \psi(x_3) + \psi(0) + \psi(-x_3) - \psi(0) = 0,$$

d. h. da $\psi(1) - \psi(x) = \int_\varphi^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial \varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}} = F\left(\frac{\pi}{2}, e\right) - F(\varphi, e)$, $\psi(-1) - \psi(-x) = -F\left(\frac{\pi}{2}, e\right) + F(\varphi, e)$:

$$2F\left(\frac{\pi}{2}, e\right) - 2F(\varphi_1, e) + 2F\left(\frac{\pi}{2}, e\right) - 2F(\varphi_2, e) - 2F(\varphi'_3, e) = 0,$$

wo φ'_3 aus der Gleichung $x_3 = \sin\varphi'_3$ bestimmt ist (natürlich φ'_3 zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$). Aber da $\cos\varphi_3 < 0$, so ist jetzt $\varphi'_3 = \pi - \varphi_3$ und $F(\varphi'_3, e) = F(\pi - \varphi_3, e) = \int_0^{\pi-\varphi_3} \frac{\partial \varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}$

$$= \int_{\varphi_3}^{\pi} \frac{\partial \varphi}{\sqrt{1 - e^2\sin^2\varphi}} = \int_0^{\pi} \frac{\partial \varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}} - \int_0^{\varphi_3} \frac{\partial \varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}} = 2F\left(\frac{\pi}{2}, e\right) - F(\varphi_3, 0),$$

also hat man wieder $F(\varphi_1, e) + F(\varphi_2, e) = F(\varphi_3, 0)$. Bestimmt man demnach φ_3 zwischen 0 und π aus (a'), und liegen φ_1, φ_2 zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$, so ist immer

$$F(\varphi_1, e) + F(\varphi_2, e) = F(\varphi_3, e). \qquad \text{(A)}$$

Man setze weiter in (I): $f(x) = x^2(x - \alpha)$, so ist $\psi(x) = \int \frac{x^2 \partial x}{\sqrt{\varphi(x)}} = \int \frac{\sin^2\varphi \, \partial \varphi}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}$, also $\psi(x) - \psi(0) = \frac{1}{e^2}[F(\varphi, e) - E(\varphi, e)]$, $\psi(1) - \psi(x) = \frac{1}{e^2}\left[F\left(\frac{\pi}{2}, e\right) - E\left(\frac{\pi}{2}, e\right) - F(\varphi, e) + E(\varphi, e)\right]$. Da ferner auf der zweiten Seite der Gleichung (I) die erste Grösse =

$$\frac{x^2}{\sqrt{\varphi(x)}} l\left(\frac{(a_0 + x^2)x + c_0\sqrt{\varphi(x)}}{(a_0 + x^2)x - c_0\sqrt{\varphi(x)}}\right) = \frac{2x^2}{\sqrt{\varphi(x)}}\left[\frac{c_0\sqrt{\varphi(x)}}{(a_0 + x^2)x} + \frac{1}{3}\left(\frac{c_0\sqrt{\varphi(x)}}{(a_0 + x^2)x}\right)^3 + \ldots\right]$$
$$= \frac{2c_0 x}{a_0 + x^2} + \frac{2}{3}\frac{c_0{}^3\varphi(x)}{x(a_0 + x^2)^3} + \ldots,$$

so wird, wenn man diese Grösse nach fallenden Potenzen von x entwickelt, der Koeffizient von $\frac{1}{x}$ gleich $2c_0$ seyn. Ganz in derselben Weise, wie oben, wird man nun C eliminiren, wobei man nun zu beachten hat, dass für $x_1 = x_2 = 0$ auch $c_0 = 0$; für $x_1 = x_2 = 1$ eben so $c_0 = 0$, und dann erhalten:

$$E(\varphi_1, e) + E(\varphi_2, e) = E(\varphi_3, e) + e^2\sin\varphi_1\sin\varphi_2\sin\varphi_3. \qquad \text{(B)}$$

Setzt man endlich in (I) $f(x) = 1$, beachtet §. 102, so erhält man für $\alpha^2 > 1$:

$$\Pi\left(\varphi_1, -\frac{1}{\alpha^2}, e\right) + \Pi\left(\varphi_2, -\frac{1}{\alpha^2}, e\right) = \Pi\left(\varphi_3, -\frac{1}{\alpha^2}, e\right)$$

$$-\frac{\alpha}{2\sqrt{(1-\alpha^2)(1-e^2\alpha^2)}}\, l\left(\frac{(a_0+\alpha^2)\alpha + c_0\sqrt{(1-\alpha^2)(1-e^2\alpha^2)}}{(a_0+\alpha^2)\alpha - c_0\sqrt{(1-\alpha^2)(1-e^2\alpha^2)}}\right), \qquad \text{(C)}$$

was man unter dieser Form lassen kann, wenn $e^2\alpha^2 > 1$; für $e^2\alpha^2 < 1$ ist dagegen die zweite Seite gleich

$$\Pi\left(\varphi_3, -\frac{1}{\alpha^2}, e\right) - \frac{\alpha}{\sqrt{(\alpha^2-1)(1-e^2\alpha^2)}} \operatorname{arc}\left(\operatorname{tg} = \frac{c_0\sqrt{(\alpha^2-1)(1-e^2\alpha^2)}}{(a_0+\alpha^2)\alpha}\right).$$

XIII. Integration der Differenzengleichungen.

Ist y eine Funktion von x (gleich f(x)), so ist $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$, und wenn $\Sigma F(x) = y$, so muss $\Delta y = F(x)$ seyn. (Vergl. meine „Grundzüge der alg. Analysis" Seite 78 ff.). Wir haben bereits in der Differenzenrechnung die Grösse $\Sigma F(x)$ näher betrachtet und wollen hier noch Einiges über die Integration der Differenzengleichungen zufügen. Vorher aber bemerken wir noch, dass

$$\Sigma PQ = Q\Sigma P - \Sigma[\Delta Q \,.\, \Sigma(P + \Delta P)]. \qquad \text{(a)}$$

1) Sey die Gleichung $\Delta y + Xy + X_1 = 0$ vorgelegt, worin X, X_1 Funktionen von x sind (vergl. §. 66). Wir bemerken dabei, dass wir x als ein (positives) Vielfaches von Δx ansehen, etwa $x = n\Delta x$ und wenn Z eine Funktion von x ist, durch $Z_0, Z_1, \ldots, Z_n$ die Werthe von Z bezeichnen, die man erhält, wenn man $x = 0, \Delta x, 2\Delta x, \ldots, n\Delta x$ setzt Man setze nun $y = uv$, also $\Delta y = u\Delta v + v\Delta u + \Delta u \Delta v$, so wird die vorgelegte Gleichung zu $v(\Delta u + Xu) + (u + \Delta u)\Delta v + X_1 = 0$, so dass, wenn man u aus $\Delta u + Xu = 0$ bestimmt. nothwendig $\Delta v = -\frac{X_1}{u + \Delta u}$, $v = -\Sigma\frac{X_1}{u+\Delta u}$ seyn wird. Setzt man aber $u = e^z$, so ist $\Delta u = e^z(e^{\Delta z} - 1)$, also $e^z(e^{\Delta z} - 1) + Xe^z = 0$, d. h. $e^{\Delta z} - 1 + X = 0$, $e^{\Delta z} = 1 - X$, $\Delta z = l(1 - X)$, $z = \Sigma l(1 - X)$. Nun ist aber leicht ersichtlich, dass $\Sigma l(1 - X) = l(1 - X_0) + l(1 - X_1) + \ldots + l(1 - X_{n-1})$, also ist $u = e^z = [1 - X]_0^{n-1}$, wenn wir durch $[1 - X]_0^{n-1}$ das Produkt $(1 - X_0)(1 - X_1)\ldots(1 - X_{n-1})$ bezeichnen. Alsdann ist $u + \Delta u = [1 - X]_0^n$, und mithin, wenn man beachtet, dass zu $\Sigma l(1 - X)$ noch eine Grösse P zuzufügen ist, die sich nicht ändert, wenn x um Δx sich ändert, dass e^P in derselben Lage ist, also eigentlich: $u = P[1 - X]_0^{n-1}$, $v = -\Sigma\frac{X_1}{P[1-X]_0^n} + P'$, so ist $y = [1 - X]_0^{n-1}\left(P - \Sigma\frac{X_1}{[1-X]_0^n}\right)$, wenn man PP' durch P bezeichnet („Grundzüge" S. 85). Also endlich hat man aus

$$\Delta y + Xy + X_1 = 0 : y = [1 - X]_0^{n-1}\left(P - \Sigma\frac{X_1}{[1-X]_0^n}\right), \; x = n\Delta x. \qquad \text{(b)}$$

Als Anwendung hievon wollen wir die Entwicklung von $\frac{\partial^n \operatorname{arc}(\sin = x)}{\partial x^n}$ betrachten. Aus §. 10, V ist leicht zu schliessen, es sey für $z = \operatorname{arc}(\sin = x)$:

$$\frac{\partial^{n+1} z}{\partial x^{n+1}} = \frac{1.2\ldots n}{(1-x^2)^{\frac{2n+1}{2}}}\left[A_n x^n + B_n x^{n-2} + C_n x^{n-4} + \ldots\right], \qquad (c)$$

worin A_n, B_n, ... noch zu bestimmende Konstanten sind. Man erhält hieraus durch Differentiation:

$$\frac{\partial^{n+2} z}{\partial x^{n+2}} = \frac{1.2\ldots(n+1)}{(1-x^2)^{\frac{2n+3}{2}}}\Bigg[\frac{n+1}{n+1}A_n x^{n+1} + \left(\frac{n+3}{n+1}B_n + \frac{n}{n+1}A_n\right)x^{n-1} + \left(\frac{n+5}{n+1}C_n + \frac{n-2}{n+1}B_n\right)x^{n-3} + \left(\frac{n+7}{n+1}D_n + \frac{n-4}{n+1}C_n\right)x^{n-5} + \ldots\Bigg],$$

wodurch, da $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{1}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$, $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = \frac{2x^2+1}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}}$, $\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} = \frac{6x^3+9x}{(1-x^2)^{\frac{7}{2}}}$, ..., das Fortschreitungsgesetz in den Potenzen von x gerechtfertigt ist. Setzt man, gemäss (c):

$$\frac{\partial^{n+2} z}{\partial x^{n+2}} = \frac{1.2\,.\,.(n+1)}{(1-x^2)^{\frac{2n+3}{2}}}\left[A_{n+1} x^{n+1} + B_{n+1} x^{n-1} + C_{n+1} x^{n-3} + \ldots\right],$$

so muss also:

$$\left.\begin{aligned} A_{n+1} &= \frac{n+1}{n+1}A_n, \\ B_{n+1} &= \frac{n+3}{n+1}B_n + \frac{n}{n+1}A_n, \\ C_{n+1} &= \frac{n+5}{n+1}C_n + \frac{n-2}{n+1}B_n, \\ D_{n+1} &= \frac{n+7}{n+1}D_n + \frac{n-4}{n+1}C_n, \end{aligned}\right\} \quad (c')$$

seyn, aus welchen Gleichungen A_n, B_n, ... zu ermitteln sind. Die erste ist $A_{n+1} = A_n$. Setzt man hier $A_n = f(n) = y$, $\Delta x = 1$, so ist $A_{n+1} = f(n+1) = y + \Delta y$, so dass diese Gleichung ist $y + \Delta y = y$, $\Delta y = 0$, $y = P$, wo P von n unabhängig ist (d. h. sich nicht ändert, wenn n zu 1, 2, .. wird). Für $n = 1$ $\left(\text{d. h. } \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)$ ist aber $A_1 = 1$, also $P = 1$, und $A_n = 1$.

Setzt man nun in der zweiten Gleichung (c′) $B_n = y$, $B_{n+1} = y + \Delta y$, so ist sie $y + \Delta y = \frac{n+3}{n+1}y + \frac{n}{n+1}$, d. h. nach (b):

$$\Delta y - \frac{2}{n+1}y - \frac{n}{n+1} = 0,\quad y = \left[1 + \frac{2}{n+1}\right]_0^{n-1}\left(P + \Sigma\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{\left[1+\frac{2}{n+1}\right]_0^n}\right)$$

$$= \frac{3.4\ldots.(n+2)}{1.2\ldots\ldots n}\left(P + \Sigma\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1.2\ldots n+1}{3.4\ldots(n+3)}\right)$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)}{1.2}\left(P + \Sigma\frac{1.2.n}{(n+1)\ldots(n+3)}\right).$$

Aber nach (a):

$$\Sigma\frac{n}{(n+1)\ldots(n+3)} = n\,\Sigma\frac{1}{(n+1)\ldots(n+3)} - \Sigma\left[\Delta n\,\Sigma\frac{1}{(n+2)\ldots(n+4)}\right] =$$

$$-\frac{1}{2}\,\frac{n}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{2}\,\Sigma\frac{1}{(n+2)(n+3)} = -\frac{1}{2}\,\frac{n}{(n+1)(n+2)} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{n+2} =$$

$$-\frac{1}{2}\,\frac{2n+1}{(n+1)(n+2)},$$

demnach $$B_n = \frac{(n+1)(n+2)}{1.2}\left(P - \frac{2n+1}{(n+1)(n+2)}\right),$$

und da für $n=1$, $B_n = 0$, so muss $P = \frac{1}{2}$ seyn, so dass $B_n = \frac{(n+1)(n+2)}{1.2}\frac{n^2-n}{2(n+1)(n+2)}$ $= \frac{1}{2}\cdot\frac{n(n-1)}{1.2}$ ist. Setzt man jetzt wieder in der dritten Gleichung (c'): $C_n = y$, so ist $C_{n+1} = y + \Delta y$ und man hat:

$$\Delta y - \frac{4}{n+1}y - \frac{n-2}{n+1}\cdot\frac{1}{2}\frac{n(n-1)}{1.2} = 0,$$

$$y = \left[1+\frac{4}{n+1}\right]_0^{n-1}\left(P + \Sigma\frac{1}{2}\cdot\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.n+1)}\cdot\frac{1}{\left[1+\frac{4}{n+1}\right]_0^n}\right)$$

$$= \frac{(n+1)\ldots(n+4)}{1.2..4}\left(P + \Sigma\frac{1}{2}\cdot\frac{1.2..4}{1.2}\frac{n(n-1)(n-2)}{(n+1)..(n+5)}\right).$$

Nun findet sich aber leicht, dass $\Sigma\frac{n(n-1)..(n-2)}{(n+1)\ldots(n+5)} = \frac{1}{2.2.4}\frac{n(n-1)..(n-3)}{(n+1)\ldots(n+4)}$, so dass, da für $n=1: C_n = 0$:

$$C_n = \frac{(n+1)..(n+4)}{1..4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1.2..4}{1.2}\cdot\frac{n\ldots(n-3)}{(n+1)..(n+4)}\cdot\frac{1}{2.2.4} = \frac{1.3}{2.4}\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}.$$

Ferner ist dann für $D_n = y$:

$$\Delta y - \frac{6}{n+1}y - \frac{n-4}{n+1}\cdot\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{n(n-1)..(n-3)}{1..4} = 0,$$

$$y = \left[1+\frac{6}{n+1}\right]_0^{n-1}\left(P + \frac{1.3}{2.4}\Sigma\frac{n-4}{n+1}\cdot\frac{n(n-1)..(n-3)}{1..4}\cdot\frac{1}{\left[1+\frac{6}{n+1}\right]_0^n}\right)$$

$$= \frac{(n+1)\ldots(n+6)}{1.2..6}\left(P + \frac{1.3}{2.4}\Sigma\frac{1.2\ldots6}{1.2..4}\frac{n(n-1)..(n-4)}{(n+1)\ldots(n+7)}\right).$$

Aber man hat allgemein

$$\Sigma\frac{n(n-1)\ldots(n-2r)}{(n+1)\ldots\ldots(n+2r+3)} = \frac{1}{4(r+1)^2}\cdot\frac{n(n-1)\ldots(n-2r-1)}{(n+1)\ldots\ldots(n+2r+2)}, \tag{d}$$

so dass $$D_n = \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{n(n-1)\ldots(n-5)}{1.2\ldots.6}\ldots$$

Eben so für $E_n = y$:

$$y - \frac{8}{n+1}\Delta y - \frac{n-6}{n+1}\cdot\frac{1.3.5}{2.4.6}\frac{n(n-1)..(n-5)}{1\ldots6} = 0,$$

$$y = \frac{(n+1)..(n+8)}{1\ldots8}\left(P + \frac{1.3.5}{2.4.6}\Sigma\frac{1.2\ldots8}{1\ldots6}\cdot\frac{n(n-1)\ldots(n-6)}{(n+1)\ldots.(n+9)}\right),$$

d. h. $$E_n = \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\cdot\frac{n(n-1)\ldots(n-7)}{1.2\ldots.8}, \text{ u. s. w., so dass}$$

$$\frac{\partial^{n+1}\operatorname{arc}(\sin = x)}{\partial x^{n+1}} = \frac{1.2\ldots n}{(1-x^2)^{\frac{2n+1}{2}}}\left[x^n + \frac{1}{2}\frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2} + \frac{1.3}{2.4}\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}x^{n-4}\right.$$
$$\left. + \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{n(n-1)..(n-5)}{1\ldots.6}x^{n-6} + \ldots\right],$$

bis die Reihe von selbst schliesst.

2) Legen wir uns die allgemeinere Gleichung

$$P_n\Delta^n y + P_{n-1}\Delta^{n-1}y + \ldots. + P_1\Delta y + P_0 y = 0 \tag{e}$$

vor, so kann man leicht zeigen, dass wenn $y_1, \ldots, y_n$ als bekannte Funktionen von x ihr genügen, auch die Grösse $C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n$ derselben genügt, wenn $\Delta C_1, \ldots, \Delta C_n$ sämmtlich Null sind.

Denken wir uns nun, die Grössen P in (e) seyen sämmtlich konstant nach x, man habe also die Gleichung

$$\Delta^n y + a_1 \Delta^{n-1} y + \ldots + a_{n-1} \Delta y + a_n y = 0, \qquad \text{(f)}$$

so setze man $y = m^x$, also $\Delta y = m^{x+\Delta x} - m^x = m^x (m^{\Delta x} - 1), \ldots\ldots, \Delta^r y = m^x (m^{\Delta x} - 1)^r$, und erhält, wenn man diese Werthe in (f) einsetzt, dabei den gemeinschaftlichen Faktor m^x sofort weglässt:

$$(m^{\Delta x} - 1)^n + a_1 (m^{\Delta x} - 1)^{n-1} + \ldots + a_{n-1} (m^{\Delta x} - 1) + a_n = 0. \qquad (f_1)$$

welche Gleichung für $m^{\Delta x}$, also auch für m, im Allgemeinen n Werthe liefern wird.

Sind diese $m_1, \ldots, m_n$, so genügt der (f):

$$y = C_1 m_1^x + C_2 m_2^x + \ldots + C_n m_n^x. \qquad (f_2)$$

Wäre $m_2 = m_1$, so fände man, wie in §. 75, dass statt der zwei ersten Glieder in (f′) zu setzen ist: $C_1 m_1^x + C_2 x m_1^{x-1}$; für $m_1 = m_2 = m_3$ statt der drei ersten: $C_1 m_1^x + C_2 x m_1^{x-1} + C_2 x (x-1) m_1^{x-2}$, u. s. w.

Die Gleichung (f) kann auch anders geschrieben werden. Bezeichnet man durch y_x, $y_{x+\Delta x}, \ldots, y_{x+n\Delta x}$ die Werthe von y, wenn man darin $x, x+\Delta x, \ldots, x+n\Delta x$ für x setzt, so ist („Grundzüge" S. 31): $\Delta^r y = y_{x+r\Delta x} - \frac{r}{1} y_{x+(r-1)\Delta x} + \ldots \pm y_x$, so dass die (f) die Form

$$y_{x+n\Delta x} + b_1 y_{x+(n-1)\Delta x} + \ldots + b_{n-1} y_{x+\Delta x} + b_n y = 0 \qquad \text{(f)}$$

annimmt. Die (f_1) wird jetzt:

$$m^{n\Delta x} + b_1 m^{(n-1)\Delta x} + \ldots + b_{n-1} m^{\Delta x} + b_n = 0 \qquad (f'_1)$$

und liefert die n Werthe von $m^{\Delta x}$, d. h. von m.

Sey ferner f(x) eine bekannte Funktion von x, und, wenn man die so eben gebrauchte Bezeichnung beibehält, die Gleichung

$$y_{x+n\Delta x} + a_1 f(x+r\Delta x) y_{x+(n-1)\Delta x} + a_2 f(x+r\Delta x) f(x+\overline{r-1}\Delta x) y_{x+(n-2)\Delta x} + \ldots$$
$$\ldots + a_{n-1} f(x+r\Delta x) f(x+\overline{r-1}\Delta x) \ldots f(x+\overline{r-n+2}\Delta x) y_{x+\Delta x}$$
$$+ a_n f(x+r\Delta x) \ldots f(x+\overline{r-n+1}\Delta x) y_x = 0 \qquad (g)$$

vorgelegt. Man setze hier $y = m^x f(x+\overline{r-n}\Delta x) f(x+\overline{r-n-1}\Delta x) \ldots\ldots f(x+\overline{r-n-\frac{x}{\Delta x}+1}\Delta x)$, wo wir x als ein Vielfaches von Δx auffassen, so ist, wenn man den gemeinschaftlichen Faktor weglässt: *

$$m^{n\Delta x} + a_1 m^{(n-1)\Delta x} + \ldots + a_{n-1} m^{\Delta x} + a_n = 0, \qquad (g_1)$$

woraus wieder n Werthe von m folgen. Alsdann ist

---

* Nämlich $f(x+r\Delta x)(f(x+\overline{r-1}\Delta x) \ldots f(x+\overline{r-n-\frac{x}{\Delta x}-1}\Delta x) m^x$.

$$y = (C_1 m_1^x + C_2 m_2^x + \ldots + C_n m_n^x) f(x + \overline{r-n\,\Delta x}) f(x + \overline{r-n-1\,\Delta x}) \ldots f(x + \overline{r+n-\frac{x}{\Delta x}+1\,\Delta x})$$

d. h. $$y = (C_1 m_1^x + C_2 m_2^x + \ldots + C_n m_n^x) f(x + \overline{r-n\,\Delta x}) f(x + \overline{r-n+1\,\Delta x}) \ldots f(\overline{r-n+1\,\Delta x}), \qquad (g_2)$$

wo x als Vielfaches von Δx aufgefasst ist.

Man habe endlich die Differenzengleichung

$$X_0 \Delta^n y + X_1 \Delta^{n-1} y + \ldots + X_{n-1} \Delta y + X_n y = 0, \qquad (h)$$

worin

$$X_0 = a_0 + b_0 x + c_0 x(x-1) + d_0 x(x-1)(x-2) + \ldots,$$
$$X_1 = a_1 + b_1 x + c_1 x(x-1) + d_1 x(x-1)(x-2) + \ldots,$$
$$\vdots$$
$$X_n = a_n + b_n x + c_n x(x-1) + d_n x(x-1)(x-2) + \ldots,$$

und $a_0, \ldots, a_n, \ldots$ konstante Koeffizienten sind. Man setze $y = \int_\alpha^\beta u^x v\, \partial u$, wo α, β von u und x unabhängig seyn sollen, und v eine von x unabhängige Funktion von u ist. Alsdann hat man

$$\Delta y = \int_\alpha^\beta u^x (u^{\Delta x} - 1) v\, \partial u,\ \Delta^2 y = \int_\alpha^\beta u^x (u^{\Delta x} - 1)^2 v\, \partial u, \ldots, \Delta^n y = \int_\alpha^\beta u^x (u^{\Delta x} - 1)^n v\, \partial u,$$

so dass, wenn man in (h) einsetzt, man erhält:

$$\int_\alpha^\beta v [M u^x + N x u^x + P x(x-1) u^x + \ldots]\, \partial u = 0, \qquad (h')$$

worin

$$\left.\begin{aligned} M &= a_n + a_{n-1}(u^{\Delta x} - 1) + a_{n-2}(u^{\Delta x} - 1)^2 + \ldots + a_0 (u^{\Delta x} - 1)^n, \\ N &= b_n + b_{n-1}(u^{\Delta x} - 1) + b_{n-2}(u^{\Delta x} - 1)^2 + \ldots + b_0 (u^{\Delta x} - 1)^n, \\ P &= c_n + c_{n-1}(u^{\Delta x} - 1) + c_{n-2}(u^{\Delta x} - 1)^2 + \ldots + c_0 (u^{\Delta x} - 1)^n, \end{aligned}\right\} (h'')$$

Setzt man zur Abkürzung $u^x = z$, so ist $x u^x = u \frac{\partial z}{\partial u}$, $x(x-1) u^x = u^2 \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}, \ldots$ .., so dass die (h′) ist

$$\int_\alpha^\beta v \left(M z + N u \frac{\partial z}{\partial u} + P u^2 \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \ldots\right) \partial u = 0.$$

Diese Gleichung lässt sich, der Zerfällung in §. 85 gemäss, auch in folgender Weise schreiben:

$$\int_\alpha^\beta z \left[M v - \frac{\partial}{\partial u}(N u v) + \frac{\partial^2}{\partial u^2}(P u^2 v) - \ldots\right] \partial u$$
$$+ \left\{ \left[N u v - \frac{\partial}{\partial u}(P u^2 v) + \frac{\partial^2}{\partial u^2}(Q u^3 v) - \ldots\right] z \atop + \left[P u^2 v \frac{\partial}{\partial u}(Q u^3 v) + \ldots\ldots\right] \frac{\partial z}{\partial u} \right\}_\alpha^\beta = 0, \qquad (i)$$

worin die Anhängung der Zeiger α, β, die durch die Gleichung $U_\alpha^\beta = U_{u=\beta} - U_{u=\alpha}$ angegebene Bedeutung haben soll.

Bestimmt man hier v aus der Differentialgleichung

$$Mv - \frac{\partial}{\partial u}(Nuv) + \frac{\partial^2}{\partial u^2}(Pu^2 v) - \ldots\ldots = 0, \qquad (i')$$

so gibt dann, wenn man den Werth von v in den zweiten Theil von (i) einsetzt, diese Gleichung die Werthe von α und β.

3) Kann man die Gleichung (e) integriren und erhält als allgemeines Integral

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n, \qquad (e')$$

so kann man auch die Gleichung

$$P_n \Delta^n y + P_{n-1} \Delta^{n-1} y + \ldots + P_1 \Delta y + P_0 y = Q, \qquad (k)$$

worin Q eine Funktion von x ist, integriren (§. 80). Bestimmt man nämlich aus den Gleichungen

$$\begin{aligned} &(y_1 + \Delta y_1)\Delta X_1 + (y_2 + \Delta y_2)\Delta X_2 + \ldots + (y_n + \Delta y_n)\Delta X_n = 0 \\ &\Delta(y_1 + \Delta y_1)\Delta X_1 + \Delta(y_2 + \Delta y_2)\Delta X_2 + \ldots + \Delta(y_n + \Delta y_n)\Delta X_n = 0, \\ &\qquad\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (k') \\ &\Delta^{n-2}(y_1 + \Delta y_1)\Delta X_1 + \Delta^{n-2}(y_2 + \Delta y_2)\Delta X_2 + \ldots + \Delta^{n-2}(y_n + \Delta y_n)\Delta X_n = 0, \\ &\Delta^{n-1}(y_1 + \Delta y_1)\Delta X_1 + \Delta^{n-1}(y_2 + \Delta y_2)\Delta X_2 + \ldots + \Delta^{n-1}(y_n + \Delta y_n)\Delta X_n = Q \end{aligned}$$

die Grösse $X_1, \ldots, X_n$, so genügt der (k):

$$y = (X_1 + C_1)y_1 + (X_2 + C_2)y_2 + \ldots + (X_n + C_n)y_n. \qquad (k'')$$

Zwei Beispiele mögen als Anwendung dienen.

4) Will man den Bruch $\frac{5+3x}{1-2x+7x^2}$ in eine Reihe von der Form $A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots$ entwickeln, so hat man („Grundzüge" S. 74): $7A_n - 2A_{n+1} + A_{n+2} = 0$, wie man auch leicht direkt findet, wobei aber $n \overline{\gtrless} 2$ seyn muss. Ist in Nr. 2 das dortige $x = n$, $\Delta x = 1$, $n = 2$ und man setzt $y = A_n$, so ist die Gleichung (f'): $y_{n+2} - 2y_{n+1} + 7y_n = 0$, während die ($f'_1$) gibt:

$$m^2 - 2m + 7 = 0, \; m = 1 \pm i\sqrt{6}, \; y_n = C_1(1 + i\sqrt{6})^n + C_2(1 - i\sqrt{6})^n.$$

Aber $1 \pm i\sqrt{6} = \sqrt{7}(\cos\alpha \pm i\sin\alpha)$, wo $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{7}}$, $\sin\alpha = \sqrt{\frac{6}{7}}$ mithin $(1 \pm i\sqrt{6})^n = (\sqrt{7})^n(\cos n\alpha \pm i\sin\alpha)$, so dass man, haben wir:

$$y = (\sqrt{7})^n[E_1 \cos n\alpha + E_2 \sin n\alpha] \text{ d. h. } A_n = (\sqrt{7})^n(E_1 \cos n\alpha + E_2 \sin n\alpha).$$

Für $n = 0, 1$ ist $A_0 = 5$, $A_1 = 13$, also hat man:

$$(\sqrt{7})^0(E_1 \cos 0 + E_2 \sin 0) = 5, \; (\sqrt{7})^1(E_1 \cos\alpha + E_2 \sin\alpha) = 13,$$

woraus: $E_1 = 5$, $E_2 = \frac{8}{\sqrt{6}}$, und endlich

$$A_n = (\sqrt{7})^n\left[5\cos n\alpha + \frac{8}{\sqrt{6}}\sin n\alpha\right], \; \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{7}}, \; \sin\alpha = \sqrt{\frac{6}{7}}.$$

Sey zweitens $(a+x)\Delta y + ay = 0$, $\Delta y = 1$, so ist in (h): $a_0 = a$, $b_0 = b$, $a_1 = a$; $M = a(u-1) + a = au$, $N = u - 1$; die (i'): $\frac{1}{v}\frac{\partial v}{\partial u} = \frac{au - \frac{\partial}{\partial u}[u(u-1)]}{u(u-1)}$, $l(v) = l(u-1)^a - l[u(u-1)] + C$,

$$v = \frac{(u-1)^a}{u(u-2)} = \frac{(u-1)^{a-1}}{u}; \; [(u-1)^a u^x]_\alpha^\beta = 0, \; \alpha = 0, \; \beta = 1,$$

also genügt der Gleichung:

$$y = C\int_0^1 \frac{u^x . (u-1)^{a-1}}{u} \partial u = C\int_0^1 u^{x-1}(1-u)^{a-1}\partial u = \frac{C\Gamma(x)\Gamma(a)}{\Gamma(x+a)}$$

d. h. $y = \frac{C\Gamma(x)}{\Gamma(x+a)}$, wobei aber x und a positiv seyn müssen.

XIV.

Eine Funktion der Veränderlichen x, y, z, ... heisst homogen des Grades n, wenn, indem man für x. y, z, ... setzt αx, αy, αz, ... der Faktor α^n in allen Gliedern erscheint und ausser demselben kein α mehr vorkommt. So ist $5x^2y^3 + 7x^3y^2 + 9x^5$ eine homogene Funktion von x und y vom Grade 5.

Sey also f(x, y, z, ...) eine homogene Funktion vom Grade n, so ist hiernach

$$f(\alpha x, \alpha y, \alpha z, \ldots) = \alpha^n f(x, y, z, \ldots),$$

woraus, wenn man αx, αy, αz, ... durch x', y', z', $f(\alpha x, \alpha y, \ldots)$ durch f' bezeichnet:

$$\frac{\partial f'}{\partial x'}\frac{\partial x'}{\partial \alpha} + \frac{\partial f'}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial \alpha} + \frac{\partial f'}{\partial z}\frac{\partial z'}{\partial \alpha} + \ldots = n\alpha^{n-1} f(x, y, z, \ldots).$$

Aber $\frac{\partial x'}{\partial \alpha} = x$, $\frac{\partial y'}{\partial \alpha} = y$, ..., so dass, wenn man $\alpha = 1$ setzt, wo f' in f übergeht, man hat:

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} + \ldots = nf(x, y, z, \ldots). \qquad \text{(a)}$$

Aus der Gleichung (a) folgt, dass $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} + \ldots$ abermals eine homogene Funktion von x, y, z, ... des Grades n ist, so dass derselbe Satz nochmals auf sie Anwendung findet. Heisst also die erste Seite von (a) F, so ist

$$x\frac{\partial F}{\partial x} + y\frac{\partial F}{\partial y} + z\frac{\partial F}{\partial z} + \ldots = nF,$$

d. h. $$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} + \ldots + x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \ldots = n . nf(x, y, z, ..),$$

d. h. wenn man (a) beachtet:

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + 2xz\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} + 2yz\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} + z^2\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + \ldots$$
$$= n(n-1) f(x, y, z, \ldots),$$

was man auch durch

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z} + \ldots\right)^2 f = n(n-1) f x, y, z, \ldots)$$

darstellen kann.

Es ist hieraus leicht zu schliessen, dass

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z} + \ldots\right)^m f(x, y, z, \ldots) = n(n-1)\ldots(n-m+1) f(x, y, z, \ldots). \qquad \text{(b)}$$

Durch Differentiation der Gleichung (a) nach x. y, z, ... erhält man:

$$\left.\begin{aligned} x\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + z\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} + \ldots &= (n-1)\frac{\partial f}{\partial x}, \\ x\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + y\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + z\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} + \ldots &= (n-1)\frac{\partial f}{\partial y}, \end{aligned}\right\} \text{(c)}$$

XV. Elemente der Theorie der Determinanten mit hieher gehörenden Anwendungen.

1) Hat man das System von n Gleichungen des ersten Grades mit n Unbekannten:

$$\left.\begin{array}{l} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + \ldots a_{1,n}x_n = c_1, \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 + \ldots a_{2,n}x_n = c_2, \\ \quad\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + a_{n,3}x_3 + \ldots a_{n,n}x_n = c_n, \end{array}\right\} (1)$$

wo also $a_{r,s}$ den s^{ten} Koeffizienten in der r^{ten} Gleichung bezeichnet, und löst dieses System auf, so haben die Werthe von $x_1, \ldots, x_n$ alle denselben Nenner, welcher die **Determinante** des Systems der Koeffizienten in (1) genannt wird. Dieselbe wird nach folgender Regel gebildet: „Man bilde aus den Elementen 1, 2, ..., n alle möglichen Versetzungen ohne Wiederholungen, und betrachte jede Gruppe als erste Zeiger an die a, denen man dann als zweite Zeiger der Ordnung nach 1, 2, ..., n zuschreibt. Diese Koeffizienten geben eines der 1.2.3...n Produkte, aus denen die Determinante besteht, und es hat dasselbe das Vorzeichen + oder —, je nachdem in der Gruppe eine gerade oder ungerade Anzahl höherer Elemente vor niederern steht."

So für 4 Gleichungen hätte man die Versetzungen von 1, 2, 3, 4 zu bilden, welche sind: 1234, 1243, 1324, 1342, 1423, 1432, 2134, 2143, 2314, 2341, 2413, 2431, 3124, 3142, 3214, 3241, 3412, 3421, 4123, 4132, 4213, 4231, 4312, 4321.

Nach der angegebenen Regel haben das + Zeichen die 1., 4., 5., 8., 9., 12., 13., 16., 17., 20., 21., 24.* Gruppe. Desshalb ist die Determinante:

$$a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3}a_{4,4} - a_{1,1}a_{2,2}a_{4,3}a_{3,4} - a_{1,1}a_{3,2}a_{2,3}a_{4,4} + a_{1,1}a_{3,2}a_{4,3}a_{2,4} + a_{1,1}a_{4,2}a_{2,3}a_{3,4} -$$
$$a_{1,1}a_{4,2}a_{3,3}a_{2,4} - a_{2,1}a_{1,2}a_{3,3}a_{4,4} + a_{2,1}a_{1,2}a_{4,3}a_{3,4} + a_{2,1}a_{3,2}a_{1,3}a_{4,4} - a_{2,1}a_{3,2}a_{4,3}a_{1,4} -$$
$$a_{2,1}a_{4,2}a_{1,3}a_{3,4} + a_{2,1}a_{4,2}a_{3,3}a_{1,4} + a_{3,1}a_{1,2}a_{2,3}a_{4,4} - a_{3,1}a_{1,2}a_{4,3}a_{2,4} - a_{3,1}a_{2,2}a_{1,3}a_{4,4} +$$
$$a_{3,1}a_{2,2}a_{4,3}a_{1,4} + a_{3,1}a_{4,2}a_{1,3}a_{2,4} - a_{3,1}a_{4,2}a_{2,3}a_{1,4} - a_{4,1}a_{1,2}a_{2,3}a_{3,4} + a_{4,1}a_{1,2}a_{3,3}a_{2,4} +$$
$$a_{4,1}a_{2,2}a_{1,3}a_{3,4} - a_{4,1}a_{2,2}a_{3.3}a_{1,4} - a_{4,1}a_{3,2}a_{1,3}a_{2,4} + a_{4,1}a_{3,2}a_{2,3}a_{1,4}.$$

Man pflegt allgemein die Determinante des Systems (1) durch

$$\left|\begin{array}{l} a_{1,1}, a_{1,2}, a_{1,3} \ldots a_{1,n} \\ a_{2,1}, a_{2,2}, a_{2,3}, \ldots a_{2,n} \\ \quad\vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{n,1}, a_{n,2}, a_{n,3}, \ldots a_{n,n} \end{array}\right| \qquad (2)$$

zu bezeichnen, welchen Ausdruck wir auch häufig durch A_n bezeichnen werden, um in Druck und Schrift uns kürzer fassen zu können. Zuweilen bezeichnet man A_n auch durch $\Sigma(\pm a_{1,1}\, a_{2,2} \ldots a_{n,n})$. Es kann hier nicht unsere Aufgabe seyn, die ganze Theorie dieser Gattung von Grössen darzustellen, vielmehr wollen wir nur einige Anwendungen davon auf den Gegenstand dieses Werkes machen und zu dem Ende nur diejenigen Sätze aus der Theorie nachweisen, die uns gerade nothwendig sind.

2) Zwei Gruppen der Determinante, die nur dadurch verschieden sind, dass zwei erste Zeiger ihre Plätze getauscht haben, sonst Alles gleich ist, haben verschiedenes Zeichen. So haben oben die Gruppen $a_{2,1}a_{3,2}a_{1,3}a_{4,4}$ und $a_{2,1}a_{4,2}a_{1,3}a_{3,4}$ verschiedenes Zeichen (+ und —).

Um diese Behauptung zu beweisen, wollen wir zwei Gruppen:

---

* So z. B. die Gruppe 2431, weil 2 vor 1, 4 vor 3, 4 vor 1, 3 vor 1 steht.

$$a_{m,1}\, a_{m',2} \ldots, a_{r,\varrho} \ldots a_{s,\varrho'} \ldots a_{v,n}$$
$$a_{m,1}\, a_{m',2} \ldots, a_{s,\varrho} \ldots a_{r,\varrho'} \ldots a_{v,n}$$

betrachten, in denen ausser der Vertauschung von r gegen s Alles gleich ist. Da es hier auf die zweiten Zeiger nicht ankommt, so wollen wir diese Gruppen so darstellen:

$$(a) = \ldots I \ldots r \ldots II \ldots s \ldots III \ldots; \quad (a') = \ldots I' \ldots s \ldots II' \ldots r \ldots III' \ldots,$$

wo wir durch I, II, III und eben so durch I', II', III' die zwischen liegenden Elemente bezeichnen. I und I' haben ganz dieselben Elemente u. s. w.; zugleich sey etwa $s > r$. Wir wollen ferner sagen, ein höheres Element vor einem niederern gebe eine Vorsetzung, und es geben nun in (a) und (a'), wenn man r und s sich wegdenkt, alle Elemente α Vorsetzungen; ferner gebe in (a) I gegen r : β, gegen s : β', II gegen s : γ, r gegen II : δ, r gegen III : δ', s gegen III : ε Vorsetzungen; alsdann gibt in (a') auch I' gegen r : β, I' gegen s : β', s gegen III' : ε, r gegen III' : δ' Vorsetzungen. Sind weiter in II, also auch II', im Ganzen e Elemente, so sind davon δ kleiner als r und γ grösser als s, so dass $e - \delta$ grösser als r, $e - \gamma$ kleiner als s sind. In (a') wird somit s gegen II' geben $e - \gamma$, II' gegen r aber $e - \delta$ Vorsetzungen; endlich gibt s gegen r in (a') noch eine Vorsetzung. Daraus nun folgt, dass die Anzahl aller Vorsetzungen ist

$$\text{in (a):}\quad \alpha + \beta + \beta' + \gamma + \delta + \delta' + \varepsilon = k,$$
$$\text{in (a'):}\quad \alpha + \beta + \beta' + \delta' + \varepsilon + e - \gamma + e - \delta + 1 = k + 2(e - \gamma - \delta) + 1,$$

so dass die Differenz beider ungerade ist. Ist also in der einen Gruppe die Anzahl der Vorsetzungen gerade, so ist sie in der andern ungerade, und umgekehrt. Damit ist dann unsere Behauptung bewiesen.

Daraus folgt dann auch, dass es in A_n eben so viele Gruppen mit dem + Zeichen, als mit dem entgegengesetzten, geben muss.

3) Da man die Versetzungen der Elemente 1, 2, . . ., n aus der Gruppe 12..n nach einander dadurch bilden kann, dass man allemal nur zwei Elemente gegenseitig tauscht, dadurch aber jedesmal das Zeichen — der Regel gemäss — geändert wird, so kann man auch sagen, es habe eine Gruppe das + oder — Zeichen, je nachdem die Anordnung der ersten Zeiger aus 12..n durch eine gerade oder ungerade Anzahl gegenseitiger Vertauschungen je zweier Elemente hervorgebracht werden kann.

Daraus aber lässt sich weiter beweisen, dass dieselbe Determinante herauskommen muss, wenn man die zweiten Zeiger permutirt und die ersten in der Ordnung 1, 2, . ., n zusetzt.

Denn gesetzt auf die in Nr. 1 beschriebene Weise entstehe A_n, auf die angegebene aber A'_n. In jeder Gruppe von A_n tausche man in jedem Element bloss die zwei Zeiger, so wird je eine Gruppe entstehen, die auch in A'_n vorkommt, und dort dasselbe Zeichen hat, wie die betreffende Gruppe in A_n (gleich sind sie freilich nicht). Durch eine so durchgeführte Vertauschung verwandelt sich also A_n in A'_n. Denken wir uns nun eine bestimmte Gruppe von A_n, die wir mit k bezeichnen wollen, so ist dieselbe nach den zweiten Zeigern geordnet, während die ersten in einer Zusammensetzung sind, die durch m Vertauschungen je zweier Zeiger aus 123..n entstanden seyn soll. Vertauschen wir nun die Elemente in k, die durch ihre ersten Zeiger charakterisirt seyn sollen, in derselben Ordnung, nur rückwärts gehend, wie

die Anordnung der ersten Zeiger aus 12..n entsanden ist, so werden diese Elemente schliesslich nach den ersten Zeigern geordnet erscheinen, während die zweiten in einer Anordnung sind, die aus 12..n durch m Vertauschungen entstanden ist. * Diese Gruppe gehört aber zu A'_n, da sie ja nach den ersten Zeigern geordnet ist, und in A'_n hat sie dasselbe Zeichen wie k, indem dasselbe sich nur nach m richtet. A_n und A'_n haben also dieselben Gruppen (wenn auch anders geordnet) mit denselben Zeichen, und sind folglich einander gleich.

Wie schon bemerkt, entsteht A'_n aus A_n auch, dass man $a_{r,s}$ gegen $a_{s,r}$ umtauscht, wo r und s gleich 1, 2, . . . , n seyn können, so dass also

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}, a_{1,2}, \ldots, a_{1,n} \\ a_{2,1}, a_{2,2}, \ldots, a_{2,n} \\ \vdots \quad \vdots \\ a_{n,1}, a_{n,2}, \ldots, a_{n,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{1,1}, a_{2,1}, \ldots, a_{n,1} \\ a_{1,2}, a_{2,2}, \ldots, a_{n,2} \\ \vdots \quad \vdots \\ a_{1,n}, a_{2,n}, \ldots, a_{n,n} \end{vmatrix}. \qquad (3)$$

4) In jeder Gruppe von A_n kommt der erste Zeiger r (= 1, 2, . . . , n) nur einmal, eben so der zweite Zeiger s (= 1, . . . , n) auch nur einmal vor. Betrachtet man also diejenigen Gruppen, die das Element $a_{r,s}$ enthalten, so kommt in ihnen weder $a_{r,\varrho}$, noch $a_{\varrho,s}$ vor, wo $\varrho = 1, 2, \ldots, n$. Daraus folgt leicht, dass alle diese Gruppen zusammen $= a_{r,s}\frac{\partial A_n}{\partial a_{r,s}}$ sind. Lässt man hier $r = 1, 2, \ldots, n$ seyn, so erhält man alle Gruppen in A_n, da jede den zweiten Zeiger s nur einmal enthalten kann. Daraus folgt:

$$A_n = a_{1,s}\frac{\partial A_n}{\partial a_{1,s}} + a_{2,s}\frac{\partial A_n}{\partial a_{2,s}} + \ldots + a_{n,s}\frac{\partial A_n}{\partial a_{n,s}}, \quad s = 1, 2, \ldots, n. \qquad (4)$$

Wegen (3) ergibt sich dann sofort:

$$A_n = a_{s,1}\frac{\partial A_n}{\partial a_{s,1}} + a_{s,2}\frac{\partial A_n}{\partial a_{s,2}} + \ldots + a_{s,n}\frac{\partial A_n}{\partial a_{s,n}}. \qquad (4')$$

Ferner ist, wenn s und r verschieden sind:

$$a_{r,1}\frac{\partial A_n}{\partial a_{s,1}} + a_{r,2}\frac{\partial A_n}{\partial a_{s,2}} + \ldots + a_{r,n}\frac{\partial A_n}{\partial a_{s,n}} = 0. \qquad (5)$$

Denn es stellt diese Grösse den Werth von A_n vor, den man erhält, wenn man überall an die Stelle des ersten Zeigers s den Zeiger r setzt. Da aber je zwei Gruppen, in denen nur r und s vertauscht sind, verschiedenes Zeichen haben (Nr. 2) und jetzt gleich werden, so ist der daraus folgende Werth von A_n Null. Aus (3) folgt dann:

$$a_{1,r}\frac{\partial A_n}{\partial a_{1,s}} + a_{2,r}\frac{\partial A_n}{\partial a_{2,s}} + \ldots + a_{n,r}\frac{\partial A_n}{\partial a_{n,s}} = 0. \qquad (5')$$

5) Man multiplizire die erste Gleichung (1) mit $\frac{\partial A_n}{\partial a_{1,s}}$, die zweite mit $\frac{\partial A_n}{\partial a_{2,s}}$, . .

---

* So entsteht 3142 aus 1234 durch folgende Umtauschungen: 1234, 1243, 1342, 3142; also bildet man rückwärts aus $a_{3,1}a_{1,2}a_{4,3}a_{2,4}$: $a_{1,2}a_{3,1}a_{4,3}a_{2,4}$, $a_{1,2}a_{2,4}a_{4,3}a_{3,1}$, $a_{1,2}a_{2,4}a_{3,1}a_{4,3}$ und die letzte Gruppe kommt in A'_n vor.

. ., die n^{te} mit $\frac{\partial A_n}{\partial a_{n,s}}$ und addire, indem man die Gleichungen (4) und (5′) beachtet, so ist:

$$A_n \cdot x_s = c_1 \frac{\partial A_n}{\partial a_{1,s}} + c_2 \frac{\partial A_n}{\partial a_{2,s}} + \ldots + c_n \frac{\partial A_n}{\partial a_{n,s}}, \qquad (6)$$

woraus sofort x_s folgt. $(s = 1, 2, \ldots, n)$. Was die Grösse zweiter Seite anbelangt, so entsteht sie aus A_n, wenn man für $a_{1,s}$, $a_{2,s}$, ..., $a_{n,s}$ setzt $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Sie ist also gleich:

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}, a_{1,2}, \ldots, a_{1,s-1}, c_1, a_{1,s+1}, \ldots, a_{1,n} \\ a_{2,1}, a_{2,2}, \ldots, a_{2,s-1}, c_2, a_{2,s+1}, \ldots, a_{2,n} \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{n,1}, a_{n,2}, \ldots, a_{n,s-1}, c_n, a_{n,s+1}, \ldots, a_{n,n} \end{vmatrix} \qquad (7)$$

6) Gesetzt man habe das nfache Integral

$$\int \partial x_1 \int \partial x_2 \ldots \int P \partial x_n, \qquad (8)$$

das wir als ein bestimmtes ansehen wollen und worin P eine Funktion von $x_1, \ldots, x_n$ ist, und es solle dasselbe umgeformt werden, indem statt $x_1, \ldots, x_n$ die Grössen $z_1, \ldots, z_n$ eingeführt werden, die mit jenen zusammenhängen durch die Gleichungen

$$x_1 = \varphi_1(z_1, \ldots, z_n),\ x_2 = \varphi_2(z_1, \ldots, z_n),\ \ldots,\ x_n = \varphi_n(z_1, z_2, \ldots, z_n). \qquad (9)$$

Denken wir uns nun (§. 52) es werde x_n durch z_n, dann x_{n-1} durch z_{n-1}, . . . ersetzt, so hat man gemäss §. 52 zuerst $\frac{\partial x_n}{\partial z_n}$ zu bestimmen aus:

$$\frac{\partial x_n}{\partial z_n} = \frac{\partial \varphi_n}{\partial z_1}\frac{\partial z_1}{\partial z_n} + \frac{\partial \varphi_n}{\partial z_2}\frac{\partial z_2}{\partial z_n} + \ldots + \frac{\partial \varphi_n}{\partial z_{n-1}}\frac{\partial z_{n-1}}{\partial z_n} + \frac{\partial \varphi_n}{\partial z_n},$$

$$0 = \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial z_1}\frac{\partial z_1}{\partial z_n} + \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial z_2}\frac{\partial z_2}{\partial z_n} + \ldots + \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial z_{n-1}}\frac{\partial z_{n-1}}{\partial z_n} + \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial z_n},$$

$$\vdots$$

$$0 = \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_1}\frac{\partial z_1}{\partial z_n} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_2}\frac{\partial z_2}{\partial z_n} + \ldots + \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_{n-1}}\frac{\partial z_{n-1}}{\partial z_n} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_n}.$$

Folgt hieraus $\frac{\partial x_n}{\partial z_n} = \frac{M}{N}$, so ist nach Nr. 5: (10)

$$M = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_n}{\partial z_n}, & -\frac{\partial \varphi_n}{\partial z_1}, & -\frac{\partial \varphi_n}{\partial z_2}, & \ldots, & -\frac{\partial \varphi_n}{\partial z_{n-1}} \\ \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial z_n}, & -\frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial z_1}, & -\frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial z_2}, & \ldots, & -\frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial z_{n-1}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_n}, & -\frac{\partial \varphi_1}{\partial z_1}, & -\frac{\partial \varphi_1}{\partial z_2}, & \ldots, & -\frac{\partial \varphi_1}{\partial z_{n-1}} \end{vmatrix}, \quad N = \begin{vmatrix} 1, & -\frac{\partial \varphi_n}{\partial z_1}, & -\frac{\partial \varphi_n}{\partial z_2}, & \ldots, & -\frac{\partial \varphi_n}{\partial z_{n-1}} \\ 0, & -\frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial z_1}, & -\frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial z_2}, & \ldots, & -\frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial z_{n-1}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0, & -\frac{\partial \varphi_1}{\partial z_1}, & -\frac{\partial \varphi_1}{\partial z_2}, & \ldots, & -\frac{\partial \varphi_1}{\partial z_{n-1}} \end{vmatrix}.$$

Was diese zwei Grössen anbelangt, so ist leicht zu sehen, dass:

$$M = \pm \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_n}{\partial z_1}, & \frac{\partial \varphi_n}{\partial z_2}, & \dots, & \frac{\partial \varphi_n}{\partial z_n} \\ \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial z_1}, & \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial z_2}, & \dots, & \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial z_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_1}, & \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_2}, & \dots, & \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_n} \end{vmatrix}, N = \pm \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial z_1}, & \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial z_2}, & \dots, & \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial z_{n-1}} \\ \frac{\partial \varphi_{n-2}}{\partial z_1}, & \frac{\partial \varphi_{n-2}}{\partial z_2}, & \dots, & \frac{\partial \varphi_{n-2}}{\partial z_{n-1}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_1}, & \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_2}, & \dots, & \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_{n-1}} \end{vmatrix}. \quad (10)$$

Ist nunmehr x_n ersetzt, so bestimmt man $\frac{\partial x_{n-1}}{\partial z_{n-1}}$ aus:

$$\frac{\partial x_{n-1}}{\partial z_{n-1}} = \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial z_1}\frac{\partial z_1}{\partial z_{n-1}} + \dots + \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial z_{n-2}}\frac{\partial z_{n-2}}{\partial z_{n-1}} + \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial z_{n-1}},$$

$$0 = \frac{\partial \varphi_{n-2}}{\partial z_1}\frac{\partial z_1}{\partial z_{n-1}} + \dots\dots\dots\dots\dots + \frac{\partial \varphi_{n-2}}{\partial z_{n-1}},$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$0 = \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_1}\frac{\partial z_1}{\partial z_{n-1}} + \dots\dots\dots\dots\dots + \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_{n-1}}.$$

Folgt hieraus $\frac{\partial x_{n-1}}{\partial z_{n-1}} = \frac{M'}{N'}$, so ist $M' = \pm N$, während N' aus N folgt, wenn man dort die erste Horizontalreihe und die letzte Vertikalreihe auslöscht. Dass dasselbe Gesetz fortwährend stattfindet, ist leicht zu übersehen, und wenn $\frac{\partial x_3}{\partial z_3} = \frac{M^{(n-3)}}{N^{(n-3)}}$, so ist $M^{(n-3)} = N^{(n-4)}$, während $N^{(n-3)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_2}{\partial z_1}, & \frac{\partial \varphi_2}{\partial z_2} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_1}, & \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_2} \end{vmatrix} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial z_1}\frac{\partial \varphi_1}{\partial z_2} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial z_2}\frac{\partial \varphi_1}{\partial z_1}$, und wenn dann $\frac{\partial x_2}{\partial z_2} = \frac{M^{(n-2)}}{N^{(n-2)}}$, so ist $M^{(n-2)} = N^{(n-3)}$, und $N^{(n-2)} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_1}$, so dass da schliesslich $\frac{\partial x_1}{\partial z_1} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_1}$:

$$\int \partial x_1 \int \partial x_2 \dots \int P \partial x_n = \pm \int \partial z_n \int \partial z_{n-1} \dots \int P M \partial z_1, \quad (11)$$

wo M durch (10) gegeben ist.

7) Die Grösse $\frac{\partial A_n}{\partial a_{r,s}}$ wird nach Nr. 4 keines der Elemente der s^{ten} Vertikal- und der r^{ten} Horizontalreihe von (2) enthalten. In all den Gruppen von A_n, in denen $a_{r,s}$ vorkommt, nimmt diese Grösse die s^{te} Stelle ein, und nur diese Gruppen kommen, mit Weglassung von $a_{r,s}$, in $\frac{\partial A_n}{\partial a_{r,s}}$ vor. In all den Gruppen nun, die letztere Grösse bilden, sind die ersten Zeiger $1, 2, \dots, r-1, r+1, \dots, n$ in allen möglichen Weisen versetzt, und daneben sind der Ordnung nach als zweite Zeiger geschrieben $1, 2, \dots, s-1, s+1, \dots, n$. Würde man also in (2) die s^{te} Vertikal-

und die r^{te} Horizontalreihe weglassen und dann die Determinante bilden, so scheint es, erhielte man $\frac{\partial A_n}{\partial a_{r,s}}$. In allen Fällen erhält man dadurch die in letzterer Grösse vorkommenden Gruppen und es fragt sich bloss, ob das Zeichen derselben auch das ist, was der entsprechenden Gruppe in A_n zukommt. Zu dem Ende stelle (a) $= \ldots$ $\ldots a_{r,s} \ldots$ eine Gruppe in A_n vor, so wird (a') $= \ldots 0 \ldots$ die entsprechende in $\frac{\partial A_n}{\partial a_{r,s}}$ vorstellen, wo durch 0 angedeutet wird, dass kein Element dort steht. In der ersten Abtheilung von (a) stehen $s-1$ Elemente, in der zweiten $n-s$; von den ersten seyen α erste Zeiger kleiner als r, also $s-\alpha-1$ grösser als r, in der zweiten seyen β kleiner als r, also $n-s-\beta$ grösser. Die Elemente, wenn $a_{r,s}$ weggedacht wird, machen etwa γ Vorsetzungen (Nr. 2). Alsdann ist die Gesammtzahl aller Vorsetzungen in (a) : $\gamma+s-\alpha-1+\beta$, in (a') aber γ; aber es gibt im Ganzen nur $r-1$ Zeiger, welche kleiner seyn können als r, so dass $\alpha+\beta=r-1$, d. h. wenn in (a') γ Vorsetzungen sind, so sind in (a) ihrer $\gamma+s-\alpha-1+r-1-\alpha=\gamma+s+r-2(\alpha+1)$. Da immer $2(\alpha+1)$ gerade ist, so wird also nach der Regel (a) dasselbe Zeichen haben mit (a'), wenn $s+r$ gerade, verschiedenes, wenn $r+s$ ungerade. Da dies für alle Gruppen so ist, so hat man offenbar:

$$\frac{\partial A_n}{\partial a_{r,s}}=(-1)^{r+s}\begin{vmatrix} a_{1,1}, & a_{1,2} & ,\ldots, a_{1,s-1}, & a_{1,s+1} & ,\ldots, a_{1,n} \\ a_{2,1}, & a_{2,2} & ,\ldots, a_{2,s-1}, & a_{2,s+1} & ,\ldots, a_{2,n} \\ & \vdots & & \vdots & \\ a_{r-1,1}, & a_{r-1,2} & ,\ldots, a_{r-1,s-1}, & a_{r-1,s+1} & ,\ldots, a_{r-1,n} \\ a_{r+1,1}, & a_{r+1,2} & ,\ldots, a_{r+1,s-1}, & a_{r+1,s+1} & ,\ldots, a_{r+1,n} \\ & \vdots & & \vdots & \\ a_{n,1}, & a_{n,2} & ,\ldots, a_{n,s-1}, & a_{n,s+1} & ,\ldots, a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

8) Seyen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ die (verschiedenen) Wurzeln der Gleichung $x^n+A_{n-1}x^{n-1}+\ldots+A_1x+A_0=0=F(x)$, so ist also

$$\begin{aligned} \alpha_1^n+A_{n-1}\alpha_1^{n-1}+\ldots+A_1\alpha_1+A_0&=0, \\ \vdots \qquad & \vdots \\ \alpha_n^n+A_{n-1}\alpha_n^{n-1}+\ldots+A_1\alpha_n+A_0&=0. \end{aligned}$$

Multiplizirt man diese Gleichungen mit $a_1, \ldots, a_n$, wo

$$\left.\begin{aligned} a_1+a_2+\ldots+a_n&=0, \\ \alpha_1a_1+\alpha_2a_2+\ldots+\alpha_na_n&=0, \\ \vdots \qquad & \vdots \\ \alpha_1^r a_1+\alpha_2^r a_2+\ldots+\alpha_n^r a_n&=z, \\ \vdots \qquad & \vdots \\ \alpha_1^{n-1}a_1+\alpha_2^{n-1}a_2+\ldots+\alpha_n^{n-1}a_n&=0, \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

so folgt durch Addition:

$$A_r=-\frac{1}{z}\left(a_1\alpha_1^n+a_2\alpha_2^n+\ldots+a_n\alpha_n^n\right).$$

Ist aber

$$M=\begin{vmatrix} 1, & 1, & \ldots, & 1 \\ \alpha_1, & \alpha_2, & \ldots, & \alpha_n \\ \vdots & \vdots & & \\ \alpha_1^{n-1}, & \alpha_2^{n-1}, & \ldots, & \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix}, \qquad (13)$$

so ist nach Nr. 5: $a_1=\frac{z}{M}\frac{\partial M}{\partial(\alpha_1^r)}, \ldots, a_n=\frac{z}{M}\frac{\partial M}{\partial(\alpha_n^r)}$, also $A_r=-\frac{1}{M}\Big[\alpha_1^n\frac{\partial M}{\partial(\alpha_1^r)}$ $+\ldots+\alpha_n^n\frac{\partial M}{\partial(\alpha_n^r)}\Big]$.

Den Gleichungen (12) wird übrigens, wenn $r=n-1$, genügt durch $a_1=\frac{z}{F'(\alpha_1)}, \ldots, a_n=\frac{z}{F'(\alpha_n)}$, (nach §. 38, Anm.), so dass

$$\frac{1}{F'(\alpha_1)}=\frac{1}{M}\frac{\partial M}{\partial(\alpha_1^{n-1})}, \ldots, \frac{1}{F'(\alpha_n)}=\frac{1}{M}\frac{\partial M}{\partial(\alpha_n^{n-1})}.$$

Was nun $\frac{\partial M}{\partial(\alpha_1^{n-1})}$ anbelangt, so kann diese Grösse nach Nr. 7 bestimmt werden. Tilgt man in (13) die erste Vertikal- und die letzte Horizontalreihe, und heisst M_1 die dann entstehende Determinante, so ist $\frac{\partial M}{\partial(\alpha_1^{n-1})}=(-1)^{n-1}M_1$. Ist aber $F_1(x)=(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n)$, so ist ganz wie so eben $\frac{1}{F_1'(\alpha_2)}=\frac{1}{M_1}\frac{\partial M_1}{\partial(\alpha_2^{n-2})}$, etc., so dass wenn

$F(x)=(x-\alpha_1)\ldots(x-\alpha_n)$, $F_1(x)=(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n)$, ..., $F_{n-2}(x)=(x-\alpha_{n-1})(x-\alpha_n)$;

$$\frac{\partial M}{\partial(\alpha_1^{n-1})}=(-1)^{n-1}M_1, \quad \frac{\partial M_1}{\partial(\alpha_2^{n-2})}=(-1)^{n-2}M_2, \ldots, \quad \frac{\partial M_{n-3}}{\partial(\alpha_{n-2}^2)}=(-1)^2 M_{n-2},$$

$$\frac{\partial M_{n-2}}{\partial \alpha_{n-1}}=(-1)^1 M_{n-1},$$

so ist $M_{n-2}=\begin{vmatrix} 1, & 1 \\ \alpha_{n-1}, & \alpha_n \end{vmatrix}=\alpha_n-\alpha_{n-1}$, $M_{n-1}=1$, und

$$\frac{1}{F'(\alpha_1)}=\frac{(-1)^{n-1}M_1}{M}, \quad \frac{1}{F_1'(\alpha_2)}=\frac{(-1)^{n-2}M_2}{M_1}, \ldots, \frac{1}{F'_{(n-2)}(\alpha_{n-1})}=$$
$$\frac{(-1)^1 M_{n-1}}{M_{n-2}}=\frac{(-1)^1}{M_{n-2}},$$

woraus $M=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}F'(\alpha_1)F_1'(\alpha_2)\ldots F'_{n-2}(\alpha_{n-1})=\pm(\alpha_1-\alpha_2)(\alpha_1-\alpha_3)\ldots$
$(\alpha_1-\alpha_n)(\alpha_2-\alpha_3)\ldots(\alpha_2-\alpha_n)\ldots(\alpha_{n-1}-\alpha_n)$,

wo das obere Zeichen gilt, wenn $\frac{n(n-1)}{2}$ gerade, das untere im entgegengesetzten Falle.

9) Betrachten wir das nfache bestimmte Integral:

$$\int_{a_1}^{b_1}\partial x_1\int_{a_2}^{b_2}\partial x_2\ldots\int_{a_n}^{b_n}f(x_1)f(x_2)\ldots f(x_n)(x_1-x_2)(x_1-x_3)\ldots(x_1-x_n)(x_2-x_3)\ldots(x_2-x_n)\ldots$$
$$(x_{n-1}-x_n)\,\partial x_n,$$

so ist dasselbe nach Nr. 8 gleich

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\int_{a_1}^{b_1}\partial x_1\int_{a_2}^{b_2}\partial x_2\int_{a_n}^{b_n}f(x_1)f(x_2)\ldots f(x_n)\begin{vmatrix}1, & 1, & \ldots, 1\\ x_1, & x_2, & \ldots, x_n\\ x_1^2, & x_2^2, & \ldots, x_n^2\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ x_1^{n-1}, & x_2^{n-1}, & \ldots, x_n^{n-1}\end{vmatrix}\partial x_n,$$

wo nun, wenn man die Determinante entwickelt, das Ganze in eine Reihe einzelner Integrale zerfällt, die als Produkte einfacher Integrale erscheinen.

10) Man habe die lineare Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^n y}{\partial x^n}+A_{n-1}\frac{\partial^{n-1}y}{\partial x^{n-1}}+\ldots+A_1\frac{\partial y}{\partial x}+A_0 y=0, \qquad (14)$$

worin $A_{n-1},\ldots,A_1,A_0$ bekannte Funktionen von x sind, und es seyen $y_1, y_2,\ldots$ Funktionen von x, welche der (14) genügen, so ist, wenn man $\frac{\partial^m y_r}{\partial x^m}=y_r^{(m)}$ setzt, und annimmt:

$$\begin{aligned}
&a_1y_1+a_2y_2+\ldots+a_ny_n=0,\\
&a_1y'_1+a_2y'_2+\ldots+a_ny'_n=0,\\
&\vdots\\
&a_1y_1^{(r)}+a_2y_2^{(r)}+\ldots+a_ny_n^{(r)}=z,\\
&\vdots\\
&a_1y_1^{(n-1)}+a_2y_2^{(n-1)}+\ldots+a_ny_n^{(n-1)}=0,
\end{aligned}$$

ganz wie in Nr. 8:

$$A_r=-\frac{1}{M}\left[y_1^{(n)}\frac{\partial M}{\partial y_1^{(r)}}+y_2^{(n)}\frac{\partial M}{\partial y_2^{(r)}}+\ldots+y_n^{(n)}\frac{\partial M}{\partial y_n^{(r)}}\right],$$

wo

$$M=\begin{vmatrix}y_1, & y_2, \ldots, y_n\\ y'_1, & y'_2, \ldots, y'_n\\ \vdots & \vdots\\ y_1^{(n-1)}, & y_2^{(n-1)}, \ldots, y_n^{(n-1)}\end{vmatrix}.$$

Gemäss (4′) ist auch

$$M=y_1^{(n-1)}\frac{\partial M}{\partial y_1^{(n-1)}}+y_2^{(n-1)}\frac{\partial M}{\partial y_2^{(n-1)}}+\ldots+y_n^{(n-1)}\frac{\partial M}{\partial y_n^{(n-1)}}.$$

Hieraus folgt nun, wenn man nach x differenzirt:

$$M'=y_1^{(n)}\frac{\partial M}{\partial y_1^{(n-1)}}+y_2^{(n)}\frac{\partial M}{\partial y_2^{(n-1)}}+\ldots+y_n^{(n)}\frac{\partial M}{\partial y_n^{(n-1)}}+y_1^{(n-1)}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial M}{\partial y_1^{(n-1)}}+\ldots$$
$$+y_n^{(n-1)}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial M}{\partial y_n^{(n-1)}}.$$

Beachtet man, dass $\frac{\partial M}{\partial y_r^{(n-1)}}$ weder $y_r, y'_r, \ldots, y_r^{(n-1)}$ noch $y_1^{(n-1)}, \ldots, y_n^{(n-1)}$ enthält (Nr. 4), so ist

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial M}{\partial y_r^{(n-1)}} = \frac{\partial^2 M}{\partial y_r^{(n-1)}\partial y_1} y'_1 + \frac{\partial^2 M}{\partial y_r^{(n-1)}\partial y_2} y'_2 + \ldots + \frac{\partial^2 M}{\partial y_r^{(n-1)}\partial y_n} y'_n$$
$$+ \ldots\ldots + \frac{\partial^2 M}{\partial y_r^{(n-1)}\partial y_1^{(n-2)}} y_1^{(n-1)} + \frac{\partial^2 M}{\partial y_r^{(n-1)}\partial y_r^{(n-2)}} y_2^{(n-1)} + \ldots + \frac{\partial^2 M}{\partial y_r^{(n-1)}\partial y_n^{(n-2)}} y_n^{(n-1)},$$

und also $y_1^{(n-1)}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial M}{\partial y_1^{(n-1)}} + \ldots + y_n^{(n-1)}\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial M}{\partial y_n^{(n-1)}} =$

$$\sum_1^n \left\{ y'_s \left[y_1^{(n-1)} \frac{\partial^2 M}{\partial y_1^{(n-1)}\partial y_s} + y_2^{(n-1)} \frac{\partial^2 M}{\partial y_2^{(n-1)}\partial y_s} + \ldots + y_n^{(n-1)} \frac{\partial^2 M}{\partial y_n^{(n-1)}\partial y_s} \right] \right.$$
$$+ y''_s \left[y_1^{(n-1)} \frac{\partial^2 M}{\partial y_1^{(n-1)}\partial y'_s} + y_2^{(n-1)} \frac{\partial^2 M}{\partial y_2^{(n-1)}\partial x'_s} + \ldots + y_n^{(n-1)} \frac{\partial^2 M}{\partial y_n^{(n-1)}\partial y'_s} \right]$$
$$+ \ldots .$$
$$\left. + y_s^{(n-1)} \left[y_1^{(n-1)} \frac{\partial^2 M}{\partial y_1^{(n-1)}\partial y_s^{(n-2)}} + y_2^{(n-1)} \frac{\partial^2 M}{\partial y_2^{(n-1)}\partial y_s^{(n-2)}} + \ldots + y_n^{(n-1)} \frac{\partial^2 M}{\partial y_n^{(n-1)}\partial y_s^{(n-2)}} \right] \right\},$$

wo das Summirungszeichen meint, man solle s alle Werthe von 1 bis n beilegen, und alle so erhaltenen Grössen summiren. Gemäss Nr. 7 ist $\frac{\partial M}{\partial y_s}$ selbst wieder eine Determinante, die man aus M erhält, wenn man die erste Horizontal- und die s^{te} Vertikalreihe ausstreicht; eben so ist $\frac{\partial M}{\partial y_s^{(r)}}$ eine Determinante, die aus M folgt, wenn man die $(r+1)^{te}$ Horizontal- und die s^{te} Vertikalreihe ausstreicht. Nach (4) ist demnach

$$\frac{\partial M}{\partial y_s^{(r)}} = y_1^{(n-1)} \frac{\partial^2 M}{\partial y_1^{(n-1)}\partial y_s^{(r)}} + \ldots + y_n^{(n-1)} \frac{\partial^2 M}{\partial y_n^{(n-1)}\partial y_s^{(r)}}.$$

so dass also die vorhergehende Grösse gleich

$$\sum_1^n \left[y'_s \frac{\partial M}{\partial y_s} + y''_s \frac{\partial M}{\partial y'_s} + \ldots + y_s^{(n-1)} \frac{\partial M}{\partial y_s^{(n-2)}} \right],$$

welch letztere nach (5) gleich Null ist. Demnach hat man

$$M' = y_1^{(n)} \frac{\partial M}{\partial y_1^{(n-1)}} + \ldots + y_n^{(n)} \frac{\partial M}{\partial y_n^{(n-1)}} = -M A_{n-1},$$

$$\frac{M'}{M} = -A_{n-1},\ l(M) = -\int A_{n-1}\partial x + C,\ M = Ce^{-\int A_{n-1}\partial x}. \quad (15)$$

Aus dieser wichtigen Gleichung folgt nach (4):

$$y_n^{(n-1)} \frac{\partial M}{\partial y_n^{(n-1)}} + y_n^{(n-2)} \frac{\partial M}{\partial y_n^{(n-2)}} + \ldots + y_n \frac{\partial M}{\partial y_n} = Ce^{-\int A_{n-1}\partial x},$$

so dass, wenn man zur Abkürzung

$$\frac{\partial M}{\partial y_n^{(r)}} = B_r \frac{\partial M}{\partial y_n^{(n-1)}}$$

setzt, man hat

$$y_n^{(n-1)} + B_{n-2} y_n^{(n-2)} + \ldots + B_0 y_n = \frac{C e^{-\int A_{n-1} \partial x}}{\frac{\partial M}{\partial y_n^{(n-1)}}}. \qquad \text{(a)}$$

Setzt man, der Bequemlichkeit des Schreibens wegen, die zweite Seite $= \xi$, so genügt also y_n der Gleichung

$$\frac{\partial^{n-1} z}{\partial x^{n-1}} + B_{n-2} \frac{\partial^{n-2} z}{\partial x^{n-2}} + \ldots + B_0 z = \xi. \qquad \text{(a')}$$

Da aber, wenn nicht $r = n$, nach (5'):

$$y_r^{(n-1)} \frac{\partial M}{\partial y_n^{(n-1)}} + y_r^{(n-2)} \frac{\partial M}{\partial y_n^{(n-2)}} + \ldots + y_r \frac{\partial M}{\partial y_n} = 0,$$

so genügen mithin $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^{n-1} z}{\partial x^{n-1}} + B_{n-2} \frac{\partial^{n-2} z}{\partial x^{n-2}} + \ldots + B_0 z = 0,$$

woraus nun nach §. 80 leicht geschlossen wird, dass der Gleichung (a') genügt wird durch

$$z = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_{n-1} y_{n-1}.$$

wo (Nr. 5 und §. 80)

$$\alpha_r = \int \frac{\xi}{M_1} \frac{\partial M_1}{\partial y_r^{(n-2)}} \partial x, \quad M_1 = \frac{\partial M}{\partial y_n^{(n-1)}}. \, *$$

Daraus ergibt sich nun (§. 80), dass wenn man nur $n-1$ Werthe von y kennt, welche (14) genügen, und wenn $y_1, \ldots, y_{n-1}$ dieselben sind, man den fehlenden n^{ten} Werth y_n findet aus

$$y_n = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_{n-1} y_{n-1}, \; \alpha_r = \int \frac{e^{-\int A_{n-1} \partial x}}{M_1} \frac{\partial M_1}{\partial y_r^{(n-2)}} \partial x,$$

wo M_1 die in der Note angegebene Determinante ist.

11) Gesetzt, man habe neben dem Gleichungssystem (1) noch das folgende

$$\begin{aligned} b_{1,1} y_1 + b_{1,2} y_2 + \ldots + b_{1,n} y_n &= x_1, \ldots \ldots \\ b_{n,1} y_n + b_{n,2} y_2 + \ldots + b_{n,n} y_n &= x_n, \end{aligned} \qquad (16)$$

so kann man, um $y_1, \ldots, y_n$ zu erhalten, entweder $x_1, \ldots, x_n$ aus (1) bestimmen,

* Es ist nämlich

$$M_1 = \begin{vmatrix} y_1, & y_2, & \ldots, y_{n-1} \\ y_1', & y_2', & \ldots, y_{n-1}' \\ \vdots & \vdots & \\ y_1^{(n-2)}, & y_2^{(n-2)}, & \ldots, y_{n-1}^{(n-2)} \end{vmatrix} = \frac{\partial M}{\partial y_n^{(n-1)}},$$

wie aus Nr. 7 sofort folgt, da dort $r+s$ jetzt $= 2n$ ist.

in (16) einsetzen und dann $y_1, \ldots, y_n$ hieraus ermitteln; oder aber man kann auch $x_1, \ldots, x_n$ aus (16) in (1) einsetzen und dann $y_1, \ldots, y_n$ bestimmen. Beide Wege müssen natürlich zu demselben Ziele führen, und es müssen namentlich die Koeffizienten der c in $y_1, \ldots, y_n$ in beiden Weisen genau dieselben seyn. Ist nun M die Determinante (2), dazu

$$\begin{vmatrix} b_{1,1}, & b_{1,2}, & \ldots, & b_{1,n} \\ b_{2,1}, & b_{2,2}, & \ldots, & b_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \\ b_{n,1}, & b_{n,2} & \ldots & b_{n,n} \end{vmatrix} = N,$$

so haben $x_1, \ldots, x_n$ aus (1) den gemeinschaftlichen Nenner M, woraus dann leicht folgt, dass $y_1, \ldots, y_n$, nach der ersten Weise bestimmt, den gemeinschaftlichen Nenner MN haben. Verfährt man aber nach der zweiten Weise, und setzt:

$$\left.\begin{aligned} a_{1,1}b_{1,1}+a_{1,2}b_{2,1}+\ldots+a_{1,n}b_{n,1}&=c_{1,1}, \\ a_{1,1}b_{1,2}+a_{1,2}b_{2,2}+\ldots+a_{1,n}b_{n,2}&=c_{1,2}, \\ \vdots \quad & \quad \vdots \\ a_{1,1}b_{1,n}+a_{1,2}b_{2,n}+\ldots+a_{1,n}b_{n,n}&=c_{1,n}, \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

allgemein

$$a_{r,1}b_{1,s}+a_{r,2}b_{2,s}+\ldots+a_{r,n}b_{n,s}=c_{r,s},$$

wo $r=1,\ldots,n$, und $s=1,\ldots n$, so ist der gemeinschaftliche Nenner von $y_1, \ldots, y_n$:

$$\begin{vmatrix} c_{1,1}, & c_{1,2}, & \ldots, & c_{1,n} \\ c_{2,1}, & c_{2,2}, & \ldots, & c_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n,1}, & c_{n,2}, & \ldots & c_{n,n} \end{vmatrix} = R.$$

Hieraus folgt nun sofort, dass

$$MN = R,$$

d. h.

$$\begin{vmatrix} a_{1,1}, & a_{1,2}, & \ldots, & a_{1,n} \\ a_{2,1}, & a_{2,2}, & \ldots, & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{n,1}, & a_{n,2}, & \ldots, & a_{n,1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{1,1}, & b_{1,2}, & \ldots, & b_{1,n} \\ b_{2,1}, & b_{2,2}, & \ldots, & b_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \\ b_{n,1}, & b_{n,2}, & \ldots, & b_{n,n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_{1,1}, & c_{1,2}, & \ldots, & c_{1,n} \\ c_{2,1}, & c_{2,2}, & \ldots, & c_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \\ c_{n,1}, & c_{n,2}, & \ldots, & c_{n,n} \end{vmatrix}, \quad (18)$$

wo die c nach (17) gebildet sind. Man sieht, dass zur Bildung der c die Horizontalreihen der ersten Determinante mit den Vertikalreihen der zweiten zu multipliziren sind. Beachtet man den in (3) ausgedrückten Satz, so sieht man, dass die c auch in anderer Weise gebildet werden können.

XVI. Prinzip des letzten Multiplikators. (§. 93.)

1) Wir wollen annehmen, M sey eine Funktion der Veränderlichen $x, x_1, \ldots, x_n$, welche der Gleichung

$$\frac{\partial (MX)}{\partial x} + \frac{\partial (MX_1)}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial (MX_n)}{\partial x_n} = 0 \quad (a)$$

genügt, wo $X, \ldots, X_n$ Funktionen von $x, \ldots, x_n$ und natürlich die Differentialquotienten partielle sind. Sey ferner φ eine Funktion derselben Veränderlichen, welche der Gleichung

$$X\frac{\partial\varphi}{\partial x}+X_1\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}+\ldots+X_n\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}=0 \qquad (b)$$

genügt, so genügt die Grösse M_1, bestimmt aus

$$M_1\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}=M \qquad (c)$$

der Gleichung

$$\frac{\partial(M_1X)}{\partial x}+\frac{\partial(M_1X_1)}{\partial x_1}+\ldots+\frac{\partial(M_1X_{n-1})}{\partial x_{n-1}}=0 \qquad (a')$$

vorausgesetzt, man habe aus $X, X_1, \ldots, X_{n-1}, M_1$ die Grösse x_n mittelst der Gleichung

$$\varphi=\alpha \qquad (d)$$

eliminirt, wo α eine willkürliche Konstante ist.

Setzen wir die erste Seite der zu beweisenden Gleichung (a′) gleich Z, so ist

$$\frac{Z}{M_1}=X\frac{\partial l(M_1)}{\partial x}+X_1\frac{\partial l(M_2)}{\partial x}+\ldots+X_{n-1}\frac{\partial l(M_1)}{\partial x_{n-1}}+\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial X_1}{\partial x_1}+\ldots+\frac{\partial X_{n-1}}{\partial x_{n-1}}.$$

Hier sind allerdings $X, \ldots, X_{n-1}, M_1$ bloss Funktionen von $x, \ldots, x_{n-1}$; allein da mittelst (d) die Grösse x_n aus denselben eliminirt wurde, so enthielten dieselben (wie vorausgesetzt) x_n, das hier als Funktion von $x, \ldots, x_{n-1}$, mittelst der Gleichung (d), auftritt. Betrachtet man also $X, \ldots, X_{n-1}, M_1$ unter der Form, die diese Grössen haben, ehe x_n eliminirt wurde, so ist

$$\frac{Z}{M_1}=X\frac{\partial l(M_1)}{\partial x}+\ldots+X_{n-1}\frac{\partial l(M_1)}{\partial x_{n-1}}+\frac{\partial X}{\partial x}+\ldots+\frac{\partial X_{n-1}}{\partial x_{n-1}}$$
$$+\frac{\partial l(M_1)}{\partial x_n}\left(X\frac{\partial x_n}{\partial x}+\ldots+X_{n-1}\frac{\partial x_n}{\partial x_{n-1}}\right)+\frac{\partial X}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial x}+\ldots+\frac{\partial X_{n-1}}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial x_{n-1}}, \qquad (e)$$

wo natürlich $\frac{\partial l(M_1)}{\partial x}$ hier und im Vorhergehenden nicht dieselbe Bedeutung haben. Die Grössen $\frac{\partial x_n}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial x_n}{\partial x_{n-1}}$ sind aus (d) zu ziehen, aus welcher Gleichung folgt:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial x_r}+\frac{\partial\varphi}{\partial x_r}=0,\quad \frac{\partial x_n}{\partial x_r}=-\frac{\frac{\partial\varphi}{\partial x_r}}{\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}}.$$

Demnach ist

$$X\frac{\partial x_n}{\partial x}+\ldots+X_{n-1}\frac{\partial x_n}{\partial x_{n-1}}=-\frac{1}{\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}}\left(X\frac{\partial\varphi}{\partial x}+X_1\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}+\ldots+X_{n-1}\frac{\partial\varphi}{\partial x_{n-1}}\right)=X_n,$$

wegen der Gleichung (b). Ferner ist:

$$\frac{\partial X}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial x}+\ldots+\frac{\partial X_{n-1}}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial x_{n-1}}=-\frac{1}{\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}}\left(\frac{\partial X}{\partial x_n}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\ldots+\frac{\partial X_{n-1}}{\partial x_n}\frac{\partial\varphi}{\partial x_{n-1}}\right).$$

Aber aus (b), d. h. aus

$$X\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\ldots+X_{n-1}\frac{\partial\varphi}{\partial x_{n-1}}=-X_n\frac{\partial\varphi}{\partial x_n},$$

folgt, wenn man nach x_n differenzirt, was man darf, da die Gleichung (b) eine identische seyn muss, und $x, \ldots, x_n$ als von einander unabhängig angesehen werden:

$$\frac{\partial X}{\partial x_n}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\ldots+\frac{\partial X_{n-1}}{\partial x_n}\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}+X\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial x_n}+\ldots+X_{n-1}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_{n-1}\,\partial x_n}=$$
$$-\frac{\partial X_n}{\partial x_n}\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}-X_n\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_n^2}.$$

Beachtet man, dass

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_r\,\partial x_n}=\frac{\partial l\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}\right)}{\partial x_r}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x_n},$$

so folgt hieraus:

$$\frac{\partial X}{\partial x_n}\frac{\partial\varphi_n}{\partial x}+\ldots+\frac{\partial X_{n-1}}{\partial x_{n-1}}\frac{\partial x_n}{\partial x_{n-1}}=\frac{\partial X_n}{\partial x_n}+X\frac{\partial l\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}\right)}{\partial x}+X_1\frac{\partial l\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}\right)}{\partial x}+\ldots$$
$$+X_n\frac{\partial l\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}\right)}{\partial x_n},$$

mithin

$$\frac{Z}{M_1}=X\frac{\partial l(M_1)}{\partial x}+\ldots+X_{n-1}\frac{\partial l(M_1)}{\partial x_{n-1}}+\frac{\partial X}{\partial x}+\ldots+\frac{\partial X_{n-1}}{\partial x_{n-1}}$$
$$+X_n\frac{\partial l(M_1)}{\partial x_n}+\frac{\partial X_n}{\partial x_n}+X\frac{\partial l\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}\right)}{\partial x}+\ldots+X_n\frac{\partial l\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}\right)}{\partial x_n}$$
$$=X\frac{\partial l\left(M_1\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}\right)}{\partial x}+X_1\frac{\partial l\left(M_1\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}\right)}{\partial x_1}+\ldots+X_n\frac{\partial l\left(M_1\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}\right)}{\partial x_n}+\frac{\partial X}{\partial x}+\ldots+\frac{\partial X_n}{\partial x}$$
$$=X\frac{\partial l(M)}{\partial x}+X_1\frac{\partial l(M)}{\partial x_1}+\ldots+X_n\frac{\partial l(M)}{\partial x_n}+\frac{\partial X}{\partial x}+\ldots+\frac{\partial X_n}{\partial x},$$

$$\frac{ZM}{M_1}=\frac{\partial(MX)}{\partial x}+\frac{\partial(MX_1)}{\partial x_1}+\ldots+\frac{\partial(MX_n)}{\partial x_n},$$

d. h. da M nicht Null ist, und eben so wenig $\frac{M}{M_1}=\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}$, indem wir voraussetzen müssen, die Grösse φ enthalte x_n, so ist, wegen (a), die Grösse $Z=0$, d. h. die (a') bewiesen.

2) Wir wollen annehmen, man habe die Gleichungen:

$$\frac{\partial x_1}{\partial x}=\frac{X_1}{X},\ \frac{\partial x_2}{\partial x}=\frac{X_2}{X},\ \ldots,\ \frac{\partial x_n}{\partial x}=\frac{X_n}{X}, \qquad (f)$$

wo X ganz wohl $=1$ seyn kann, und sey

$$\varphi_n = \alpha_n \qquad (g_1)$$

eine erste Integralgleichung des Systems (f), wo α_n eine willkürliche Konstante und φ_n eine Funktion von $x, x_1, \ldots, x_n$ ist, in welcher aber jedenfalls x_n vorkommt. Gesetzt ferner, man könne eine Funktion M von $x, x_1, \ldots, x_n$ finden, so dass identisch die Gleichung (a) befriedigt sey, so eliminire man mittelst (g_1) die Grösse x_n aus $X, X_1, \ldots, X_{n-1}$, $\frac{M}{\frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n}} = M_1$, und wird dann identisch haben:

$$\frac{\partial (M_1 X)}{\partial x} + \frac{\partial (M_1 X_1)}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial (M_1 X_{n-1})}{\partial x_{n-1}} = 0.$$

Sey nun die Gleichung

$$\varphi_{n-1} = \alpha_{n-1} \qquad (g_2)$$

eine weitere Integralgleichung der Gleichungen

$$\frac{\partial x_1}{\partial x} = \frac{X_1}{X}, \ldots, \frac{\partial x_{n-1}}{\partial x} = \frac{X_{n-1}}{X}, \qquad (f_1)$$

aus denen x_n mittelst (g_1) eliminirt ist, wo α_{n-1} eine neue willkürliche Konstante, und φ_{n-1} ausser α_n die Veränderlichen $x, \ldots, x_{n-1}$, letztere jedenfalls, enthalte. Eliminirt man nun mittelst (g_2) die Veränderliche x_{n-1} aus $X, \ldots, X_{n-1}$, $\frac{M_1}{\frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial x_{n-1}}} = M_2$, so wie aus dem Gleichungssystem

$$\frac{\partial x_1}{\partial x} = \frac{X_1}{X}, \ldots, \frac{\partial x_{n-2}}{\partial x} = \frac{X_{n-2}}{X}, \qquad (f_2),$$

so genügt M_2 der Gleichung

$$\frac{\partial (M_2 X)}{\partial x} + \frac{\partial (M_2 X_1)}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial (M_2 X_{n-2})}{\partial x_{n-2}} = 0,$$

und wenn dann

$$\varphi_{n-2} = \alpha_{n-2} \qquad (g_3)$$

eine Integralgleichung von (f_2) ist, die ausser α_n, α_{n-1} die neue Konstante α_{n-2} enthält, und wo φ_{n-2} die Veränderlichen $x, \ldots, x_{n-2}$, letztere sicher, enthalten muss, so eliminire man x_{n-2} mittelst (g_3) aus $X, \ldots, X_{n-3}$, $\frac{M_2}{\frac{\partial \varphi_{n-2}}{\partial x_{n-2}}} = M_3$ und es genügt M_3 der Gleichung

$$\frac{\partial (M_3 X)}{\partial x} + \frac{\partial (M_3 X_1)}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial (M_3 X_{n-3})}{\partial x_{n-3}} = 0.$$

Wie man hier fortfährt, ist klar. Sind also

$$\varphi_n = \alpha_n, \varphi_{n-1} = \alpha_{n-1}, \ldots, \varphi_2 = \alpha_2 \qquad (G)$$

Integralgleichungen des Systems (f), von denen die erste $x, \ldots x_n$, nebst der Konstanten α_n, die zweite $x, \ldots, x_{n-1}$ nebst den Konstanten $\alpha_n, \alpha_{n-1}, \ldots$ die letzte

x, x_1, x_2 nebst den Konstanten $\alpha_n, \alpha_{n-1}, \ldots, \alpha_2$ enthalte, und kommt in φ_n gewiss x_n, in φ_{n-1} gewiss $x_{n-1}, \ldots$ vor; ist ferner

$$M_{n-1} = \frac{M}{\frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial x_{n-1}} \cdots \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2}},$$

und genügt die Gleichung $\varphi_{n-r} = \alpha_{n-r}$ dem Gleichungssystem:

$$\frac{\partial x_1}{\partial x} = \frac{X_1}{X}, \ldots, \frac{\partial x_{n-r}}{\partial x_{n-r}} = \frac{X_{n-r}}{X}, \qquad (f_r)$$

wo man zuerst x_n mittelst der ersten Gleichung (G), dann x_{n-1} mittelst der zweiten, ..., x_{n-r+1} mittelst der r^{ten}, eliminirt, und eben so in M_{n-1} verfährt, indem hier zuletzt x_2 mittelst der letzten eliminirt, so hat man:

$$\frac{\partial (M_{n-1} X)}{\partial x} + \frac{\partial (M_{n-1} X_1)}{\partial x_1} = 0,$$

woraus nach §. 69 leicht folgt, dass $M_{n-1} X$ ein integrirender Faktor der Gleichung

$$\frac{\partial x_1}{\partial x} = \frac{X_1}{X}$$

ist, aus der $x_n, \ldots, x_2$ in der angegebenen Weise eliminirt sind.

Schreibt man diese Gleichung also unter die Form

$$M_{n-1} X \frac{\partial x_1}{\partial x} - M_{n-1} X_1 = 0,$$

so kann sie nach §. 69, I sofort integrirt werden, und man erhält die letzte Integralgleichung des Systems (f).

Anm. Es ist natürlich nothwendig, dass die Grössen $\varphi_n, \ldots, \varphi_2$ den der Gleichung (b) analogen genügen. So also muss φ_{n-r} identisch der Gleichung

$$X \frac{\partial \varphi_{n-r}}{\partial x} + X_1 \frac{\partial \varphi_{n-r}}{\partial x_1} + \ldots + X_{n-r} \frac{\partial \varphi_{n-r}}{\partial x_{n-r}} = 0$$

genügen. Da aber $\varphi_{n-r} = \alpha_{n-r}$ dem System (f_r) genügt, so ist identisch:

$$\frac{\partial \varphi_{n-r}}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_{n-r}}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial x} + \ldots + \frac{\partial \varphi_{n-r}}{\partial x_{n-r}} \frac{\partial x_{n-r}}{\partial x} = 0,$$

d. h.

$$\frac{\partial \varphi_{n-r}}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_{n-r}}{\partial x_1} \frac{X_1}{X} + \ldots + \frac{\partial \varphi_{n-r}}{\partial x_{n-r}} \frac{X_{n-r}}{X} = 0,$$

woraus die obige Gleichung folgt.

3) Das Gleichungssystem (f) ist ein solches von n Gleichungen zwischen $n+1$ Veränderlichen, so dass eine dieser letztern als unabhängig erscheint; welche, ist gleichgiltig. In (f) war x die unabhängig Veränderliche; wäre es x_r, so hätte man wegen

$$\frac{\partial x_s}{\partial x_r} = \frac{\frac{\partial x_s}{\partial x}}{\frac{\partial x_r}{\partial x}}$$

jetzt statt (f):

$$\frac{\partial x}{\partial x_r} = \frac{X}{X_r}, \quad \frac{\partial x_1}{\partial x_r} = \frac{X_1}{X_r}, \ldots, \frac{\partial x_n}{\partial x_r} = \frac{X_n}{X_r}.$$

Man kann aber auch statt des Systems (f) das folgende einführen:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = X, \frac{\partial x_1}{\partial t} = X_1, \ldots\ldots, \frac{\partial x_n}{\partial t} = X_n \qquad (f')$$

wo t die unabhängig Veränderliche ist, und $X, X_1, \ldots, X_n$ bloss von $x, x_1, \ldots, x_n$ abhängen. Dieses System kommt nämlich zunächst auf (f) zurück, wenn man x als unabhängig Veränderliche ansehen will, und wenn man mittelst (f) die Grössen $x_1, \ldots, x_n$ als Funktionen von x kennt, so gibt die erste Gleichung (f'):

$$t = \int \frac{\partial x}{X} + C.$$

In manchen Fällen ist es vielleicht bequemer, das System (f') statt (f) zu betrachten.

4) Denken wir uns etwa, man wolle in (f) statt $x, x_1, \ldots, x_n$ die Veränderlichen $y, y_1, \ldots, y_n$ einführen, die mit $x, x_1, \ldots, x_n$ durch $n+1$ Gleichungen zusammenhängen, so dass $y, \ldots, y_n$ durch $x, \ldots, x_n$ und umgekehrt ausgedrückt werden, so sind $y, \ldots, y_n$ eben auch Funktionen von t und man hat:

$$\frac{\partial y_r}{\partial t} = \frac{\partial y_r}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial y_r}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t} + \ldots + \frac{\partial y_r}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t} = \frac{\partial y_r}{\partial x}X + \frac{\partial y_r}{\partial x_1}X_1 + \ldots + \frac{\partial y_r}{\partial x_n}X_n,$$

so dass jetzt an die Stelle von (f') treten:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial y}{\partial t} &= \frac{\partial y}{\partial x}X + \frac{\partial y}{\partial x_1}X_1 + \ldots + \frac{\partial y}{\partial x_n}X_n, \\
\frac{\partial y_1}{\partial t} &= \frac{\partial y_1}{\partial x}X + \frac{\partial y_1}{\partial x_1}X_1 + \ldots + \frac{\partial y_1}{\partial x_n}X_n, \\
&\vdots \qquad \vdots \\
\frac{\partial y_n}{\partial t} &= \frac{\partial y_n}{\partial x}X + \frac{\partial y_n}{\partial x_1}X_1 + \ldots + \frac{\partial y_n}{\partial x_n}X_n,
\end{aligned}\right\} \qquad (F')$$

Hier sind die Grössen $\frac{\partial y}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial y_n}{\partial x_n}$, durch $y, y_1, \ldots, y_n$ zu ersetzen, indem man zuerst $y, \ldots, y_n$ nach $x, \ldots, x_n$ partiell differenzirt und dann die $x, x_1, \ldots, x_n$ durch ihre Werthe in $y, \ldots, y_n$ ausdrückt; eben so sind $X, \ldots, X_n$ durch $y, \ldots, y_n$ auszudrücken. Das Gleichungssystem (F') zwischen $t, y, y_1, \ldots, y_n$ kann dann leicht in eines bloss zwischen $y, \ldots, y_n$ umgeschrieben werden. Die Integration des Systems (f') führt auch die von (F') mit sich, und umgekehrt

Setzt man also zur Abkürzung

$$X\frac{\partial y}{\partial x} + X_1\frac{\partial y}{\partial x_1} + \ldots + X_n\frac{\partial y}{\partial x_n} = Y, \ldots, X\frac{\partial y_n}{\partial x} + X_1\frac{\partial y_n}{\partial x_1} + \ldots X_n\frac{\partial y_n}{\partial x_n} = Y_n,$$

so hat man statt (f'):

$$\frac{\partial y}{\partial t} = Y, \frac{\partial y_1}{\partial t} = Y_1, \ldots\ldots, \frac{\partial y_n}{\partial t} = Y_n, \qquad (F')$$

wo also $Y, \ldots, Y_n$ als Funktionen von $y, \ldots, y_n$ anzusehen sind. Betrachten wir

nun Y_r, so erscheint diese Grösse zunächst als Funktion von $x, \ldots, x_n$, und erst nachdem diese Grössen durch $y, \ldots, y_n$ ersetzt sind, als Funktion dieser letztern. Daraus folgt also, dass etwa

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Y_r}{\partial y_r} &= \frac{\partial Y_r}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y_r} + \frac{\partial Y_r}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial y_r} + \ldots + \frac{\partial Y_r}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial y_r} \\
&= \left(\frac{\partial X}{\partial x}\frac{\partial y_r}{\partial x} + \frac{\partial X_1}{\partial x}\frac{\partial y_r}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial X_n}{\partial x}\frac{\partial y_r}{\partial x_n}\right)\frac{\partial x}{\partial y_r} + \left(X\frac{\partial^2 y_r}{\partial x^2} + X_1\frac{\partial^2 y_r}{\partial x_1\,\partial x} + \ldots\ldots \right.\\
&\quad \left. + X_n\frac{\partial^2 y_r}{\partial x_n\,\partial x}\right)\frac{\partial x}{\partial y_r} \\
&+ \left(\frac{\partial X}{\partial x_1}\frac{\partial y_r}{\partial x} + \frac{\partial X_1}{\partial x_1}\frac{\partial y_r}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial X_n}{\partial x_1}\frac{\partial y_r}{\partial x_n}\right)\frac{\partial x_1}{\partial y_r} + \left(X\frac{\partial^2 y_r}{\partial x\,\partial x_1} + X_1\frac{\partial^2 y_r}{\partial x_1^2} + \ldots\ldots \right.\\
&\quad \left. + X_n\frac{\partial^2 y_r}{\partial x_n\,\partial x_1}\right)\frac{\partial x_1}{\partial y_r} \\
&+ \ldots\ldots \\
&+ \left(\frac{\partial X}{\partial x_n}\frac{\partial y_r}{\partial x} + \frac{\partial X_1}{\partial x_n}\frac{\partial y_r}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial X_n}{\partial x_n}\frac{\partial y_r}{\partial x_n}\right)\frac{\partial x_n}{\partial y_r} + \left(X\frac{\partial^2 y_r}{\partial x_n\,\partial x} + X_1\frac{\partial^2 y_r}{\partial x_n\,\partial x_1} + \ldots \right.\\
&\quad \left. + X_n\frac{\partial^2 y_r}{\partial x_n^2}\right)\frac{\partial x_n}{\partial y_r}.
\end{aligned}$$

Daraus folgt weiter, dass

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Y_1}{\partial y_1} + \ldots + \frac{\partial Y_n}{\partial y_n} &= \frac{\partial X}{\partial x}\Sigma\frac{\partial y_r}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y_r} + \frac{\partial X_1}{\partial x}\Sigma\frac{\partial y_r}{\partial x_1}\frac{\partial x}{\partial y_r} + \ldots + \frac{\partial X_n}{\partial x}\Sigma\frac{\partial y_r}{\partial x_n}\frac{\partial x}{\partial y_r} \\
&+ \frac{\partial X}{\partial x_1}\Sigma\frac{\partial y_r}{\partial x}\frac{\partial x_1}{\partial y_r} + \frac{\partial X_1}{\partial x_1}\Sigma\frac{\partial y_r}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial y_r} + \ldots + \frac{\partial X_n}{\partial x_1}\Sigma\frac{\partial y_r}{\partial x_n}\frac{\partial x_1}{\partial y_r} \\
&+ \ldots\ldots \\
&+ \frac{\partial X}{\partial x_n}\Sigma\frac{\partial y_r}{\partial x}\frac{\partial x_n}{\partial y_r} + \frac{\partial X_1}{\partial x_n}\Sigma\frac{\partial y_r}{\partial x_1}\frac{\partial x_n}{\partial y_r} + \ldots + \frac{\partial X_n}{\partial x_n}\Sigma\frac{\partial y_r}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial y_r} \\
&+ X\Sigma\frac{\partial^2 y_r}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial y_r} + X_1\Sigma\frac{\partial^2 y_r}{\partial x\,\partial x_1}\frac{\partial x}{\partial y_r} + \ldots + X_n\Sigma\frac{\partial^2 y_r}{\partial x_n\,\partial x}\frac{\partial x}{\partial y_r} \\
&+ X\Sigma\frac{\partial^2 y_r}{\partial x\,\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial y_r} + X_1\Sigma\frac{\partial^2 y_r}{\partial x_1\,\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial y_r} + \ldots + X_n\Sigma\frac{\partial^2 y_r}{\partial x_1\,\partial x_n}\frac{\partial x_1}{\partial y_r} \\
&+ \ldots\ldots \\
&+ X\Sigma\frac{\partial^2 y_r}{\partial x_n\,\partial x}\frac{\partial x_n}{\partial y_r} + X_1\Sigma\frac{\partial^2 y_r}{\partial x_n\,\partial x_1}\frac{\partial x_n}{\partial y_r} + \ldots + X_n\Sigma\frac{\partial^2 y_r}{\partial x_n\,\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial y_r},
\end{aligned}$$

worin das Summenzeichen sich auf $r = 0, 1, 2, \ldots, n$ bezieht. Aber es ist, wenn man x nach $x, \ldots, x_n$ differenzirt, oder allgemein x_s nach $x, \ldots, x_s, \ldots, x_n$:

$$0 = \frac{\partial x_s}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial x_s}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x} + \ldots + \frac{\partial x_s}{\partial y_n}\frac{\partial y_n}{\partial x}, \text{ d. h. } \quad \Sigma\frac{\partial y_r}{\partial x}\frac{\partial x_s}{\partial y_r} = 0, \qquad (g)$$

$$\left.\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial x_s}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x_1} + \frac{\partial x_s}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial x_s}{\partial y_n}\frac{\partial y_n}{\partial x_1}, \\
&\vdots \\
1 &= \frac{\partial x_s}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x_s} + \frac{\partial x_s}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_s} + \ldots + \frac{\partial x_s}{\partial y_n}\frac{\partial y_n}{\partial x_s}, \\
&\vdots \\
0 &= \frac{\partial x_s}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x_n} + \frac{\partial x_s}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_n} + \ldots + \frac{\partial x_s}{\partial y_n}\frac{\partial y_n}{\partial x_n},
\end{aligned}\right. \quad \text{d. h.} \quad
\begin{aligned}
&\Sigma \frac{\partial y_r}{\partial x_1}\frac{\partial x_s}{\partial y_r} = 0, \\
&\vdots \\
&\Sigma \frac{\partial y_r}{\partial x_s}\frac{\partial x_s}{\partial y_r} = 1, \\
&\vdots \\
&\Sigma \frac{\partial y_r}{\partial x_n}\frac{\partial x_s}{\partial y_r} = 0,
\end{aligned} \qquad (g)$$

woraus folgt, dass in obigem Ausdruck der erste Theil gleich $\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial X_n}{\partial x_n}$ ist.

Was den zweiten Theil anbelangt, so übersieht man leicht, dass derselbe gleich ist der Grösse

$$X \Sigma \frac{\partial}{\partial y_r}\left(\frac{\partial y_r}{\partial x}\right) + X_1 \Sigma \frac{\partial}{\partial y_r}\left(\frac{\partial y_r}{\partial x_1}\right) + \ldots + X_n \Sigma \frac{\partial}{\partial y_r}\left(\frac{\partial y_r}{\partial x_n}\right),$$

wie er ja ohnehin geradezu so entstanden ist. Gesetzt nun es sey

$$\begin{vmatrix}
\frac{\partial y}{\partial x}, & \frac{\partial y}{\partial x_1}, & \ldots, & \frac{\partial y}{\partial x_n} \\
\frac{\partial y_1}{\partial x}, & \frac{\partial y_1}{\partial x_1}, & \ldots, & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\
\vdots & & \vdots & \\
\frac{\partial y_n}{\partial x}, & \frac{\partial y_n}{\partial x_1}, & \ldots, & \frac{\partial y_n}{\partial x_n}
\end{vmatrix} = P, \qquad (h)$$

so besteht P aus einer Reihe von Gliedern, die jedes die Funktionen $y, y_1, \ldots, y_n$, bezüglich einen ihrer partiellen Differentialquotienten enthalten. Da jede dieser Grössen wieder von x_s abhängt ($s = 0, 1, \ldots, n$) so ist leicht zu sehen, dass

$$\frac{\partial P}{\partial x_s} = \Sigma_r \Sigma_\varrho \frac{\partial P}{\partial\left(\frac{\partial y_r}{\partial x_\varrho}\right)} \frac{\partial^2 y_r}{\partial x_\varrho \partial x_s},$$

wo die Summenzeichen sich auf $r = 0, 1, \ldots, n$, und $\varrho = 0, 1, \ldots, n$ beziehen. Aus den Gleichungen (g) folgt aber, wenn man s durch ϱ ersetzt (XV, 5):

$$P\frac{\partial x_\varrho}{\partial y_r} = \frac{\partial P}{\partial\left(\frac{\partial y_r}{\partial x_\varrho}\right)}, \text{ also } \frac{\partial P}{\partial x_s} = P \Sigma_r \Sigma_\varrho \frac{\partial^2 y_r}{\partial x_\varrho \partial x_s}\frac{\partial x_\varrho}{\partial y_r}.$$

Aber es ist

$$\Sigma \frac{\partial}{\partial y_r}\left(\frac{\partial y_r}{\partial x_s}\right) = \Sigma\left(\frac{\partial^2 y_r}{\partial x\, \partial x_s}\frac{\partial x}{\partial y_r} + \frac{\partial^2 y_r}{\partial x_1\, \partial x_s}\frac{\partial x_1}{\partial x_r} + \ldots + \frac{\partial^2 y_r}{\partial x_n\, \partial x_s}\frac{\partial x_n}{\partial y_r}\right)$$
$$= \Sigma_r \Sigma_\varrho \frac{\partial^2 y_r}{\partial x_\varrho\, \partial x_s}\frac{\partial x_\varrho}{\partial y_r},$$

so dass endlich der zweite Theil gleich

$$\frac{1}{P}\left(X\frac{\partial P}{\partial x}+X_1\frac{\partial P}{\partial x_1}+\ldots+X_n\frac{\partial P}{\partial x_n}\right),$$

und mithin

$$\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Y_1}{\partial y_1}+\ldots+\frac{\partial Y_n}{\partial y_n}=\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial X_1}{\partial x_1}+\ldots+\frac{\partial X_n}{\partial x_n}+\frac{1}{P}\left(X\frac{\partial P}{\partial x}+X_1\frac{\partial P}{\partial x_1}+\ldots+X_n\frac{\partial P}{\partial x_n}\right)$$

ist. Was nun auch R sey, so ist

$$X\frac{\partial R}{\partial x}+X_1\frac{\partial R}{\partial x_1}+\ldots+X_n\frac{\partial R}{\partial x_n}=Y\frac{\partial R}{\partial y}+Y_1\frac{\partial R}{\partial y_1}+\ldots+Y_n\frac{\partial R}{\partial y_n},$$

wie man leicht findet, wenn man beachtet, dass

$$\frac{\partial R}{\partial x_r}=\frac{\partial R}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x_r}+\ldots+\frac{\partial R}{\partial y_n}\frac{\partial y_n}{\partial x_r};$$

demnach für $R=\frac{M}{P}$, wenn man beide letzten Gleichungen beachtet und $\frac{1}{P}=Q$ setzt:

$$X\frac{\partial(MQ)}{\partial x}+\ldots+X_n\frac{\partial(MQ)}{\partial x_n}+QM\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\ldots+\frac{\partial X_n}{\partial x_n}\right)-M\left(X\frac{\partial Q}{\partial x}+\ldots+X_n\frac{\partial Q}{\partial x_n}\right)$$

$$=Y\frac{\partial(MQ)}{\partial y}+\ldots+Y_n\frac{\partial(MQ)}{\partial y_n}+QM\left(\frac{\partial Y}{\partial y}+\ldots+\frac{\partial Y_n}{\partial y_n}\right),$$

d. h.

$$\frac{\partial(MQY)}{\partial y}+\frac{\partial(MQY_1)}{\partial y}+\ldots+\frac{\partial(MQY_n)}{\partial y_n}=Q\left[\frac{\partial(MX)}{\partial x}+\frac{\partial(MX_1)}{\partial x_1}+\ldots+\frac{\partial(MX_n)}{\partial x_n}\right].$$

Ist nun M so beschaffen, dass es der Gleichung (a) genügt, so ist hiernach

$$\frac{\partial(MQY)}{\partial y}+\frac{\partial(MQY_1)}{\partial y_1}+\ldots+\frac{\partial(MQY_n)}{\partial y_n}=0. \qquad \text{(i)}$$

5) Gesetzt nun, $y_n, y_{n-1}, \ldots, y_2$ seyen solche Funktionen von $x, \ldots, x_n$, dass

$$y_n=\alpha_n,\ y_{n-1}=\alpha_{n-1},\ \ldots,\ y_2=\alpha_2 \qquad \text{(k)}$$

den Gleichungen (f) genügen, wenn $\alpha_n, \ldots, \alpha_2$ willkürliche Konstanten sind, die in $y_n, \ldots, y_2$ nicht vorkommen, so werden die Grössen $Y_n, \ldots, Y_2$ identisch Null seyn, da ja

$$\frac{\partial y_n}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\ldots+\frac{\partial y_n}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t}=0,\ \text{d. h.}\ \frac{\partial y_n}{\partial x}X+\frac{\partial y_n}{\partial x_1}X_1+\ldots+\frac{\partial y_n}{\partial x_n}X_n=0;$$

demnach wird die (i) zu

$$\frac{\partial(MQY)}{\partial y}+\frac{\partial(MQY_1)}{\partial y_1}=0 \qquad \text{(i')}$$

und sagt aus, es sey die Gleichung

$$Y\frac{\partial y_1}{\partial t}-Y_1\frac{\partial y}{\partial t}=0, \qquad \text{(l)}$$

wenn sie mit MQ multipizirt werde, unmittelbar integrabel (was auch y und y_1 für Funktionen von t seyn mögen). Diese Gleichung gehört aber zum System (F'), und wenn sie integrirt ist, gibt sie einen Zusammenhang zwischen y und y_1. Was diese letzteren Grössen anbelangt, so sind sie ganz willkürliche Funktionen von $x, x_1, \ldots$

.., x_n, so dass man mittelst derselben und der Gleichungen (k) die nöthige Anzahl Gleichungen hat, um die x durch die y ausdrücken zu können, wie es das System (F') verlangt. Das System (F') ersetzt aber (f'), so dass durch die Integration des erstern auch die des letztern vollzogen ist. Daraus nun erhält man den folgenden Lehrsatz:

„Sind $\varphi_n(x, x_1, \ldots, x_n) = \alpha_n$, $\varphi_{n-1}(x, \ldots, x_n) = \alpha_{n-1}$, $\varphi_2(x, \ldots, x_n) = \alpha_2$ Integrale des Systems (f); sind ferner $\varphi_1(x, \ldots, x_n)$, $\varphi(x, \ldots, x_n)$ ganz beliebige Funktionen von x, ..., x_n, und man bestimmt aus den Gleichungen

$$\varphi_n(x, \ldots, x_n) = y_n, \ldots, \varphi_1(x, \ldots, x_n) = y_1, \varphi(x, \ldots, x_n) = y$$

die Grössen x, ..., x_n in y, ..., y_n, ersetzt dann in der Grösse P, die durch (h) gegeben ist, so wie in

$$Y = X\frac{\partial y}{\partial x} + X_1\frac{\partial y}{\partial x_1} + \ldots + X_n\frac{\partial y}{\partial x_n}, \quad Y_1 = X\frac{\partial y_1}{\partial x} + X_1\frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \ldots + X_n\frac{\partial y_1}{\partial x_n}$$

überall x, ..., x_n durch y, ..., y_n, so wird die Gleichung

$$-\int\frac{MY_1}{P}\partial y + \int\left(\frac{MY}{P} + \frac{\partial\int\frac{MY_1}{P}\partial y}{\partial y_1}\right)\partial y_1 = C,$$

wo M (von 0 und ∞ verschieden) eine Auflösung der Gleichung (a) ist, das n^{te} Integral des Systems (f) seyn, wenn man hier y und y_1 durch φ und φ_1 ersetzt."

Setzt man speziell $\varphi = x$, $\varphi_1 = x_1$, so ist $\frac{\partial y}{\partial x} = 1$, $\frac{\partial y}{\partial x_1} = \ldots = \frac{\partial y}{\partial x_n} = 0$, $\frac{\partial y_1}{\partial x_1} = 1$, $\frac{\partial y_1}{\partial x} = \frac{\partial y_1}{\partial x_2} = \ldots = \frac{\partial y_1}{\partial x_n} = 0$, so dass

$$P = \begin{vmatrix} 1, & 0, & 0, & \ldots, & 0 \\ 0, & 1, & 0, & \ldots, & 0 \\ \frac{\partial y_2}{\partial x}, & \frac{\partial y_2}{\partial x_1}, & \frac{\partial y_2}{\partial x_2}, & \ldots, & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots & & \\ \frac{\partial y_n}{\partial x}, & \frac{\partial y_n}{\partial x_1}, & \frac{\partial y_n}{\partial x_2}, & \ldots, & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2}, & \ldots, & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_2}, & \ldots, & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} = P_1 \qquad (h')$$

$Y = X$, $Y_1 = X_1$ ist. Denken wir uns nun, man drücke mittelst der gefundenen Gleichungen $\varphi_n = \alpha_n, \ldots, \varphi_2 = \alpha_2$ die Grössen $x_2, \ldots, x_n$ durch x, x_1 aus und setze diese Werthe in X, X_1, M, P, so wird jetzt MQY so wie MQY_1 nur noch x und x_1 enthalten, so dass

$$\frac{\partial(MQY_1)}{\partial y_1} = \frac{\partial(MQX_1)}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y_1} + \frac{\partial(MQX_1)}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial y_1} = \frac{\partial(MQX_1)}{\partial x_1},$$

$$\frac{\partial(MQY)}{\partial y} = \frac{\partial(MQX)}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial(MQX)}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial y} = \frac{\partial(MQX)}{\partial x},$$

da $\frac{\partial x}{\partial y_1} = \frac{\partial x_1}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial x_1}{\partial y_1} = 1 = \frac{\partial x}{\partial y}$, demnach folgt aus (i'), freilich immer unter der gemachten Voraussetzung:

$$\frac{\partial(MQX_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(MQX)}{\partial x} = 0,$$

d. h: MQ ist ein Integrationsfaktor der Gleichung

$$X\frac{\partial x_1}{\partial x}-X_1=0.$$

Daraus folgt als zweiter Lehrsatz:

„Drückt man mittelst $n-1$ gefundener Integralgleichungen des Systems (f) die Veränderlichen $x_2, \ldots, x_n$ durch x und x_1 (nebst den willkürlichen Konstanten) aus, und setzt in M, P, X, X_1 für jene Grössen die so erhaltenen Werthe ein, so wird

$$-\int\frac{MX_1}{P}\partial x+\int\left(\frac{MX}{P}+\frac{\partial\int\frac{MX}{P}\partial x}{\partial x_1}\right)\partial x_1=C$$

die n^{te} Integralgleichung seyn."

Dieser Satz ist, wie man leicht sieht, nur die Verallgemeinerung des in Nr. 2 enthaltenen. Zum Ueberfluss kann man denselben leicht daraus folgern.

Seyen nämlich wieder $\varphi_n=\alpha_n, \ldots, \varphi_2=\alpha_2$ die $n-1$ bekannten Gleichungen, wie wir so eben annahmen; man ziehe aus der ersten x_n und setze diesen Werth in die zweite; aus dieser neuen zweiten ziehe man x_{n-1} und setze dessen Werth in die dritte, ..., und seyen die so erhaltenen Gleichungen:

$$\psi_n=a_n,\ \psi_{n-1}=a_{n-1}, \ldots, \psi_2=a_2,$$

wo also ψ_{n-r} die Grössen $x_n, \ldots, x_{n-r+1}$ nicht enthält, so wird nach Nr. 2 die Grösse

$$M_{n-1}=\frac{M}{\frac{\partial\psi_n}{\partial x_n}\frac{\partial\psi_{n-1}}{\partial x_{n-1}}\cdots\frac{\partial\psi_2}{\partial x_2}},$$

wo in M_{n-1} wirklich $x_n, \ldots, x_2$ durch x, x_1 zu ersetzen sind, der letzte Multiplikator sein. Wir haben also bloss zu zeigen, dass $P=\frac{\partial\psi_n}{\partial x_n}\cdots\frac{\partial\psi_2}{\partial x_2}$ ist. Nun ist aber zunächst $\frac{\partial\psi_n}{\partial x_n}=\frac{\partial\varphi_n}{\partial x_n}$. Was ψ_{n-1} anbelangt, so geht diese Grösse aus φ_{n-1} hervor, wenn man x_n aus $\varphi_n=\alpha_n$ in φ_{n-1} einsetzt. Daraus folgt:

$$\frac{\partial\psi_{n-1}}{\partial x_{n-1}}=\frac{\partial\varphi_{n-1}}{\partial x_{n-1}}+\frac{\partial\varphi_{n-1}}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial x_{n-1}},\ \text{wo}\ \frac{\partial\varphi_n}{\partial x_{n-1}}+\frac{\partial\varphi_n}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial x_{n-1}}=0,$$

$$\frac{\partial\psi_n}{\partial x_n}\frac{\partial\psi_{n-1}}{\partial x_{n-1}}=\frac{\partial\varphi_{n-1}}{\partial x_{n-1}}\frac{\partial\varphi_n}{\partial x_n}-\frac{\partial\varphi_{n-1}}{\partial x_n}\frac{\partial\varphi_n}{\partial x_{n-1}}=\begin{vmatrix}\frac{\partial\varphi_{n-1}}{\partial x_{n-1}}, & \frac{\partial\varphi_{n-1}}{\partial x_n}\\ \frac{\partial\varphi_n}{\partial x_{n-1}}, & \frac{\partial\varphi_n}{\partial x_n}\end{vmatrix}=P_{n-2},$$

wenn $\frac{\partial\psi_n}{\partial x_n}=P_{n-1}$. Dann eben so

$$\frac{\partial\psi_{n-2}}{\partial x_{n-2}}=\frac{\partial\varphi_{n-2}}{\partial x_{n-2}}+\frac{\partial\varphi_{n-2}}{\partial x_{n-1}}\frac{\partial x_{n-1}}{\partial x_{n-2}}+\frac{\partial\varphi_{n-2}}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial x_{n-2}},$$

$$0=\frac{\partial\varphi_{n-1}}{\partial x_{n-2}}+\frac{\partial\varphi_{n-1}}{\partial x_{n-1}}\frac{\partial x_{n-1}}{\partial x_{n-2}}+\frac{\partial\varphi_{n-1}}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial x_{n-2}},$$

$$0=\frac{\partial\varphi_n}{\partial x_{n-2}}+\frac{\partial\varphi_n}{\partial x_{n-1}}\frac{\partial x_{n-1}}{\partial x_{n-2}}+\frac{\partial\varphi_n}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial x_{n-2}},$$

so dass

$$P_{n-2}\frac{\partial\psi_{n-2}}{\partial x_{n-2}}=P_{n-3}=\begin{vmatrix}\frac{\partial\varphi_{n-2}}{\partial x_{n-2}}, & \ldots, & \frac{\partial\varphi_{n-2}}{\partial x_n}\\ \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial\varphi_n}{\partial x_{n-2}}, & \ldots, & \frac{\partial\varphi_n}{\partial x_n}\end{vmatrix}=\frac{\partial\psi_n}{\partial x_n}\frac{\partial\psi_{n-1}}{\partial x_{n-1}}\frac{\partial\psi_{n-2}}{\partial x_{n-2}}.$$

In dieser Weise geht man leicht weiter fort und findet den angegebenen Satz.

Was den im ersten Lehrsatz gebrauchten Werth von P betrifft, so kann er mittelst des Satzes XV, 11 auch etwas anders ausgedrückt werden. Ist nämlich

$$\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial y}, & \frac{\partial x}{\partial y_1}, & \ldots, & \frac{\partial x}{\partial y_n}\\ \frac{\partial x_1}{\partial y}, & \frac{\partial x_1}{\partial y_1}, & \ldots, & \frac{\partial x_1}{\partial y_n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial x_n}{\partial y}, & \frac{\partial x_n}{\partial y_1}, & \ldots, & \frac{\partial x_n}{\partial y_n}\end{vmatrix}=L,$$

so folgt aus (g):

$$S.P=\begin{vmatrix}1,0,0,\ldots,0\\ 0,1,0,\ldots,0\\ \vdots \\ 0,0,0,\ldots,1\end{vmatrix}=1,\ P=\frac{1}{S},\ \text{d. h. } Q=S.$$

Wir wollen nun noch einige Beispiele zufügen, die wir der berühmten Abhandlung Jacobis: „Theoria nova multiplicatoris systemati aequationum differentialium vulgarium applicandi" (Crelle's Journal, XXVII und XXIX) entnehmen.

6) Angenommen, es sey X eine blosse Funktion von x, Z eine solche von x und y; sey ferner $\frac{\partial y}{\partial x}=u$ eine erste Integralgleichung von $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+X\frac{\partial y}{\partial x}+Z=0$, wo u eine Funktion von x, y und einer willkürlichen Konstanten α ist, so hat man, wenn $\frac{\partial y}{\partial x}=z$:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-(Xz+Z),\ \frac{\partial y}{\partial x}=z$$

als gleichzeitige Integralgleichungen, während $z=u$ eine Integralgleichung derselben ist. In (f) ist also $x_1=y,\ x_2=z;\ X_1=z,\ X_2=-(Xz+Z),\ X=1$; die (a) ist demnach:

$$\frac{\partial(M)}{\partial x}+\frac{\partial(Mz)}{\partial y}-\frac{\partial[M(Xz+Z)]}{\partial z}=0,\ \frac{\partial M}{\partial x}+z\frac{\partial M}{\partial y}-(Xz+Z)\frac{\partial M}{\partial z}-MX=0,$$

welche Gleichung sicher befriedigt ist, wenn man $M=e^{\int X\partial x}$ setzt. Drückt man also x_2, d. h. z durch x und y aus, d. h. ersetzt einfach z durch u in X_1, wodurch X_1 zu u wird, so bleibt noch P zu ermitteln. Diese Grösse ist $=\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2}=\frac{\partial\varphi_2}{\partial z}$, wo φ_2 der Werth von α ist, wie er aus $z-u=0$ folgt, so dass man hiefür auch $\frac{\partial\alpha}{\partial z}$ schreiben kann. Nun ist aber aus $z-u=0$; $1-\frac{\partial u}{\partial\alpha}\frac{\partial\alpha}{\partial z}=0$, also $\frac{\partial\alpha}{\partial z}=\frac{1}{\frac{\partial u}{\partial\alpha}}$, so dass $P\frac{\partial u}{\partial\alpha}=1$. Demnach ist

$$-\int e^{\int X \partial x} u \frac{\partial u}{\partial \alpha} \partial x + \int \left[e^{\int X \partial x} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\partial \int e^{\int X \partial x} u \frac{\partial u}{\partial \alpha} \partial x}{\partial y} \right] \partial y = C,$$

die zweite Integralgleichung der vorgelegten, d. h. da sie nur x und y enthält, ist sie die endliche Integralgleichung.

So genügt der Gleichung $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \left(3 - \frac{1}{x}\right) \frac{\partial y}{\partial x} - \frac{3y}{x} = 0$: $\frac{\partial y}{\partial x} = 2\alpha x - 3y$, wie man sich leicht überzeugt. Demnach $X = 3 - \frac{1}{x}$, $e^{\int X \partial x} = \frac{e^{3x}}{x}$, $u = 2\alpha x - 3y$, $\frac{\partial u}{\partial \alpha} = 2x$; $e^{\int X \partial x} u \frac{\partial u}{\partial \alpha} = 4\alpha x e^{3x} - 6y e^{3x}$, $\int e^{\int X \partial x} u \frac{\partial u}{\partial \alpha} \partial x = 4\alpha e^{3x}\left(x - \frac{1}{3}\right) - 2y e^{3x}$, $e^{\int X \partial x} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\partial}{\partial y} \int e^{\int X \partial x} u \frac{\partial u}{\partial \alpha} \partial x = 2e^{3x} - 2e^{3x} = 0$, so dass

$$4\alpha e^{3x}\left(x - \frac{1}{3}\right) - 2y e^{3x} = C; \quad y = Ce^{-3x} + C'\left(x - \frac{1}{3}\right)$$

die Integralgleichung von $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \left(3 - \frac{1}{x}\right) \frac{\partial y}{\partial x} - \frac{3y}{x} = 0$ ist.

7) Sey φ eine beliebige Funktion von x und y, dessgleichen ψ, und man habe von der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial x} + \psi = 0$$

als eine erste Integralgleichung gefunden $\frac{\partial y}{\partial x} = u$, wo u wie in Nr. 6 beschaffen ist, so hat man wieder

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\left(\frac{1}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial y} z^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial x} z + \psi\right), \quad \frac{\partial y}{\partial x} = z.$$

Demnach, wenn man die Bezeichnungen von vorhin beibehält:

$$\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial (Mz)}{\partial y} - \frac{\partial \cdot \left[\frac{1}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial y} z^2 + \frac{\partial \varphi}{\partial x} z + \psi \cdot\right] M}{\partial z} = 0, \quad M = e^{\varphi},$$

woraus dann folgt, dass

$$-\int e^{\varphi} u \frac{\partial u}{\partial \alpha} \partial x + \int \left[e^{\varphi} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{\partial \int e^{\varphi} u \frac{\partial u}{\partial \alpha} \partial x}{\partial y} \right] \partial y = C$$

die allgemeine Integralgleichung der vorgelegten ist.

7) Seyen die gleichzeitig vorgelegten Differentialgleichungen (f) von der Form

$$\frac{\partial x_1}{\partial t} = A'_1 x_1 + A'_2 x_2 + \ldots + A'_n x_n = X_1,$$
$$\frac{\partial x_2}{\partial t} = A_1'' x_1 + A_2'' x_2 + \ldots + A_n'' x_n = X_2,$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$\frac{\partial x_n}{\partial t} = A_1^{(n)} x_1 + A_2^{(n)} x_2 + \ldots + A_n^{(n)} x_n = X_n,$$

wo die Grössen A sämmtlich nur von t abhängen, so ist die (a), in der $x = t$, $X = 1$:

$$\frac{\partial M}{\partial t} + X_1 \frac{\partial M}{\partial x_1} + \ldots + X_n \frac{\partial M}{\partial x_n} + M\left(\frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial X_2}{\partial x_2} + \ldots + \frac{\partial X_n}{\partial x_n}\right) = 0,$$

d. h. $$\frac{\partial M}{\partial t} + X_1 \frac{\partial M}{\partial x_1} + \ldots + X_x \frac{\partial M}{\partial x_n} + M(A_1' + A_2'' + \ldots + A_n^{(n)}) = 0,$$

welcher Gleichung genügt wird durch

$$M = e^{-\int (A_1' + A_2'' + \dots A_n^{(n)}) \partial t},$$

da dann $\frac{\partial . M}{\partial x_1} = 0, \dots, \frac{\partial . M}{\partial x_n} = 0.$

XVII.

Wir haben im zehnten Abschnitte die Formeln zusammengestellt, die zur Berechnung von Oberflächen u. s. w. dienen. Dazu nun wollen wir noch die folgenden Zusätze hier beifügen.

I. Setzt man in der Formel (a) des §. 58 $z=0$, so erhält man den Inhalt der in der Ebene der xy liegenden, von der Kurve MN (Fig. 41) umschlossenen Fläche. Dieselbe ist also $\int_a^b \partial x \int_{y_1}^{y_2} \partial y$, welche Formel im Grunde an die Stelle von (c) in §. 53 gehört. Setzt man hier $x = r\cos\omega$, $y = r\sin\omega$, und formt das Doppelintegral nach §. 52 um, so ist $\frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial \omega} - \frac{\partial x}{\partial \omega}\frac{\partial y}{\partial r} = r$, also die Fläche $= \int \partial r \int r \partial \omega = \int \partial \omega \int r \partial r$, wo nun die Gränzen den Bedingungen der Aufgabe gemäss zu wählen sind. Sind diese dieselben, wie in Fig. 21, so ist die dortige Fläche $BOC = \int_{\omega_1}^{\omega_2} \partial \omega \int_0^r r \partial r = \frac{1}{2} \int_{\omega_1}^{\omega_2} r^2 \partial \varphi$, wo r aus der Gleichung der Kurve zu entnehmen ist. Dies ist die Formel des §. 53, S. 208.

II. So wie man in der Formel des §. 59, V φ als unabhängig angesehen, hätte man auch ψ oder r als solche Grösse betrachten dürfen. Dadurch ergeben sich aber für die Bogenlänge die zwei weitern Formeln:

$$\int_{\psi_0}^{\psi_1} \sqrt{\left(\frac{\partial r}{\partial \psi}\right)^2 + r^2 + r^2 \cos^2\psi \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \psi}\right)^2} \, \partial \psi, \quad \int_{r_0}^{r_1} \sqrt{1 + r^2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial r}\right)^2 + r^2 \cos^2\psi \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right)^2} \, \partial r,$$

wenn im ersten Integrale ψ_0, ψ_1 die äussersten Werthe von ψ sind, wobei $\psi_1 - \psi_0 > 0$ und angenommen ist, der Bogen wachse mit wachsendem ψ; Aehnliches gilt für das zweite Integral.

III. In der Formel (b) des §. 58 sind φ und ψ die unabhängigen Veränderlichen, während r als Funktion beider erscheint, wie die Gleichung der krummen Oberfläche verlangt. Es versteht sich von selbst, dass man auch r und φ, oder r und ψ als unabhängig veränderlich ansehen kann. Aehnliches gilt von (a); doch bedarf es hier keiner besondern Rechnung, da bei der Gleichartigkeit der drei rechtwinklichen Koordinaten eine blosse Vertauschung der Buchstaben die weitern Formeln ergibt. Anders verhält es sich jedoch bei den Polarkoordinaten. Seyen also

1) r und φ die unabhängig Veränderlichen, ψ vermöge der Gleichung der krummen Oberfläche davon abhängig. Alsdann ist (§. 29, 2), wenn $x = r\cos\psi\cos\varphi$, $y = r\cos\psi\sin\varphi$, $z = r\sin\psi$: $\frac{\partial x}{\partial r} = \cos\psi\cos\varphi - r\sin\psi\cos\varphi \frac{\partial \psi}{\partial r}$, $\frac{\partial x}{\partial \varphi} = -r\cos\psi\sin\varphi - r\sin\psi\cos\varphi\frac{\partial \psi}{\partial \varphi}$, $\frac{\partial y}{\partial r} = \cos\psi\sin\varphi - r\sin\psi\sin\varphi\frac{\partial \psi}{\partial r}$, $\frac{\partial y}{\partial \varphi} = r\cos\psi\cos\varphi - r\sin\psi\sin\varphi\frac{\partial \psi}{\partial \varphi}$, $\frac{\partial z}{\partial r} = \sin\psi + r\cos\psi\frac{\partial z}{\partial r}$, $\frac{\partial z}{\partial \varphi} = r\cos\psi\frac{\partial \psi}{\partial \varphi}$.

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}, \quad \frac{\partial z}{\partial \varphi} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \varphi};$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial \varphi} - \frac{\partial z}{\partial \varphi}\frac{\partial y}{\partial r}}{\frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial \varphi} - \frac{\partial x}{\partial \varphi}\frac{\partial y}{\partial r}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\frac{\partial z}{\partial \varphi}\frac{\partial x}{\partial r} - \frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial x}{\partial \varphi}}{\frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial \varphi} - \frac{\partial x}{\partial \varphi}\frac{\partial y}{\partial r}},$$